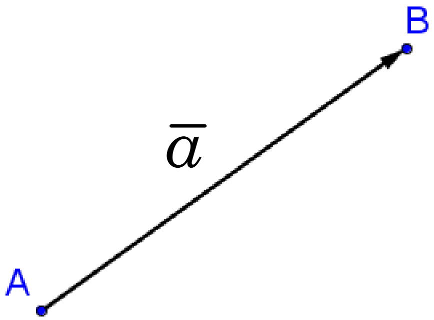
Аналитическая геометрия

Лекции №2–4

Векторы

1. Векторы в пространстве

Вектор – направленный отрезок.



$$\overline{AB} = \overline{a}$$

$$\overline{AA} = \overline{0}$$

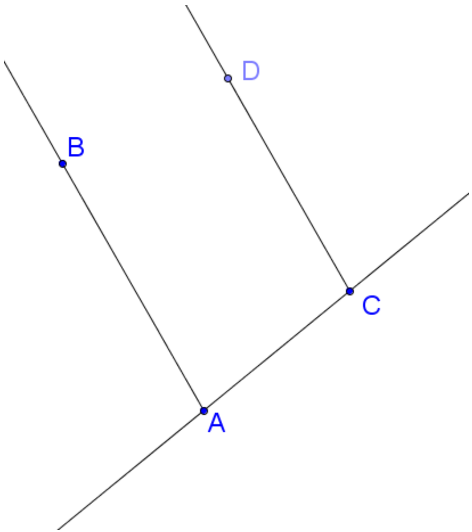
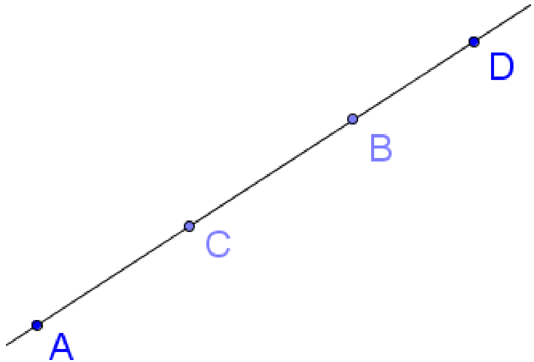
$\overline{BA}$ – противоположный $\overline{AB}$

$\overline{BA} = -\overline{AB}$

Векторы коллинеарны, если они лежат на одной или на параллельных прямых.

Нулевой вектор $\overline{0}$ коллинеарен любому вектору

Лучи (полупрямые) *AB* и *CD* называются одинаково направленными (*AB* ↑↑ *CD*) если:

они параллельны и лежат в одной полуплоскости с границей *AB*.	одна из полупрямых принадлежит другой
	

Пусть есть два вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.
Тогда, если $\overline{AB} = \overline{CD}$, то

1. $AB = CD$
2. $(AB) \uparrow\uparrow (CD)$

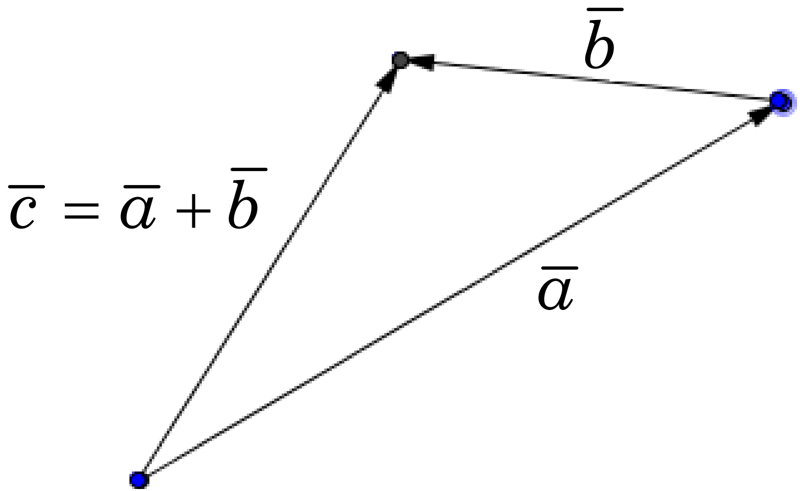
<u>**Теорема**</u>.

Пусть есть произвольные т.А и вектор $\bar{a}$.
Тогда существует единственный вектор $\overline{AB} = \bar{a}$.

При этом $\overline{BA}$ противоположен $\overline{AB}$ и $-\bar{a}$ противоположен $\bar{a}$.

2. Линейные операции над векторами

I. Сумма векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ –
такой вектор $\overline{c}$,
начало которого совпадает с началом $\overline{a}$,
а конец – с концом $\overline{b}$
(при этом $\overline{b}$ отложен с конца $\overline{a}$).

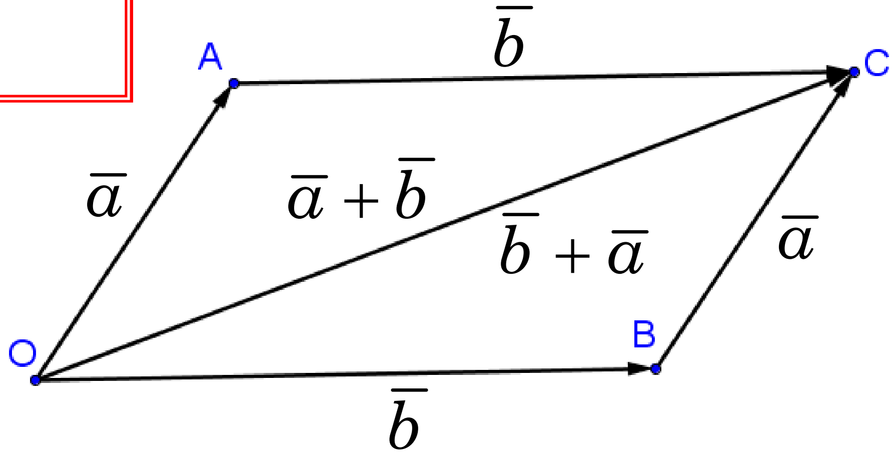


Свойства операции сложения

1. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ (коммутативность).
2. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$ (ассоциативность).
3. $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$ (есть нулевой элемент).
4. $\overline{a}+\left(-\overline{a}\right)=\overline{0}$ (есть обратный элемент)

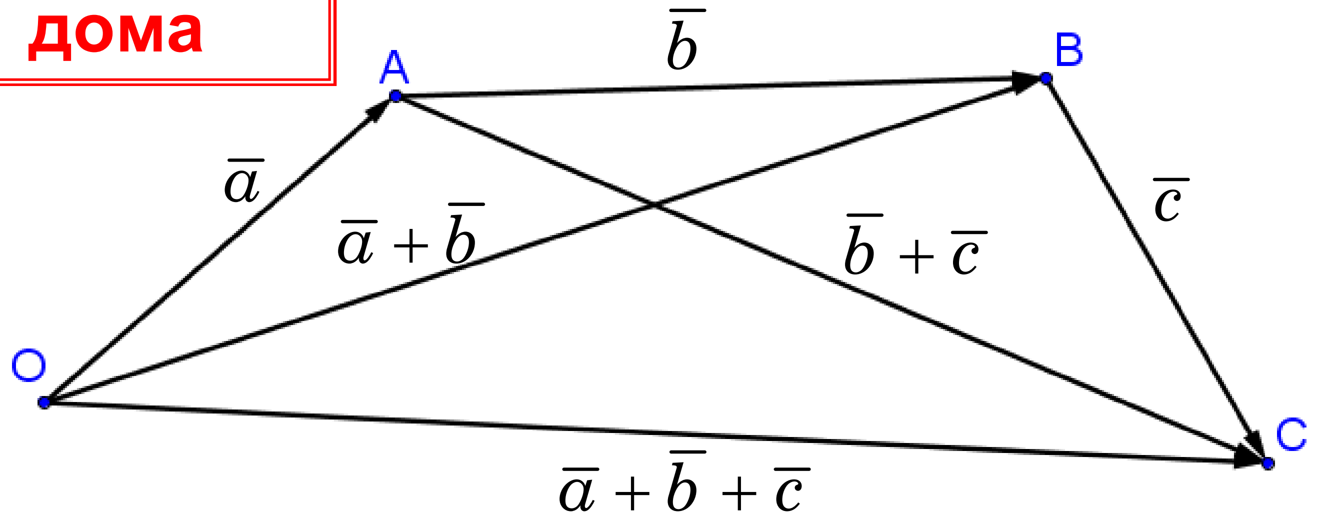
Доказательство коммутативности:

Разобрать дома



Доказательство ассоциативности:

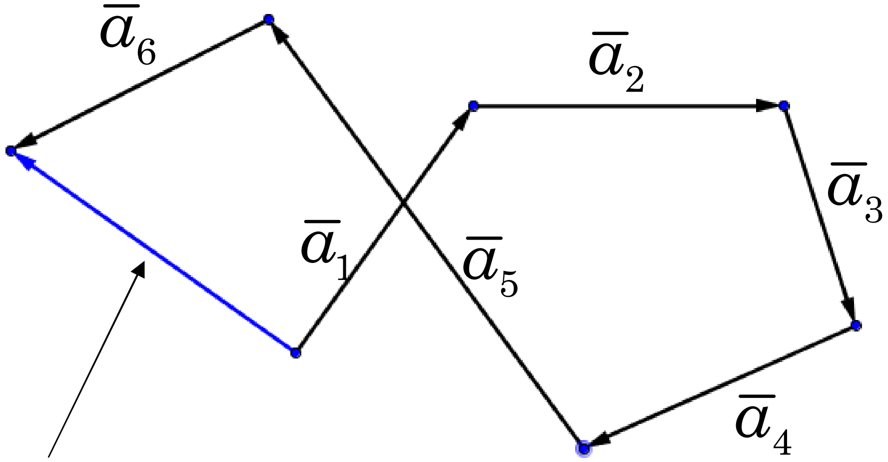
Разобрать дома



$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{OB}+\overline{BC}=\overline{OC}$$

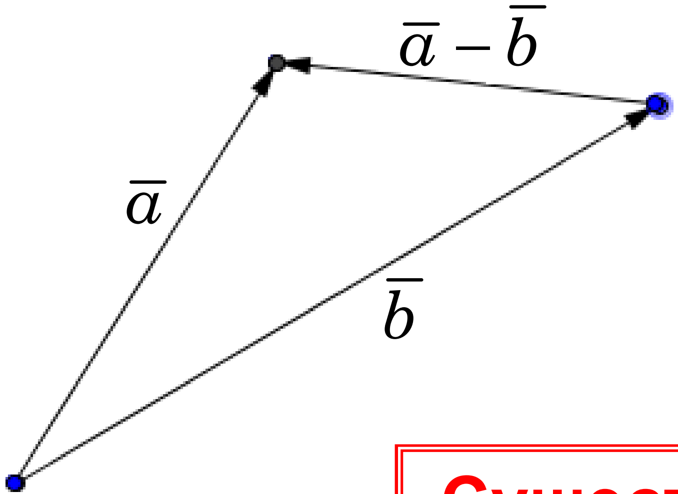
$$\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OC}$$

Сложение *n* векторов:



$$\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a}_3 + \overline{a}_4 + \overline{a}_5 + \overline{a}_6$$

II. Разность векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ –
такой вектор $\overline{c}$, что $\overline{b}+\overline{c}=\overline{a}$.



Существование и единственность доказать дома

III. Умножение вектора на число.

$$\lambda\overline{a} = \overline{b}$$

1. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – коллинеарны.
2. $\left|\overline{b}\right| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$
3. $\overline{b} \uparrow\uparrow \overline{a}$ если $\lambda > 0$

   $\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{a}$ если $\lambda < 0$

Свойства операции умножения вектора на число

1. $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$ (единичный элемент).
2. $\lambda \cdot (\mu \cdot \overline{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \overline{a}$ (ассоциативность).
3. $\lambda (\overline{a} + \overline{b}) = \lambda \overline{a} + \lambda \overline{b}$ (дистрибутивность).
4. $(\lambda + \mu) \overline{a} = \lambda \overline{a} + \mu \overline{a}$ (дистрибутивность).

3. Линейная зависимость векторов

Определение 1.

Линейная комбинация векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ –

– это выражение вида $\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_n \overline{a}_n$.

Действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ –

– коэффициенты линейной комбинации.

<u>Определение 2.</u>

Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ называются

<u>линейно зависимыми</u>,

если существует линейная комбинация

этих векторов $\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_n \overline{a}_n = \overline{0}$.

Причём, среди коэффициентов этой комбинации есть ***ненулевые*** числа.

Определение 3.

Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ называются

линейно независимыми,

если они не являются линейно зависимыми.

Определение 4.

Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ – линейно независимы

если всегда из того, что

$$\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_n \overline{a}_n = \overline{0}$$

вытекает, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Теоремы о линейной зависимости (доказать дома)

1. Если среди векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n$ есть нулевой вектор, то векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n$ – линейно зависимы.

2. Если среди векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n$ есть $k\left(1 \le k \le n\right)$ линейно зависимых векторов, то тогда все векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n$ линейно зависимы.

3. Теорема о коллинеарных векторах. Если $\overline{a} \parallel \overline{b}$ и $\overline{b} \ne \overline{0}$, то $\exists \lambda$ такое, что $\overline{a} = \lambda \overline{b}$.

Линейные комбинации двух векторов

Теорема.
Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно зависимы
тогда и только тогда,
когда они коллинеарны.

Линейные комбинации двух векторов

Теорема.

Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно зависимы

тогда и только тогда,

когда они коллинеарны.

Утверждение

Условие

Доказательство

1) Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ <u>линейно зависимы</u>.

Доказательство

1) Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно зависимы.

Это значит, что существует $\lambda\overline{a} + \mu\overline{b} = 0$,

причём $\lambda \neq 0$ или $\mu \neq 0$.

Доказательство

1) Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ <u>линейно зависимы</u>.

Это значит, что существует $\lambda\overline{a} + \mu\overline{b} = 0$,

причём $\lambda \neq 0$ или $\mu \neq 0$.

Тогда $\overline{a} = -\dfrac{\mu}{\lambda}\overline{b}$.

Доказательство

1) Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ <u>линейно зависимы</u>.
Это значит, что существует $\lambda\overline{a}+\mu\overline{b}=0$, причём $\lambda \neq 0$ или $\mu \neq 0$.

Тогда $\overline{a}=-\dfrac{\mu}{\lambda}\overline{b}$.

Следовательно, $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны (в соответствии с определением произведения вектора на число).

2) Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны.

2) Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны.

а) Если $\overline{b} = 0$, то $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно зависимы (по теореме 1).

2) Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны.

а) Если $\overline{b} = 0$, то $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно зависимы (по теореме 1).

б) Если $\overline{b} \neq 0$, то по теореме о коллинеарных векторах $\overline{a} = \lambda \overline{b}$.

2) Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны.

а) Если $\overline{b} = 0$, то $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно зависимы (по теореме 1).

б) Если $\overline{b} \neq 0$, то по теореме о коллинеарных векторах $\overline{a} = \lambda \overline{b}$.
Следовательно, $\overline{a} - \lambda \overline{b} = 0$.

2) Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ <u>коллинеарны</u>.

а) Если $\overline{b} = 0$, то $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно зависимы (по теореме 1).

б) Если $\overline{b} \neq 0$, то по теореме о коллинеарных векторах $\overline{a} = \lambda \overline{b}$.
Следовательно, $\overline{a} - \lambda \overline{b} = 0$.
Коэффициенты линейной комбинации: –1 и λ.
Таким образом, $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно зависимы.

Следствие

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны, то они линейно независимы.

Следствие

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны, то они линейно независимы.

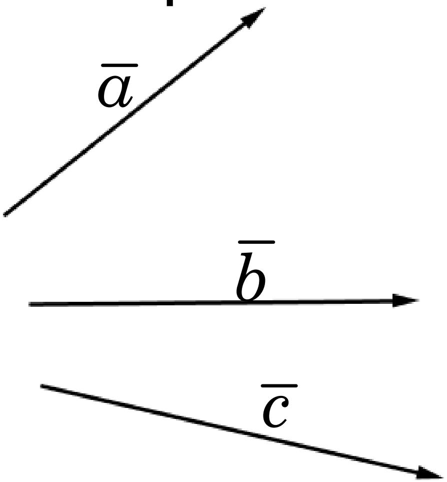
Замечание.
Два вектора всегда можно переместить так, что они будут лежать в одной плоскости.

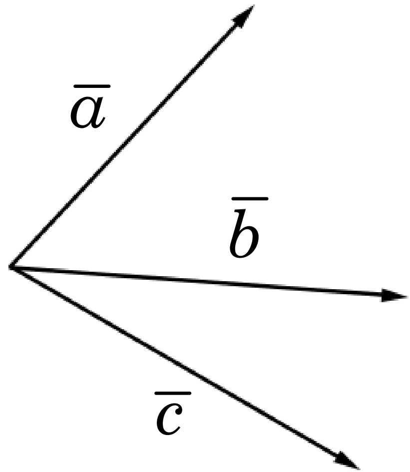
Линейные комбинации трёх векторов

Определение.
Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости будучи отложенными из одной точки или же параллельны одной плоскости.

Линейные комбинации трёх векторов

Определение.
Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости будучи отложенными из одной точки или же параллельны одной плоскости.





Теорема.

Три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Доказательство

1) Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ <u>линейно зависимы</u>.

Доказательство

1) Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ <u>линейно зависимы</u>.

Это значит, что существует $\lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c} = 0$, причём есть хотя бы один ненулевой коэффициент.

Доказательство

1) Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ <u>линейно зависимы</u>.

Это значит, что существует $\lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c} = 0$, причём есть хотя бы один ненулевой коэффициент. Пусть $\nu \neq 0$.

Доказательство

1) Пусть $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ <u>линейно зависимы</u>.

Это значит, что существует $\lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c} = 0$, причём есть хотя бы один ненулевой коэффициент. Пусть $\nu \neq 0$.

Тогда $\overline{c} = -\left(\frac{\lambda}{\nu}\overline{a} + \frac{\mu}{\nu}\overline{b}\right) = \underbrace{-\frac{\lambda}{\nu}}_{\alpha}\overline{a} \underbrace{-\frac{\mu}{\nu}}_{\beta}\overline{b} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$.

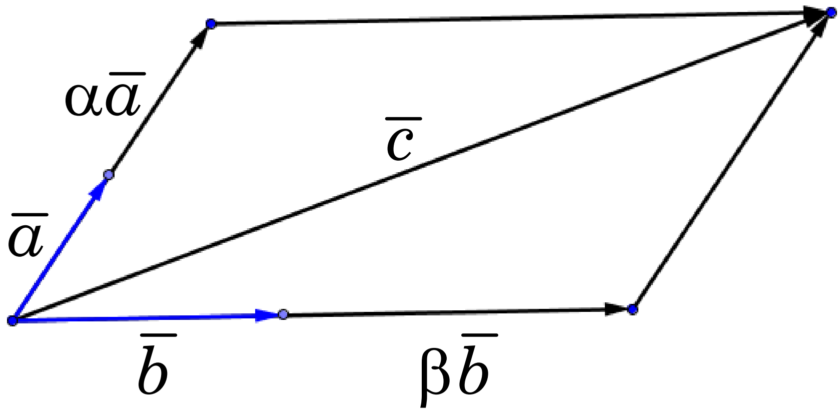
Доказательство

1) Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ <u>линейно зависимы</u>.

Это значит, что существует $\lambda\overline{a}+\mu\overline{b}+\nu\overline{c}=0$, причём есть хотя бы один ненулевой коэффициент. Пусть $\nu\neq 0$.

Тогда $$\overline{c}=-\left(\frac{\lambda}{\nu}\overline{a}+\frac{\mu}{\nu}\overline{b}\right)=\underbrace{-\frac{\lambda}{\nu}}_{\alpha}\overline{a}\underbrace{-\frac{\mu}{\nu}}_{\beta}\overline{b}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}.$$

Таким образом, $\overline{c}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}$.



Следовательно, $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны.

2) Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны.

2) Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны.

Рассмотрим два случая.

2) Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны.

Рассмотрим два случая.

а) Среди $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ есть пара коллинеарных векторов.

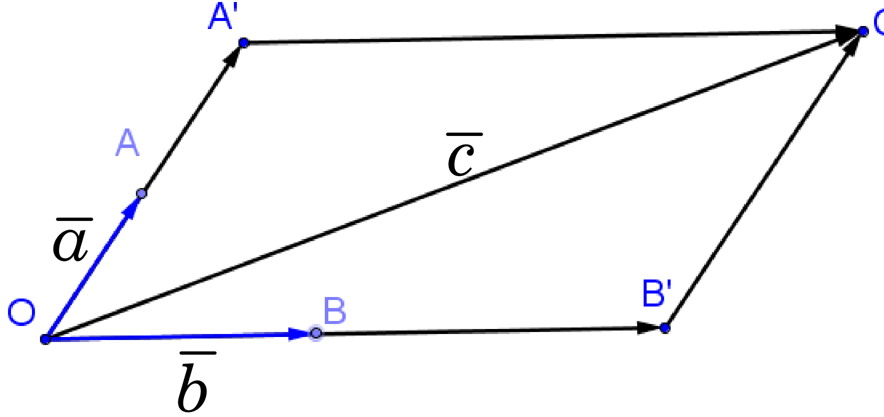
2) Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны.

Рассмотрим два случая.

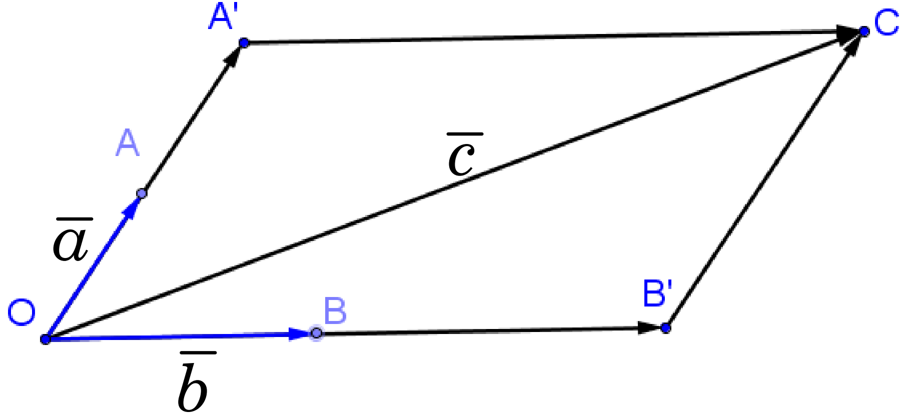
а) Среди $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ есть пара коллинеарных векторов.
По теореме 2, если есть пара коллинеарных (а эта пара линейно зависима), то и все 3 вектора линейно зависимы.

б) Среди $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ нет коллинеарных векторов. Отложим $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ из одной точки.

б) Среди $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ нет коллинеарных векторов. Отложим $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ из одной точки.



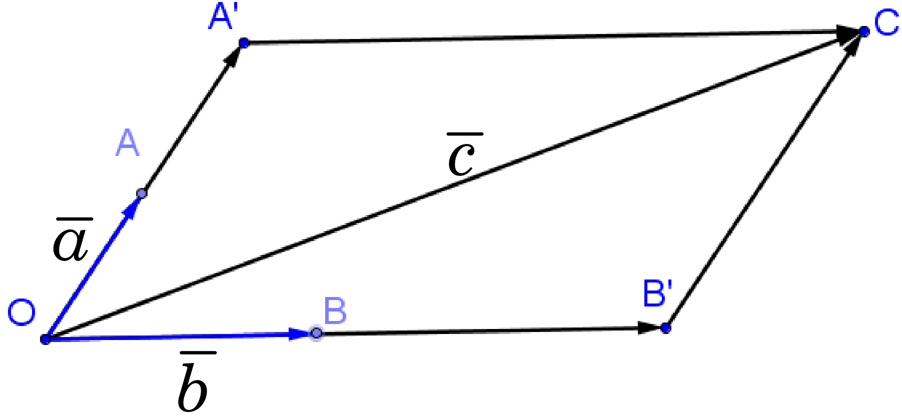
б) Среди $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ нет коллинеарных векторов. Отложим $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ из одной точки.



$$CB' \parallel OA$$

$$CA' \parallel OB$$

б) Среди $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ нет коллинеарных векторов. Отложим $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ из одной точки.

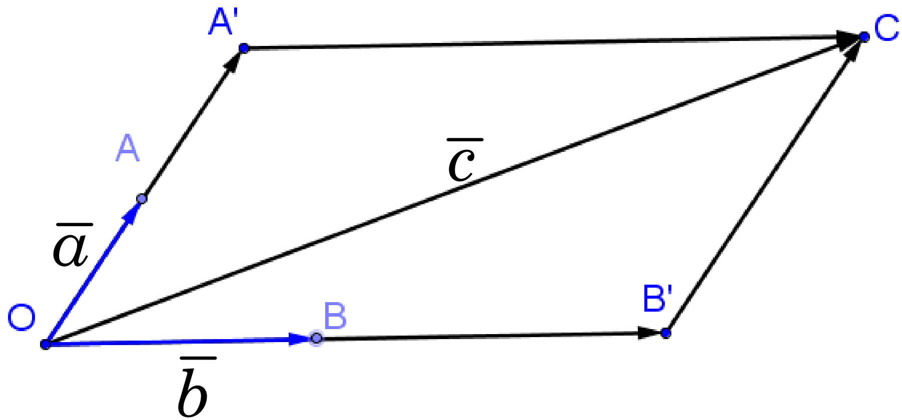


$CB' \parallel OA$

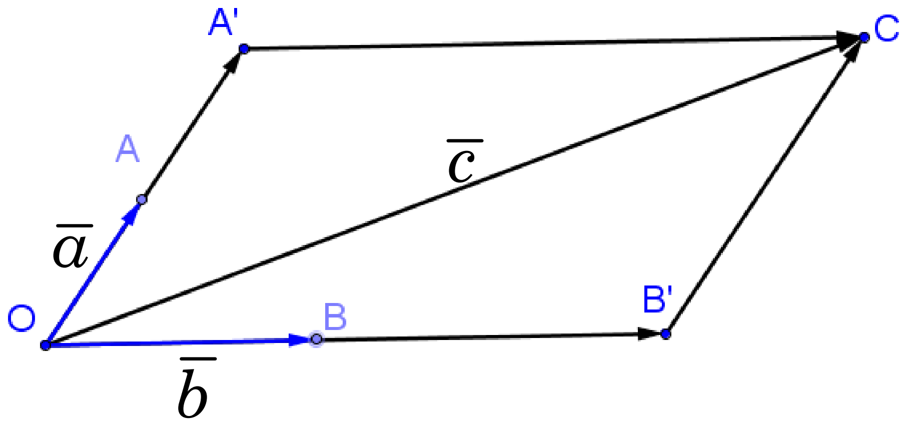
$CA' \parallel OB$

A' и B' существуют (иначе $OA \parallel OB$)

$\overline{c} = \overline{OA'} + \overline{OB'}$



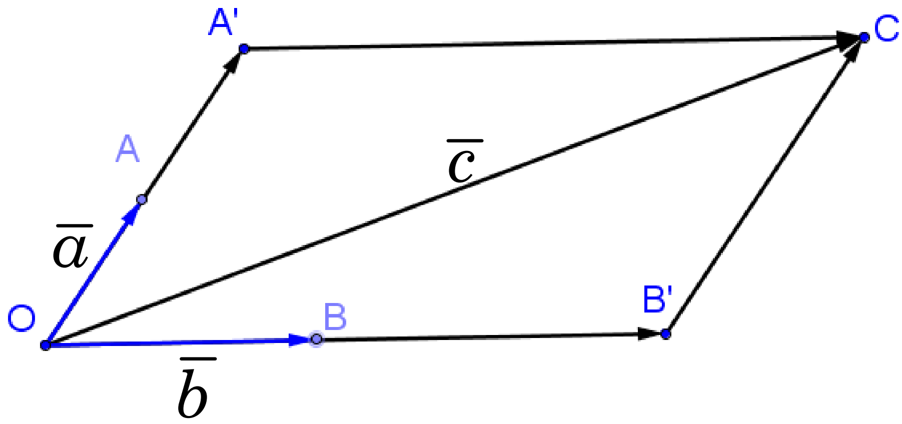
$\overline{a} \neq 0$, тогда $\overline{a}$ и $\overline{OA'}$ – коллинеарные.
Аналогично:
$\overline{b} \neq 0$, значит, $\overline{b}$ и $\overline{OB'}$ – коллинеарные.



Следовательно:

$\exists \ \overline{OA'} = \lambda\overline{a}; \ \overline{OB'} = \mu\overline{b}$. Откуда $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$.

$\lambda\overline{a} + \mu\overline{b} - \overline{c} = 0$



Следовательно:

$\exists\ \overline{OA'} = \lambda\overline{a};\ \overline{OB'} = \mu\overline{b}$. Откуда $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$.

$\lambda\overline{a} + \mu\overline{b} - \overline{c} = 0$

Коэффициенты линейной комбинации: λ, μ, –1.

Следовательно, $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ линейно зависимы.

Следствия

1. Если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ некомпланарны, то они линейно независимы.

Следствия

1. Если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ некомпланарны, то они линейно независимы.
2. Среди трёх некомпланарных векторов не может быть пары коллинеарных векторов и не может быть ни одного нулевого вектора.

Следствия

1. Если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ некомпланарны, то они линейно независимы.
2. Среди трёх некомпланарных векторов не может быть пары коллинеарных векторов и не может быть ни одного нулевого вектора.
3. Если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны, а векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – неколлинеарны, то существуют такие числа λ и μ, что $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$. И такое разложение единственно.

Линейная зависимость четырёх векторов

Теорема.
Любые четыре вектора линейно зависимы
(в 3-х мерном пространстве).

Доказательство разобрать дома

Доказательство

Возьмём произвольные векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$.

Доказательство

Возьмём произвольные векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$.

Рассмотрим два случая.

Доказательство

Возьмём произвольные векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$.

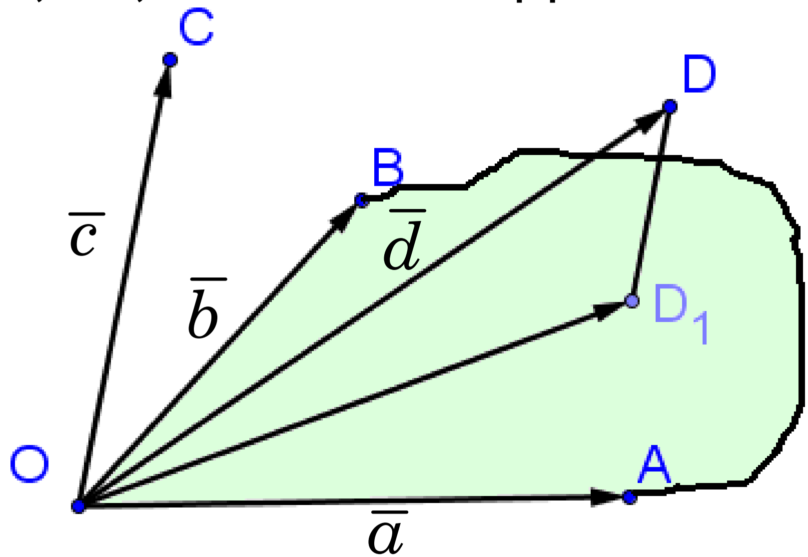
Рассмотрим два случая.

а) Среди $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$ есть тройка компланарных. Тогда эта тройка линейно зависима. Следовательно, все 4 вектора линейно зависимы.

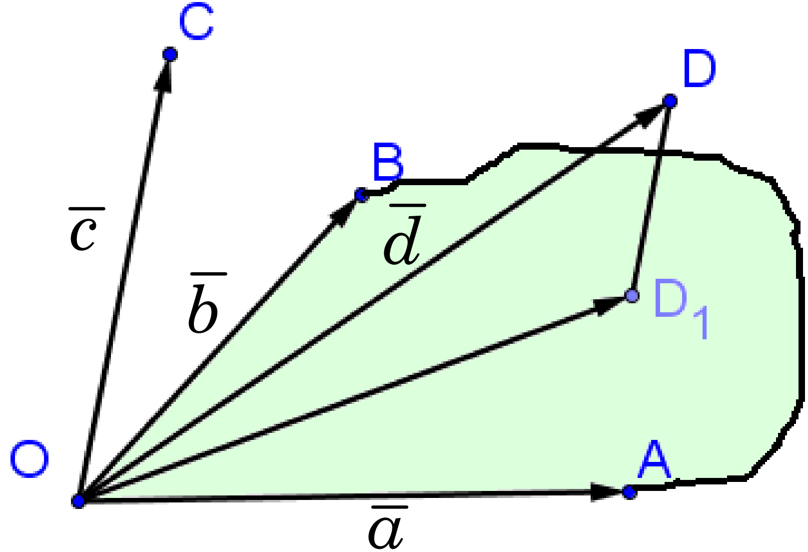
б) Среди $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$ нет тройки компланарных.

б) Среди $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$ нет тройки компланарных. Отложим $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$ из одной точки.

б) Среди $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$ нет тройки компланарных. Отложим $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$ из одной точки.

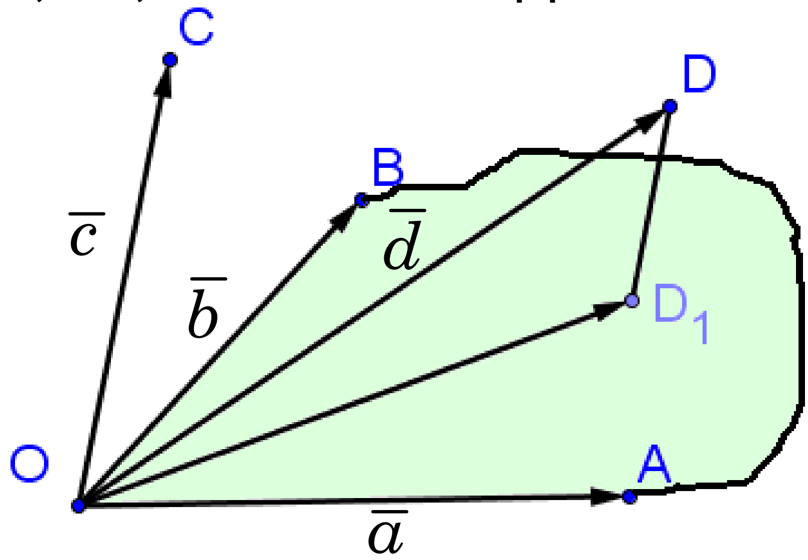


б) Среди $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$ нет тройки компланарных. Отложим $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$ из одной точки.



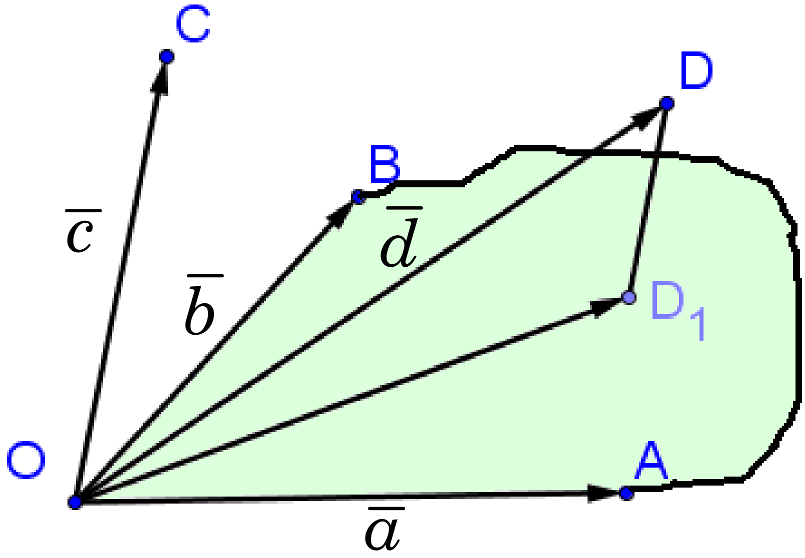
Через т.D проведём $DD_1 \parallel OC$.

б) Среди $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$ нет тройки компланарных. Отложим $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$ из одной точки.

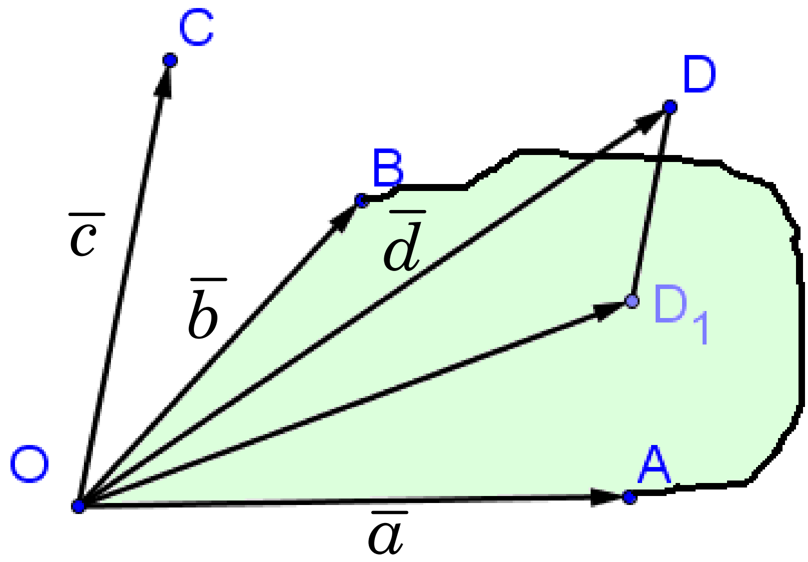


Через т.D проведём $DD_1 \parallel OC$.

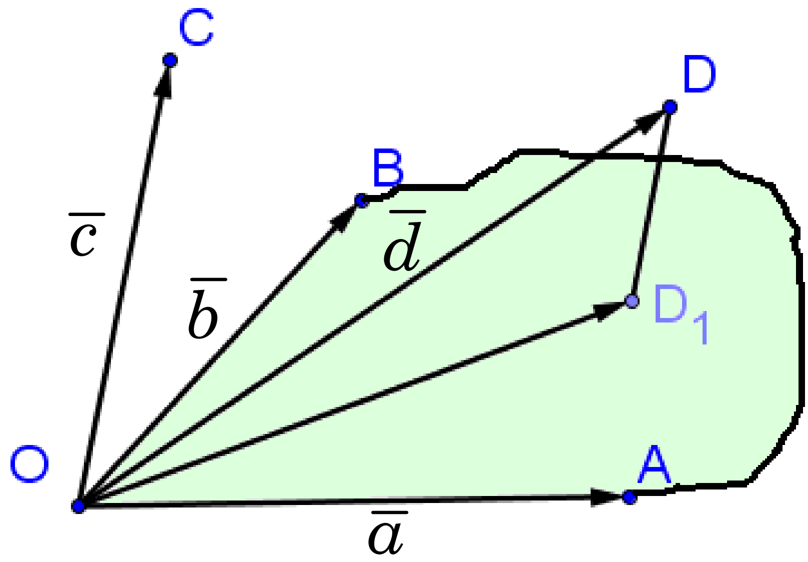
D_1 – точка, в которой DD_1 пересекает плоскость векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.



Если бы это было не так, то DD_1 было бы параллельно плоскости $\left(\overline{a},\overline{b}\right)$

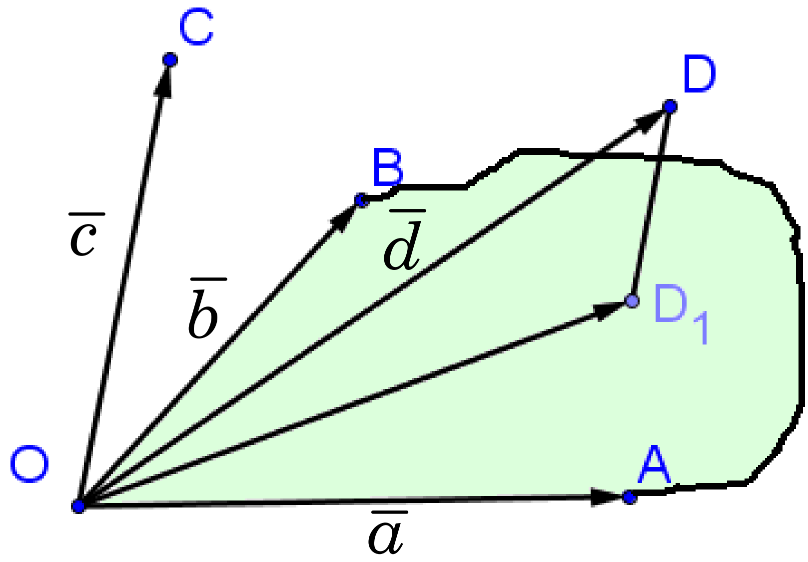


Если бы это было не так, то DD_1 было бы параллельно плоскости $(\overline{a}, \overline{b})$, т.е. $\overline{OC} \parallel (\overline{a}, \overline{b})$, а это невозможно, поскольку все векторы некомпланарны.

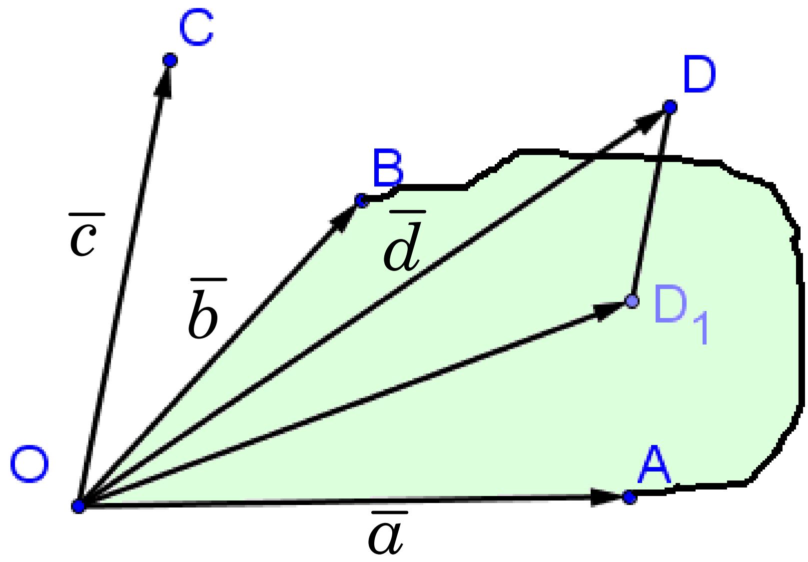


Если бы это было не так, то DD_1 было бы параллельно плоскости $\left(\overline{a},\overline{b}\right)$, т.е. $\overline{OC} \parallel \left(\overline{a},\overline{b}\right)$, а это невозможно, поскольку все векторы некомпланарны.

$$\overline{d} = \overline{OD_1} + \overline{D_1D}$$

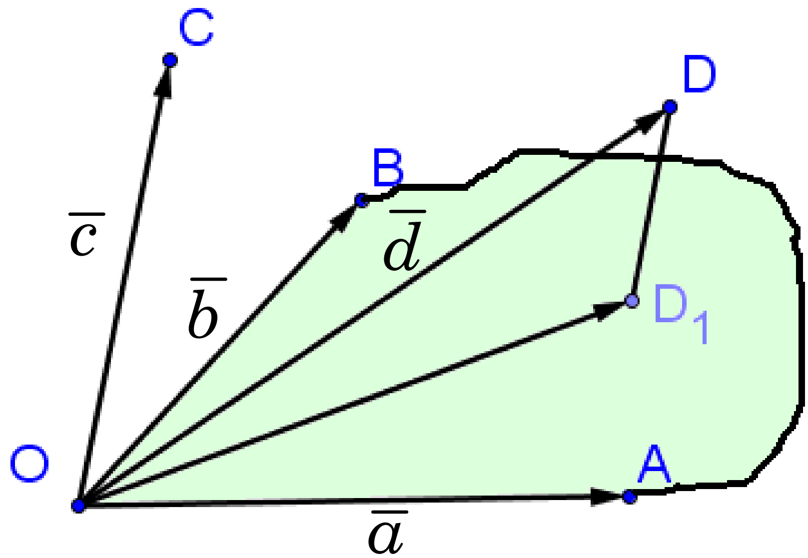


$\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{OD_1}$ – компланарны, причём $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – неколлинеарны.



$\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{OD_1}$ – компланарны, причём $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – неколлинеарны.

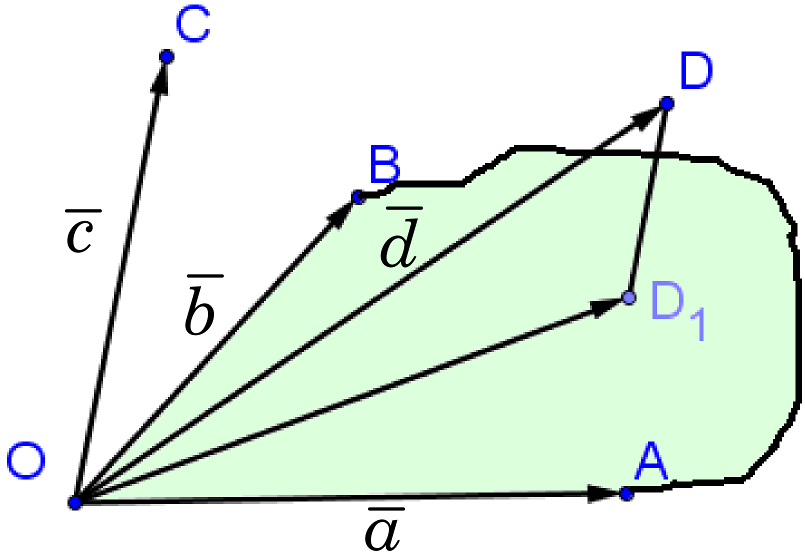
Следовательно, $\overline{OD_1} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$ (следствие 3).



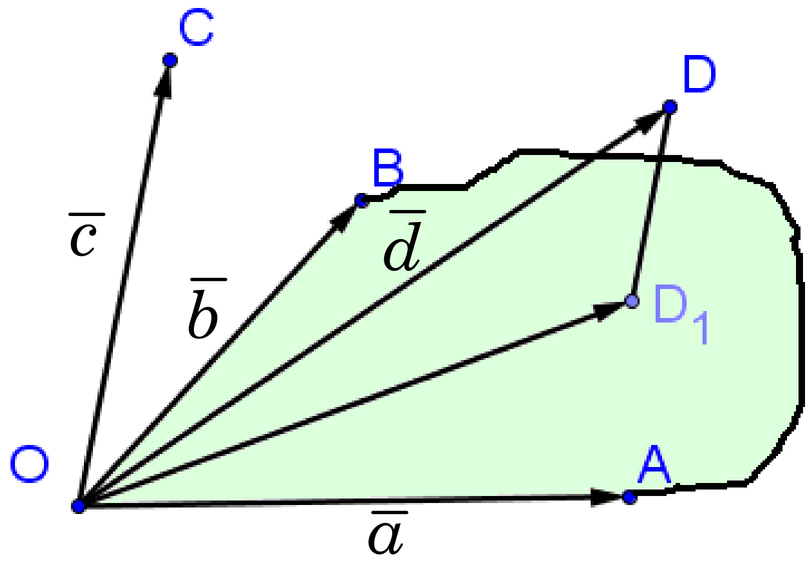
$\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{OD_1}$ – компланарны, причём $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – неколлинеарны.

Следовательно, $\overline{OD_1} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$ (следствие 3).

$\overline{DD_1}$ и $\overline{c}$ – коллинеарны, $\overline{c} \neq 0$. Значит, $\overline{DD_1} = \nu\overline{c}$.



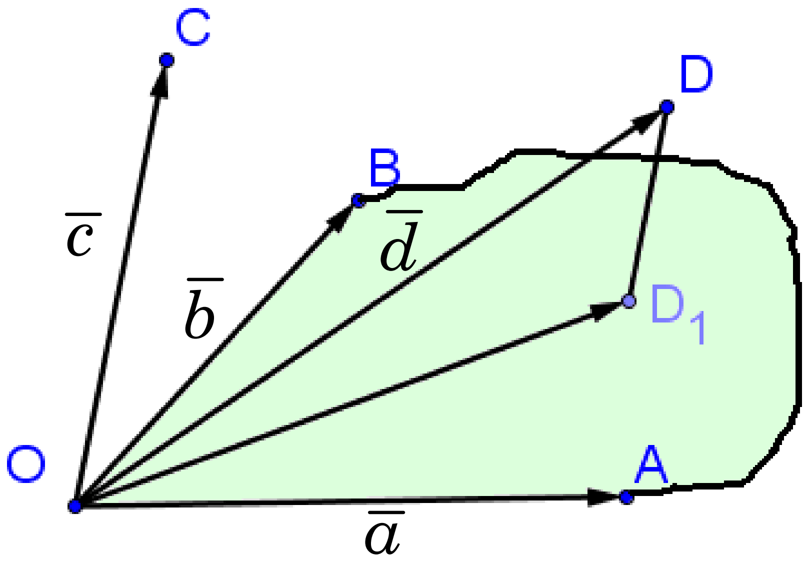
$$\overline{d} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c}\,; \qquad \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c} - \overline{d} = 0$$



$$\overline{d} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c}\ ; \qquad \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c} - \overline{d} = 0$$

Коэффициенты линейной комбинации:

λ, μ, ν, –1.



$$\overline{d} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c}\ ; \qquad \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c} - \overline{d} = 0$$

Коэффициенты линейной комбинации:

λ, μ, ν, –1.

Следовательно, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$ линейно зависимы.

Следствие.

Если $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ некомпланарны, то любой вектор $\overline{d}$ можно представить в виде линейной комбинации $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

Следствие.

Если $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ некомпланарны, то любой вектор $\overline{d}$ можно представить в виде линейной комбинации $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

То есть, существуют λ, μ, ν такие, что

$$\overline{d} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c}$$

4. Понятие о базисе

Определение 1.

Будем говорить, что **3** вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют базис в ***пространстве***, если они

а) линейно независимы;

б) любой вектор можно представить в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

<u>Определение 2.</u>

Будем говорить, что **2** вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют базис в плоскости π, если они

а) линейно независимы;

б) и любой вектор в ***плоскости*** π можно представить в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

<u>Теорема</u>.

Любая тройка некомпланарных векторов образует базис в пространстве.

Любые два неколлинеарные вектора, лежащие в плоскости π, образует базис плоскости π.

Доказательство

1. Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ некомпланарны.

Доказательство

1. Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ некомпланарны. Тогда они линейно независимы, и тогда $\overline{d} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c}$.

Доказательство

1. Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ некомпланарны. Тогда они линейно независимы, и тогда $\overline{d} = \lambda \overline{a} + \mu \overline{b} + \nu \overline{c}$. В соответствии с Определением 1 они образуют базис.

Доказательство

1. Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ некомпланарны. Тогда они линейно независимы, и тогда $\overline{d} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c}$. В соответствии с Определением 1 они образуют базис.
2. Для плоскости доказывается аналогично.

Координаты вектора относительно базиса

Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – базис в пространстве.

Координаты вектора относительно базиса

Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – базис в пространстве.

Тогда для любого вектора $\overline{d}$:

$$\overline{d} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c}$$

Координаты вектора относительно базиса

Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – базис в пространстве.

Тогда для любого вектора $\overline{d}$:

$$\overline{d} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c}$$

λ, μ, ν – координаты $\overline{d}$ относительно $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$:

$$\overline{d}\left(\lambda, \mu, \nu\right)$$

Теорема 1.
Координаты вектора относительно базиса определяются однозначно.

Доказательство

Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – базис.

$$\overline{d} = \lambda_1 \overline{a} + \mu_1 \overline{b} + \nu_1 \overline{c} \qquad (1)$$

Доказательство

Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – базис.

$$\overline{d} = \lambda_1 \overline{a} + \mu_1 \overline{b} + \nu_1 \overline{c} \qquad (1)$$

Допустим:

$$\overline{d} = \lambda_2 \overline{a} + \mu_2 \overline{b} + \nu_2 \overline{c} \qquad (2)$$

Доказательство

Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – базис.

$$\overline{d} = \lambda_1 \overline{a} + \mu_1 \overline{b} + \nu_1 \overline{c} \qquad (1)$$

Допустим:

$$\overline{d} = \lambda_2 \overline{a} + \mu_2 \overline{b} + \nu_2 \overline{c} \qquad (2)$$

Тогда

$$(1) - (2) = \overline{0} = (\lambda_1 - \lambda_2)\overline{a} + (\mu_1 - \mu_2)\overline{b} + (\nu_1 - \nu_2)\overline{c}$$

Доказательство

Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – базис.

$$\overline{d} = \lambda_1\overline{a} + \mu_1\overline{b} + \nu_1\overline{c} \qquad (1)$$

Допустим:

$$\overline{d} = \lambda_2\overline{a} + \mu_2\overline{b} + \nu_2\overline{c} \qquad (2)$$

Тогда

$$(1)-(2) = \overline{0} = (\lambda_1 - \lambda_2)\overline{a} + (\mu_1 - \mu_2)\overline{b} + (\nu_1 - \nu_2)\overline{c}$$

Следовательно, все коэффициенты этой комбинации равны нулю:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$\nu_1 - \nu_2 = 0$$

Доказательство

Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – базис.

$$\overline{d} = \lambda_1 \overline{a} + \mu_1 \overline{b} + \nu_1 \overline{c} \qquad (1)$$

Допустим:

$$\overline{d} = \lambda_2 \overline{a} + \mu_2 \overline{b} + \nu_2 \overline{c} \qquad (2)$$

Тогда

$$(1)-(2) = \overline{0} = (\lambda_1 - \lambda_2)\overline{a} + (\mu_1 - \mu_2)\overline{b} + (\nu_1 - \nu_2)\overline{c}$$

Следовательно, все коэффициенты этой комбинации равны нулю:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2$$

$$\mu_1 - \mu_2 = 0 \quad \text{то есть} \quad \mu_1 = \mu_2$$

$$\nu_1 - \nu_2 = 0 \qquad \nu_1 = \nu_2$$

<u>Признак равенства векторов.</u>

Векторы равны тогда и только тогда,
когда их координаты относительно одного
базиса равны.

Теорема 2.

При сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число все координаты вектора умножаются на это число.

Доказательство

Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – базис.

Доказательство

Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – базис.

$$\overline{d}_1 = \lambda_1\overline{a} + \mu_1\overline{b} + \nu_1\overline{c}$$

$$\overline{d}_2 = \lambda_2\overline{a} + \mu_2\overline{b} + \nu_2\overline{c}$$

Доказательство

Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – базис.

$$\overline{d}_1 = \lambda_1 \overline{a} + \mu_1 \overline{b} + \nu_1 \overline{c}$$

$$\overline{d}_2 = \lambda_2 \overline{a} + \mu_2 \overline{b} + \nu_2 \overline{c}$$

$$\overline{d}_1 + \overline{d}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)\overline{a} + (\mu_1 + \mu_2)\overline{b} + (\nu_1 + \nu_2)\overline{c}$$

Доказательство

Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – базис.

$$\overline{d}_1 = \lambda_1\overline{a} + \mu_1\overline{b} + \nu_1\overline{c}$$

$$\overline{d}_2 = \lambda_2\overline{a} + \mu_2\overline{b} + \nu_2\overline{c}$$

$$\overline{d}_1 + \overline{d}_2 = \underline{(\lambda_1 + \lambda_2)}\overline{a} + \underline{(\mu_1 + \mu_2)}\overline{b} + \underline{(\nu_1 + \nu_2)}\overline{c}$$

Координаты вектора

$$\left(\overline{d}_1 + \overline{d}_2\right)$$

относительно базиса

Доказательство

Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – базис.

$$\overline{d}_1 = \lambda_1 \overline{a} + \mu_1 \overline{b} + \nu_1 \overline{c}$$

$$\overline{d}_2 = \lambda_2 \overline{a} + \mu_2 \overline{b} + \nu_2 \overline{c}$$

$$\overline{d}_1 + \overline{d}_2 = \underline{(\lambda_1 + \lambda_2)} \overline{a} + \underline{(\mu_1 + \mu_2)} \overline{b} + \underline{(\nu_1 + \nu_2)} \overline{c}$$

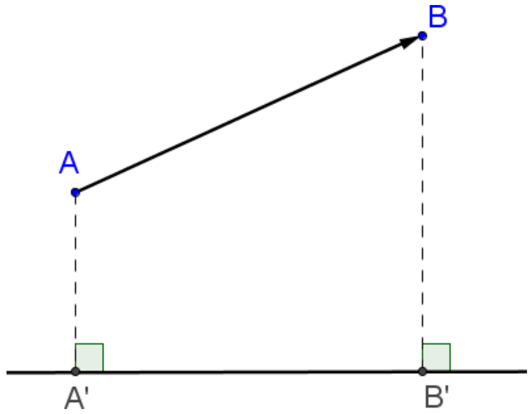
Координаты вектора

$$\left(\overline{d}_1 + \overline{d}_2\right)$$

относительно базиса

$$\alpha \overline{d}_1 = (\alpha\lambda_1) \overline{a} + (\alpha\mu_1) \overline{b} + (\alpha\nu_1) \overline{c}$$

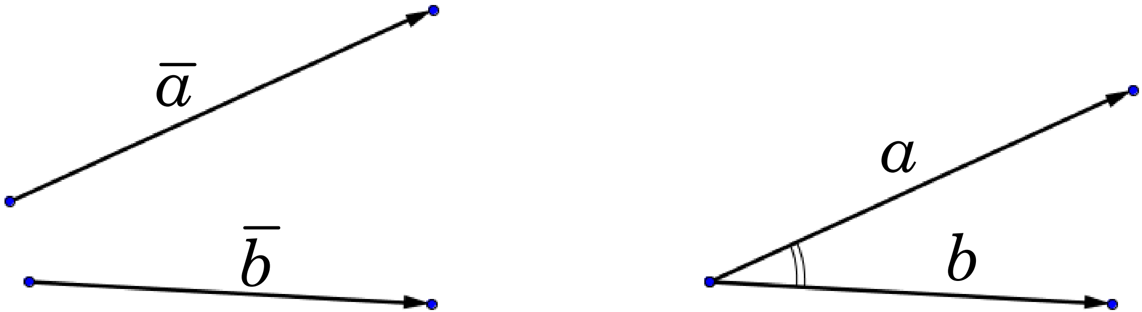
5. Проекция вектора на ось



Проекцией $\overline{AB}$ на ось u называется число, равное длине отрезка $A'B'$,

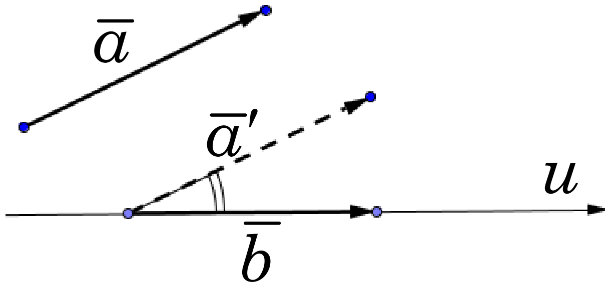
взятое со знаком «+», если $\overline{A'B'} \uparrow\uparrow u$,

и взятое со знаком «–», если $\overline{A'B'} \uparrow\downarrow u$.



Определение 1

Углом между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ является угол между лучами a и b.



<u>Определение 2</u>

Углом между вектором $\overline{a}$ и осью u называется угол между $\overline{a}$ и произвольным вектором, однонаправленным с осью u.

$$np_u\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\varphi$$

Проекция $\overline{a}$ на u
равна произведению длины $\overline{a}$
на косинус угла между $\overline{a}$ и u.

ДОКАЗАТЬ ДОМА

6. Аффинные координаты

1) Аффинные координаты в пространстве задаются базисом $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$
и точкой O – началом координат.

2) Аффинные координаты любой точки M – координаты вектора $\overline{OM}$ (относительно базиса $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$).

3) Каждой точке пространства M однозначно соответствует тройка аффинных координат λ, μ, ν: $M(\lambda, \mu, \nu)$

т.к. любой вектор $\overline{OM}$ может быть единственным способом разложен по базису $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$:

$$\overline{OM} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c}\ .$$

7. Прямоугольные декартовы координаты вектора

Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – базис, причём:

1) $\left|\overline{a}\right| = \left|\overline{b}\right| = \left|\overline{c}\right| = 1$;

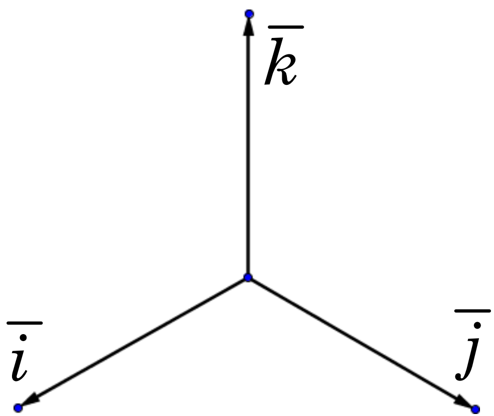
2) $\overline{a} \perp \overline{b}, \quad \overline{b} \perp \overline{c}, \quad \overline{a} \perp \overline{c}$.

Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – базис, причём:

1) $\left|\overline{a}\right| = \left|\overline{b}\right| = \left|\overline{c}\right| = 1$;

2) $\overline{a} \perp \overline{b}, \quad \overline{b} \perp \overline{c}, \quad \overline{a} \perp \overline{c}$.

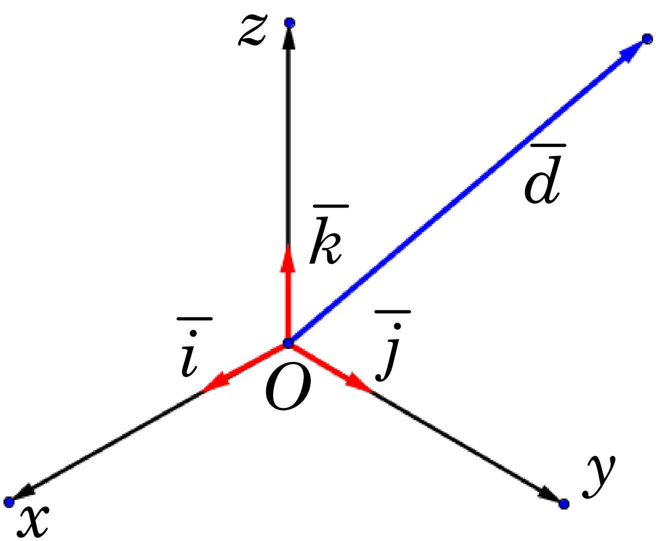
Такой базис $\left(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\right)$ называется **ортонормированным** и **ортогональным**.



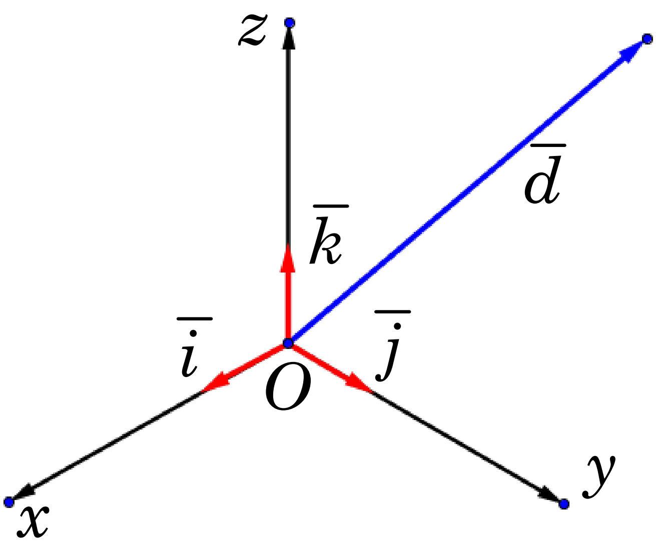
Координаты вектора
относительно ортогонального
ортонормированного базиса
называются
прямоугольными декартовыми
координатами вектора.

Прямоугольные декартовы
координаты вектора
равны проекциям этого вектора
на оси координат.

Прямоугольные декартовы координаты вектора равны проекциям этого вектора на оси координат.



Прямоугольные декартовы координаты вектора равны проекциям этого вектора на оси координат.



$$\overline{d} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k},$$

где

$$x = np_{Ox}\overline{d}$$

$$y = np_{Oy}\overline{d}$$

$$z = np_{Oz}\overline{d}$$

Линейные свойства проекций вектора на ось

Теорема

1) $np_u\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=np_u\overline{a}+np_u\overline{b}$

2) $np_u\lambda\overline{a}=\lambda\cdot np_u\overline{a}$

8. Скалярное произведение векторов

Определение

Скалярное произведение двух векторов
$\overline{a}$ и $\overline{b}$ – это число,
равное произведению длин этих векторов
на косинус угла между ними.

Определение

Скалярное произведение двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – это число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначение: $\left(\overline{a}\overline{b}\right) = \overline{a} \cdot \overline{b} = \left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle$.

<u>Определение</u>

Скалярное произведение двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – это число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначение: $\left(\overline{a}\overline{b}\right) = \overline{a} \cdot \overline{b} = \left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle$.

Определение: $\overline{a}\overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos \varphi$

<u>Определение</u>

Скалярное произведение двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – это число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначение: $\left(\overline{a}\overline{b}\right) = \overline{a} \cdot \overline{b} = \left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle$.

Определение: $\overline{a}\overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\varphi$

Вычисление: $\overline{a}\overline{b} = \left|\overline{a}\right| np_{\overline{a}}\overline{b} = \left|\overline{b}\right| np_{\overline{b}}\overline{a}$

Свойства скалярного произведения

1) $\overline{a} \perp \overline{b}$ тогда и только тогда,

когда $\left(\overline{a}\overline{b}\right) = 0$.

Свойства скалярного произведения

1) $\overline{a} \perp \overline{b}$ тогда и только тогда, когда $\left(\overline{a}\overline{b}\right) = 0$.

2) Угол между ненулевыми $\overline{a}$ и $\overline{b}$ острый (тупой) тогда и только тогда, когда их скалярное произведение больше (меньше) нуля.

Алгебраические свойства скалярного произведения

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$ (коммутативность);

Алгебраические свойства скалярного произведения

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$ (коммутативность);

2) $\left(\lambda \overline{a}\right)\overline{b} = \lambda\left(\overline{a}\overline{b}\right)$ (ассоциативность);

Алгебраические свойства скалярного произведения

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$ (коммутативность);

2) $(\lambda \overline{a})\overline{b} = \lambda\left(\overline{a}\overline{b}\right)$ (ассоциативность);

3) $\overline{a}\left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$ (дистрибутивность).

Алгебраические свойства скалярного произведения

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$ (коммутативность);

2) $(\lambda \overline{a})\overline{b} = \lambda\left(\overline{a}\overline{b}\right)$ (ассоциативность);

3) $\overline{a}\left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$ (дистрибутивность).

4) $\overline{a} \cdot \overline{a} \geq 0; \quad \overline{a} \cdot \overline{a} = \overline{a}^2 = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{a}\right| \cdot \cos 0 = \left|\overline{a}\right|^2;$

$\overline{a}^2 = \left|\overline{a}\right|^2.$

Теорема

Скалярное произведение векторов

$\overline{a} = a_1 \cdot \overline{i} + a_2 \cdot \overline{j} + a_3 \cdot \overline{k}$ и $\overline{b} = b_1 \cdot \overline{i} + b_2 \cdot \overline{j} + b_3 \cdot \overline{k}$

в декартовых координатах равно

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\overline{a}\overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\varphi$$

$$\overline{a}\overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\overline{b}}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|}$$

$$\overline{a}\overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\overline{b}}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|}$$

$$\left|\overline{a}\right|^2 = \overline{a}^2 \quad \Rightarrow \quad \left|\overline{a}\right| = \sqrt{\overline{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$$

$$|\overline{a}|^2 = \overline{a}^2 \quad \Rightarrow \quad |\overline{a}| = \sqrt{\overline{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Аналогично: $|\overline{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

$$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$$

$$|\overline{a}|^2 = \overline{a}^2 \quad \Rightarrow \quad |\overline{a}| = \sqrt{\overline{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Аналогично: $|\overline{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

$$\cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$$

$$|\overline{a}|^2 = \overline{a}^2 \quad \Rightarrow \quad |\overline{a}| = \sqrt{\overline{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Аналогично: $|\overline{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

$$\cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Справедливо для векторов, заданных прямоугольными декартовыми координатами.

9. Правые и левые тройки векторов и системы координат

<u>Определение 1</u>

Три вектора называются
упорядоченной тройкой (или просто тройкой),
если указано,
какой из них является первым,
какой – вторым
и какой – третьим.

<u>Определение 1</u>

Три вектора называются
упорядоченной тройкой (или просто тройкой),
если указано,
какой из них является первым,
какой – вторым
и какой – третьим.

<u>Примеры</u>:

$\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}$ $\qquad$ $\overline{a}\ \overline{c}\ \overline{b}$ $\qquad$ $\overline{c}\ \overline{a}\ \overline{b}$ $\qquad$ $\overline{b}\ \overline{a}\ \overline{c}$

Определение 2

Тройка некомпланарных векторов $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$
называется правой (левой),
если (после приведения к общему началу)
выполнено одно из следующих условий:

Условие 1.
Эти векторы расположены так,
как могут быть расположены
большой, указательный и средний пальцы
правой (левой) руки;

Условие 2.

Вектор $\overline{c}$ располагается по ту сторону
от плоскости,
определяемой векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$,
откуда кратчайший поворот от $\overline{a}$ к $\overline{b}$
кажется совершающимся
против часовой стрелки (по часовой стрелке)
– аналог «правила буравчика»;

Условие 3.

Находясь внутри телесного угла,
образованного векторами $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$,
мы видим поворот от $\overline{a}$ к $\overline{b}$ и от него к $\overline{c}$
совершающимся
против часовой стрелки (по часовой стрелке).

Замечание:
Понятие правой и левой тройки теряет смысл для компланарных векторов.

<u>Замечание</u>:
Понятие правой и левой тройки теряет смысл для компланарных векторов.

Если две тройки векторов обе правые,
или обе левые, то говорят,
что эти тройки одной ориентации.
В противном случае говорят,
что они противоположной ориентации.

Всего из трёх векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$
можно составить такие шесть троек:

Всего из трёх векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$
можно составить такие шесть троек:

$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \quad \overline{b}, \overline{c}, \overline{a} \quad \overline{c}, \overline{a}, \overline{b}$ – правая (левая) тройка

Всего из трёх векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$
можно составить такие шесть троек:

$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \quad \overline{b}, \overline{c}, \overline{a} \quad \overline{c}, \overline{a}, \overline{b}$ – правая (левая) тройка

$\overline{b}, \overline{a}, \overline{c} \quad \overline{a}, \overline{c}, \overline{b} \quad \overline{c}, \overline{b}, \overline{a}$ – левая (правая) тройка

<u>Определение 3.</u>

Аффинная или декартова система координат
называется правой (левой),
если три базисных вектора
образуют правую (левую) тройку.

Определение 3.
Аффинная или декартова система координат называется правой (левой),
если три базисных вектора
образуют правую (левую) тройку.

Если специально не оговорено, то рассматриваются только правые тройки векторов и системы координат.

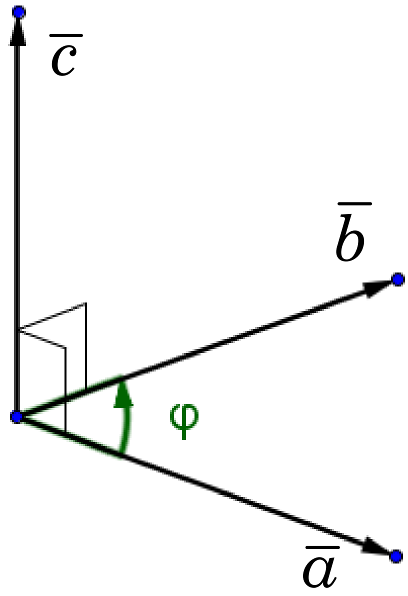
10. Векторное произведение векторов

Определение

Векторным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, который удовлетворяет условиям:

Определение

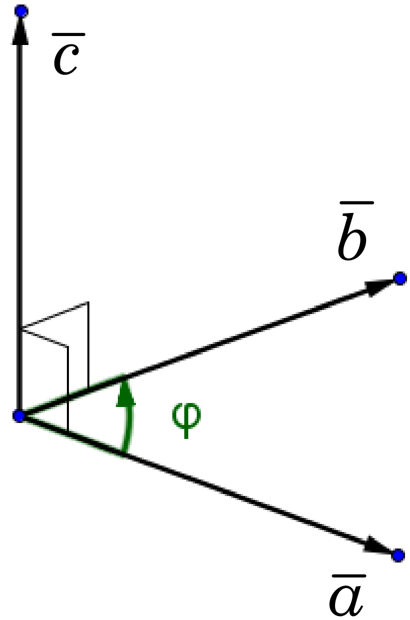
Векторным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, который удовлетворяет условиям:



Определение

Векторным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, который удовлетворяет условиям:

1) $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin \varphi$

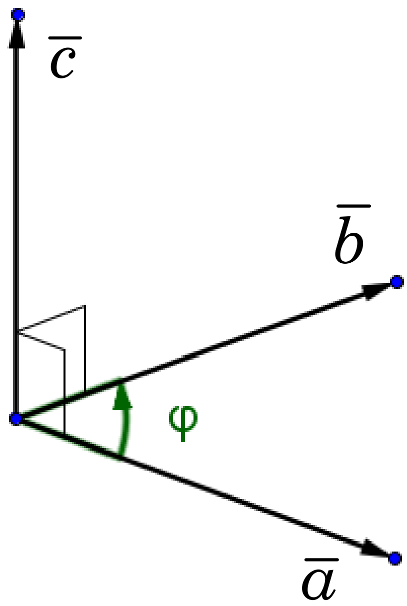


Определение

Векторным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, который удовлетворяет условиям:

1) $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\varphi$

2) $\overline{c} \perp \overline{a}, \quad \overline{c} \perp \overline{b}$



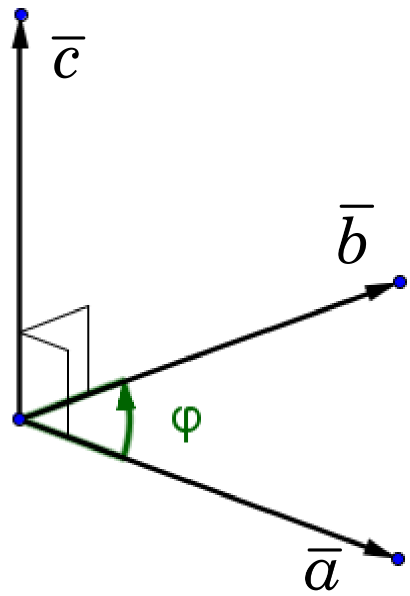
Определение

Векторным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, который удовлетворяет условиям:

1) $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\varphi$

2) $\overline{c} \perp \overline{a}, \quad \overline{c} \perp \overline{b}$

3) $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – правая тройка.



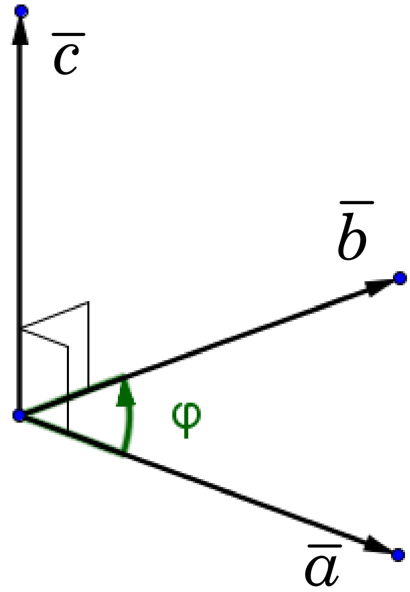
<u>Определение</u>

Векторным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, который удовлетворяет условиям:

1) $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\varphi$

2) $\overline{c} \perp \overline{a}, \quad \overline{c} \perp \overline{b}$

3) $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – правая тройка.



Обозначения:

$\left[\overline{a}\,\overline{b}\right], \quad \left(\overline{a}\times\overline{b}\right), \quad \overline{a}\times\overline{b}, \quad \left(\overline{a}\wedge\overline{b}\right)$

$\overline{c} = \left[\overline{a}\,\overline{b}\right]$

Геометрические свойства векторного произведения

1) Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – коллинеарные, то $\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]=0$.

Геометрические свойства векторного произведения

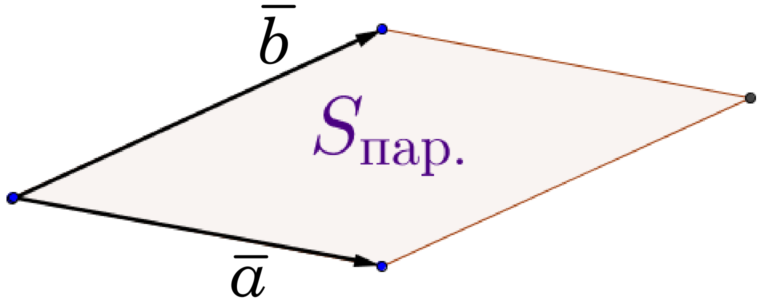
1) Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – коллинеарные, то $\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]=0$.

2) Длина (модуль) векторного произведения $\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]$ равна площади S параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Геометрические свойства векторного произведения

1) Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – коллинеарные, то $\left[\overline{a}\,\overline{b}\right] = 0$.

2) Длина (модуль) векторного произведения $\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]$ равна площади S параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.



$$\left|\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]\right| = S_{пар.}$$

<u>Определение</u>.
Ортом произвольного ненулевого вектора $\overline{c}$ назовём единичный вектор, коллинеарный $\overline{c}$ и имеющий одинаковое с $\overline{c}$ направление.

$$\overline{e} = \frac{\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|}; \quad \left|\overline{e}\right| = \frac{\left|\overline{a}\right|}{\left|\overline{a}\right|} = 1$$

Геометрические свойства векторного произведения

3) $\left[\overline{a}\,\overline{b}\right] = S_{пар.} \cdot \overline{e}$

$$\overline{e} = \frac{\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]}{\left|\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]\right|}; \quad \overline{e} = \frac{\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]}{S_{пар.}};$$

Алгебраические свойства векторного произведения

1) $\left[\overline{a}\,\overline{b}\right] = -\left[\overline{b}\overline{a}\right]$ – антикоммутативность

Алгебраические свойства векторного произведения

1) $\left[\overline{a}\,\overline{b}\right] = -\left[\overline{b}\overline{a}\right]$ – антикоммутативность

2) $\left[\left(\alpha\overline{a}\right)\overline{b}\right] = \alpha\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]$ – ассоциативность

Алгебраические свойства векторного произведения

1) $\left[\overline{a}\,\overline{b}\right] = -\left[\overline{b}\overline{a}\right]$ – антикоммутативность

2) $\left[\left(\alpha\overline{a}\right)\overline{b}\right] = \alpha\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]$ – ассоциативность

3) $\left[\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\overline{c}\right] = \left[\overline{a}\,\overline{c}\right] + \left[\overline{b}\overline{c}\right]$ – дистрибутивность

Алгебраические свойства векторного произведения

1) $\left[\overline{a}\,\overline{b}\right] = -\left[\overline{b}\overline{a}\right]$ – антикоммутативность

2) $\left[\left(\alpha\overline{a}\right)\overline{b}\right] = \alpha\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]$ – ассоциативность

3) $\left[\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\overline{c}\right] = \left[\overline{a}\,\overline{c}\right] + \left[\overline{b}\overline{c}\right]$ – дистрибутивность

4) $\left[\overline{a}\,\overline{a}\right] = 0$

11. Смешанное произведение векторов

Обозначение: $\left(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right)$

Обозначение: $\left(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right)$

Пусть даны три произвольных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

Обозначение: $\left(\overline{a}\overline{b}\,\overline{c}\right)$

Пусть даны три произвольных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.
Если вектор $\overline{a}$ векторно умножается
на вектор $\overline{b}$,

Обозначение: $\left(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right)$

Пусть даны три произвольных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.
Если вектор $\overline{a}$ векторно умножается
на вектор $\overline{b}$,
а затем получившийся при этом вектор $\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]$
скалярно умножается на вектор $\overline{c}$,

Обозначение: $\left(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right)$

Пусть даны три произвольных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$. Если вектор $\overline{a}$ векторно умножается на вектор $\overline{b}$,

а затем получившийся при этом вектор $\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]$ скалярно умножается на вектор $\overline{c}$,

то в результате получается число $\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]\overline{c}$, называемое ***смешанным произведением*** векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

Обозначение: $\left(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right)$

Пусть даны три произвольных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.
Если вектор $\overline{a}$ векторно умножается
на вектор $\overline{b}$,
а затем получившийся при этом вектор $\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]$
скалярно умножается на вектор $\overline{c}$,
то в результате получается число $\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]\overline{c}$,
называемое ***смешанным произведением***
векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

$$\left(\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right) \overset{def}{=} \left[\overline{a}\overline{b}\right]\overline{c}$$

<u>Теорема</u>.

Смешанное произведение $\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]\overline{c}$ равно объему параллелепипеда,

Теорема.

Смешанное произведение $\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]\overline{c}$
равно объему параллелепипеда,
построенного на приведенных
к общему началу векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$,

Теорема.

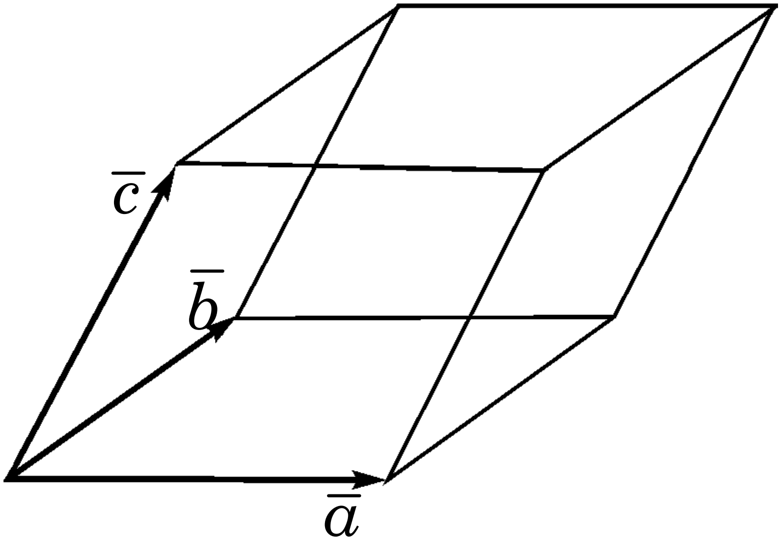
Смешанное произведение $\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]\overline{c}$
равно объему параллелепипеда,
построенного на приведенных
к общему началу векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$,
взятому со знаком плюс,
если тройка $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ правая,

Теорема.

Смешанное произведение $\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]\overline{c}$
равно объему параллелепипеда,
построенного на приведенных
к общему началу векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$,
взятому со знаком плюс,
если тройка $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ правая,
и со знаком минус,
если тройка $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ левая.

Теорема.

Смешанное произведение $\left[\overline{a}\,\overline{b}\,\right]\overline{c}$
равно объему параллелепипеда,
построенного на приведенных
к общему началу векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$,
взятому со знаком плюс,
если тройка $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ правая,
и со знаком минус,
если тройка $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ левая.
Если же векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны,
то $\left[\overline{a}\,\overline{b}\,\right]\overline{c}$ равно нулю.



$\overline{c}$
$\overline{b}$
$\overline{a}$

<u>Следствия</u>.

1) Справедливо равенство $\left[\overline{a}\,\overline{b}\right]\overline{c} = \overline{a}\left[\,\overline{b}\overline{c}\,\right]$.
Это позволяет записывать смешанное произведение трёх векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ просто в виде $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ или $\left(\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right)$.

2) Необходимым и достаточным
условием компланарности трех векторов
является равенство нулю
их смешанного произведения.

3) Смешанное произведение трех векторов, два из которых коллинеарны, равно нулю.

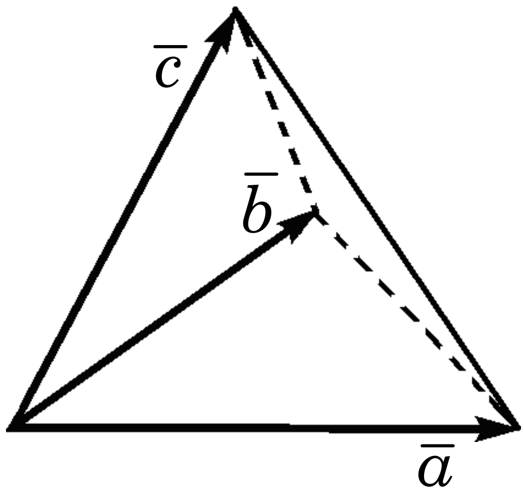
4) Свойство циклических перестановок.

$$\left(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right)=\left(\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a}\right)=\left(\overline{c}\,\overline{a}\,\overline{b}\right)=$$

$$=-\left(\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c}\right)=-\left(\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b}\right)=-\left(\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}\right)$$

5) Объём тетраэдра, построенного на приведенных к общему началу векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, равен:

$$V_{тетр.} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right)\right|$$



12. Векторное и смешанное произведения векторов в декартовых координатах.

1) Векторное произведение

$$\overline{a} = \{x_1, y_1, z_1\}; \quad \overline{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$$

1) **Векторное произведение**

$$\overline{a} = \{x_1, y_1, z_1\}; \quad \overline{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$$

$$\left[\overline{a}\,\overline{b}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

1) **Векторное произведение**

$$\overline{a} = \{x_1, y_1, z_1\}; \quad \overline{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$$

$$\left[\overline{a}\,\overline{b}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Следствие.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то их координаты пропорциональны:

1) <u>Векторное произведение</u>

$\overline{a} = \{x_1, y_1, z_1\}; \quad \overline{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$

$$\left[\overline{a}\,\overline{b}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

<u>Следствие</u>.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то их координаты пропорциональны:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

2) Смешанное произведение

$$\overline{a} = \{x_1, y_1, z_1\}; \quad \overline{b} = \{x_2, y_2, z_2\}; \quad \overline{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$$

2) Смешанное произведение

$$\overline{a} = \{x_1, y_1, z_1\}; \quad \overline{b} = \{x_2, y_2, z_2\}; \quad \overline{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$$

$$\left(\overline{a}\,\overline{b}\overline{c}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

<u>Следствие</u>.

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

12. Двойное векторное произведение.

Пусть даны
три произвольных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

Пусть даны
три произвольных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.
Если вектор $\overline{b}$ векторно умножается
на вектор $\overline{c}$,

Пусть даны

три произвольных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

Если вектор $\overline{b}$ векторно умножается

на вектор $\overline{c}$,

а вектор $\overline{a}$ также векторно умножается

на векторное произведение $\left[\overline{b}\overline{c}\right]$,

Пусть даны

три произвольных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

Если вектор $\overline{b}$ векторно умножается

на вектор $\overline{c}$,

а вектор $\overline{a}$ также векторно умножается

на векторное произведение $\left[\overline{b}\overline{c}\right]$,

то получающийся при этом вектор $\left[\overline{a}\left[\overline{b}\overline{c}\right]\right]$

Пусть даны
три произвольных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.
Если вектор $\overline{b}$ векторно умножается
на вектор $\overline{c}$,
а вектор $\overline{a}$ также векторно умножается
на векторное произведение $\left[\overline{b}\overline{c}\right]$,
то получающийся при этом вектор $\left[\overline{a}\left[\overline{b}\overline{c}\right]\right]$
называется
двойным векторным произведением.

Теорема

Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ справедлива формула

$$\left[\overline{a}\left[\overline{b}\overline{c}\right]\right]=\overline{b}\left(\overline{a}\overline{c}\right)-\overline{c}\left(\overline{a}\overline{b}\right)$$

Теорема

Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ справедлива формула

$$\left[\overline{a}\left[\overline{b}\overline{c}\right]\right]=\overline{b}\left(\overline{a}\overline{c}\right)-\overline{c}\left(\overline{a}\overline{b}\right)$$

То есть, имеем разность двух смешанных произведений:

<u>Теорема</u>

Для любых векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ справедлива формула

$$\left[\overline{a}\left[\overline{b}\overline{c}\right]\right] = \overline{b}\left(\overline{a}\overline{c}\right) - \overline{c}\left(\overline{a}\overline{b}\right)$$

То есть, имеем разность двух смешанных произведений:

«бац» минус «цаб»