Аналитическая геометрия

Лекция №5

Преобразование декартовых прямоугольных координат на плоскости

На плоскости π заданы две произвольные декартовы прямоугольные системы координат:

1) начало O, базисные векторы $\overline{i}$ и $\overline{j}$;

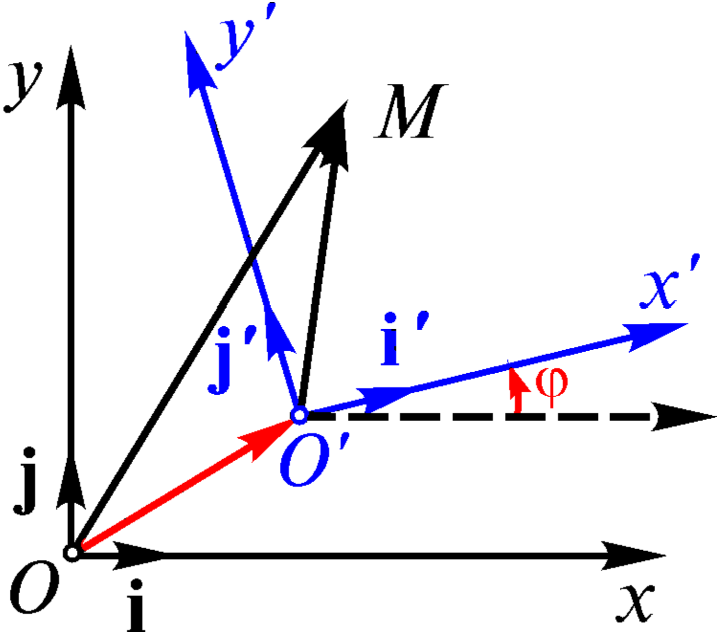
2) начало O', базисные векторы $\overline{i'}$ и $\overline{j'}$.

Задача:

выразить координаты x и y произвольной точки M плоскости π относительно ***первой*** системы координат через координаты x' и y' этой же точки M относительно ***второй*** системы координат.

То есть, найти функции f_1 и f_2 такие, что

$$x = f_1(x')$$
$$y = f_2(y')$$

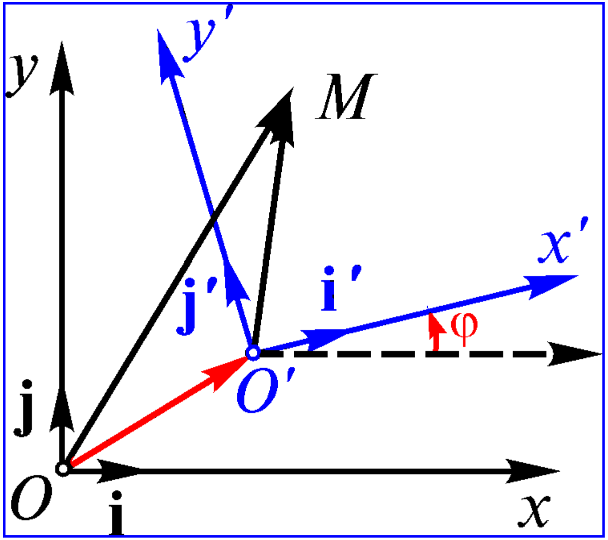


Координаты (x,y) и (x',y') совпадают с координатами векторов $\overline{OM}$ и $\overline{O'M}$ в их разложении по соответствующим базисам.

1) $\overline{OM} = x\overline{i} + y\overline{j};$

2) $\overline{O'M} = x'\overline{i'} + y'\overline{j'}.$

3) Пусть $\overline{OO'} = a\overline{i} + b\overline{j}$



4) Любой вектор на плоскости π можно разложить по базису $\overline{i}\ \overline{j}$:

$$\overline{i'} = \alpha_{11}\overline{i} + \alpha_{12}\overline{j} \qquad \overline{j}' = \alpha_{21}\overline{i} + \alpha_{22}\overline{j}$$

5) $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$

1) $\boxed{\overline{OM}} = x\overline{i} + y\overline{j}$;

2) $\boxed{\overline{O'M}} = x'\overline{i'} + y'\overline{j'}$.

3) Пусть $\boxed{\overline{OO'}} = a\overline{i} + b\overline{j}$

4) Любой вектор на плоскости π можно разложить по базису $\overline{i}\ \overline{j}$:

$$\boxed{\overline{i'} = \alpha_{11}\overline{i} + \alpha_{12}\overline{j} \qquad \overline{j}' = \alpha_{21}\overline{i} + \alpha_{22}\overline{j}}$$

1

2

5) $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$

Получим:

$$x\bar{i} + y\bar{j} = \left(a + \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y'\right)\bar{i} + \left(b + \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y'\right)\bar{j}$$

Откуда:

$$x = a + \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y'$$

$$y = b + \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y'$$

Вывод:

Для двух произвольных декартовых систем на плоскости π координаты любой точки плоскости π относительно ***первой*** системы являются ***линейными функциями*** координат той же точки относительно ***второй*** системы.

Геометрическая интерпретация полученных формул

1) Обозначим косинус угла между $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$\cos\left(\widehat{\overline{a}\overline{b}}\right)$$

2) Умножим $\overline{i'} = \alpha_{11}\overline{i} + \alpha_{12}\overline{j}$ и $\overline{j}' = \alpha_{21}\overline{i} + \alpha_{22}\overline{j}$

сначала на $\overline{i}$, а потом на $\overline{j}$.

3) Учтём, что

а) $\overline{i}\,\overline{i} = 1$, $\overline{j}\,\overline{j} = 1$, $\overline{i}\,\overline{j} = 0$.

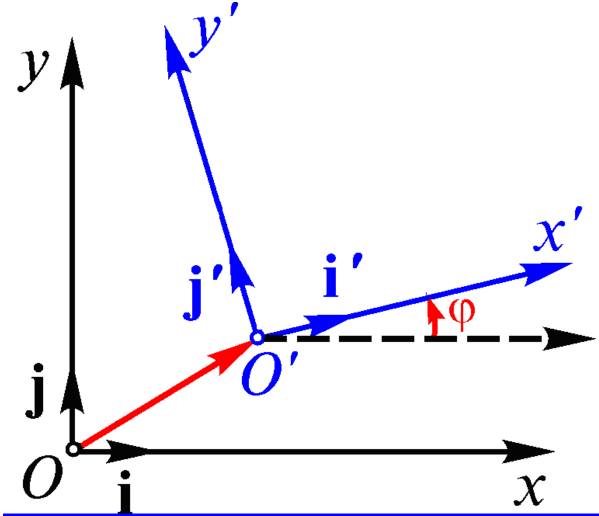
б) скалярное произведение двух ортов равно косинусу угла между ними.

Имеем:

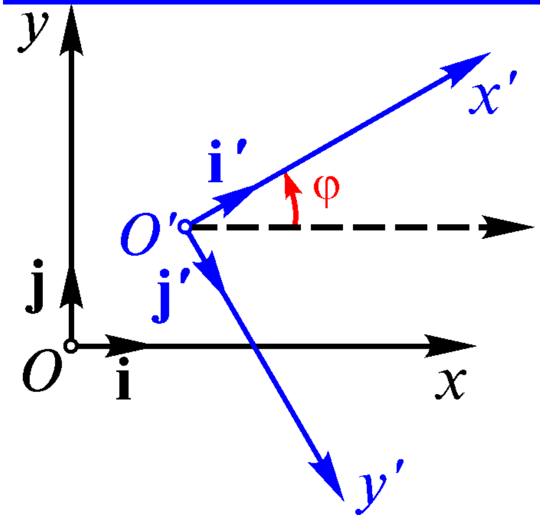
$$a_{11} = \cos\left(\widehat{\overline{i'}\,\overline{i}}\right) \quad a_{12} = \cos\left(\widehat{\overline{i'}\,\overline{j}}\right)$$

$$a_{21} = \cos\left(\widehat{\overline{j'}\,\overline{i}}\right) \quad a_{22} = \cos\left(\widehat{\overline{j'}\,\overline{j}}\right)$$

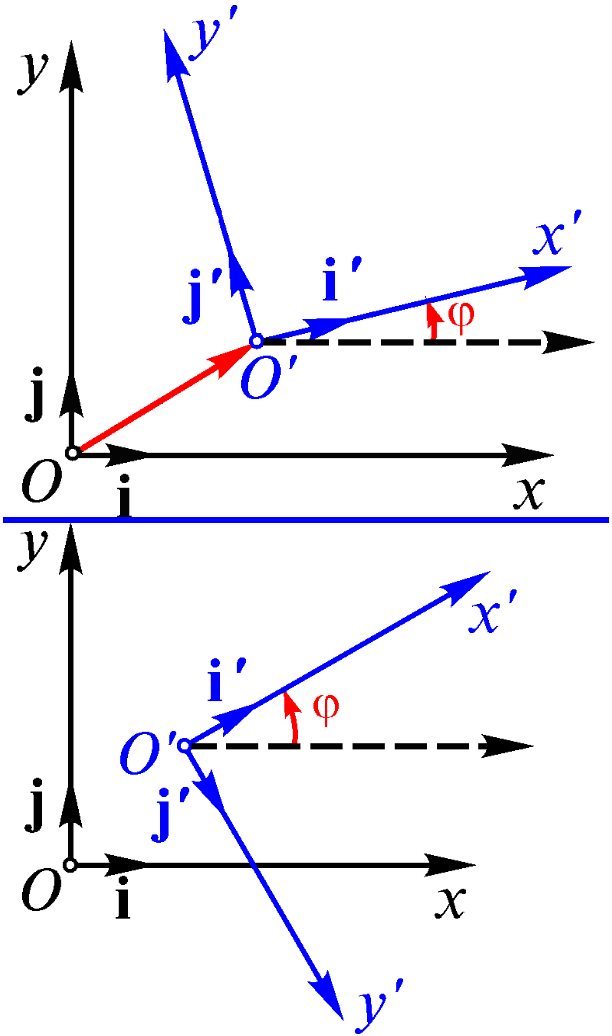
Будем существенно различать следующие два случая



Оба кратчайших поворота:
от $\bar{i}$ к $\bar{j}$ и от $\bar{i}'$ к $\bar{j}'$
совершаются в
<u>одном</u>
направлении

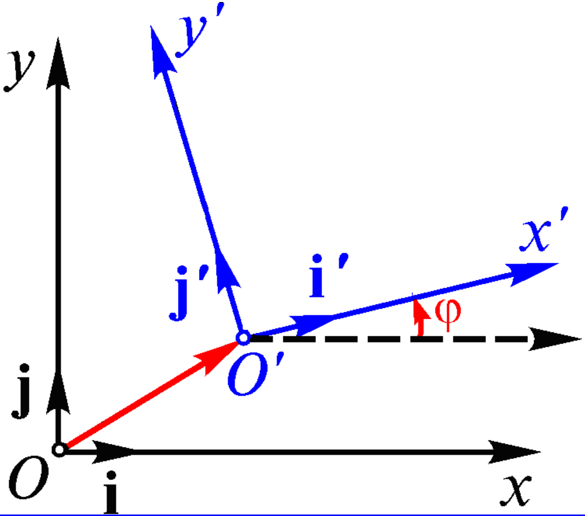


Кратчайшие повороты:
от $\bar{i}$ к $\bar{j}$ и от $\bar{i}'$ к $\bar{j}'$
совершаются в
<u>противоположных</u>
направлениях

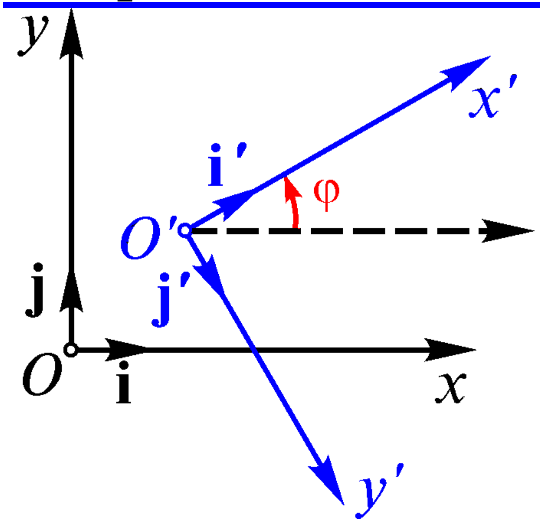


Обозначим через φ угол между базисными векторами $\bar{i}$ и $\bar{i}'$, отсчитываемый в направлении, отвечающем кратчайшему повороту от $\bar{i}$ к $\bar{j}$.

Тогда $a_{11} = \cos\varphi$.



Угол между $\overline{j}$ и $\overline{j'}$' $\to \varphi$.
Первая система координат совмещается со второй суперпозицией переноса на $\overline{OO'}$ и поворота вокруг начала координат на угол φ.



Угол между $\overline{j}$ и $\overline{j'}$' $\to (\pi - \varphi)$.
Первая система координат ***не*** совмещается со второй указанной суперпозицией, нужно ещё зеркальное отражение

Тогда получим следующие значения для коэффициентов α_{11}, α_{12}, α_{21} и α_{22}.

1-й случай:

$$a_{11} = \cos\varphi \qquad a_{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$$

$$a_{21} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi \qquad a_{22} = \cos\varphi$$

2-й случай:

$$a_{11} = \cos\varphi \qquad a_{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$$

$$a_{21} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi \qquad a_{22} = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$$

Таким образом, имеем формулы преобразования

для 1-го случая

$$x = a + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$$

$$y = b + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$$

для 2-го случая

$$x = a + x'\cos\varphi + y'\sin\varphi$$

$$y = b + x'\sin\varphi - y'\cos\varphi$$

Если рассматривать только правые системы координат, то 2-й случай будет исключён.

Обратное преобразование координат:

$$x' = (x-a)\cos\varphi + (y-b)\sin\varphi$$

$$y' = -(x-a)\sin\varphi + (y-b)\cos\varphi$$

Суперпозиция

Параллельный перенос:

$$x = a + x'$$
$$y = b + y'$$

Поворот:

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$$
$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

Матричная форма для поворота

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Аналитическая геометрия

Лекция №6

Уравнение линии на плоскости

1. Понятие об уравнении линии

На плоскости π заданы:
1) декартова прямоугольная система координат Oxy;
2) некоторая линия L.

Рассмотрим уравнение

$$\Phi(x,y) = 0$$

<u>Определение</u>.

Уравнение $\Phi(x,y) = 0$
называется уравнением линии L
(относительно заданной системы координат),
если этому уравнению
удовлетворяют координаты x и y
любой точки, лежащей на линии L,
и не удовлетворяют координаты x и y
ни одной точки, не лежащей на линии L.

Сама линия L представляет собой
(в заданной системе координат)
геометрическое место точек,
координаты которых
удовлетворяют уравнению $\Phi(x,y) = 0$.

Если (в заданной системе координат)
уравнение $\Phi(x,y) = 0$
является уравнением линии L,
то говорят,
что это уравнение определяет линию L.

Примеры:

1) $x^2 + y^2 = 0$

2) $x^2 + y^2 + 1 = 0$

3) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

4) $x^2 + y^2 = r^2$

2. Параметрическое представление линии

Бывает удобно выражать координаты x и y точек линии L при помощи третьей вспомогательной переменной (параметра) t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

Функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ предполагаются непрерывными по параметру t (в области $\{t\}$ изменения этого параметра).

Исключение параметра t не всегда возможно (целесообразно).

Параметрическое представление линии
естественно возникает,
если эту линию рассматривать как путь,
пройденный материальной точкой,
непрерывно движущейся
по определённому закону.

Примеры:

1) окружность

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$$

2) циклоида

$$\begin{cases} x = r\left(t - \sin t\right) \\ y = r\left(t - \cos t\right) \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} x = \left(R + r\right)\cos t - r\cos\dfrac{R + r}{r}t \\ y = \left(R + r\right)\sin t - r\sin\dfrac{R + r}{r}t \end{cases}$$ – эпициклоида

4) $$\begin{cases} x = \left(R - r\right)\cos t + r\cos\dfrac{R - r}{r}t \\ y = \left(R - r\right)\sin t - r\sin\dfrac{R - r}{r}t \end{cases}$$ – гипоциклоида

Замечание.

Часто линию L определяют
не уравнением $\Phi(x,y) = 0$,
а разрешенным относительно y
уравнением $y = f(x)$.

Это определение линии
представляет собой частный случай
параметрического определения линии L

$$\begin{cases} x = t \\ y = f\left(t\right) \end{cases}$$

3. Уравнение линии в различных системах координат

Вид уравнения линии L
зависит не только от вида самой линии L,
но и от выбора системы координат.

Уравнение линии меняется
как при переходе от
одной декартовой системы координат
к другой,
так и при переходе от декартовых
к каким-нибудь другим координатам.

Использование для определения
некоторых линий
недекартовых систем координат
связано с тем,
что уравнение линии при этом
имеет более простой вид.

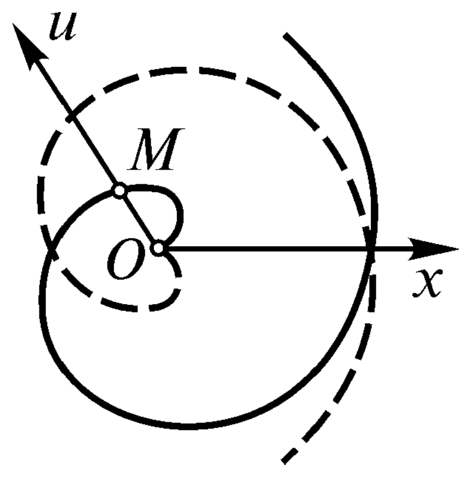
<u>Примеры</u>:

1) Линия L, определяемая в декартовой системе Oxy уравнением $\Phi(x,y) = 0$, в полярной системе будет определяться уравнением $\Phi_1(\rho,\varphi) = 0$, где

$$\Phi_1(\rho,\varphi) = \Phi(\rho\cdot\cos\varphi,\ \rho\cdot\sin\varphi)$$

2) Спираль Архимеда.

$$\rho = a\varphi$$



4. Классификация плоских линий

Классификацию плоских линий установим исходя из аналитического представления линий относительно ***декартовых прямоугольных систем координат***.

Определение 1

Линия называется алгебраической,
если в декартовой прямоугольной
системе координат
она определяется уравнением $\Phi(x,y) = 0$,
в котором функция $\Phi(x,y)$
представляет собой алгебраический полином,
т.е. сумму конечного числа слагаемых
вида $a_{kl}x^k y^l$,
где k и l – целые неотрицательные числа,
a_{kl} – некоторые постоянные.

Определение 2

Всякая неалгебраическая линия называется трансцендентной.

<u>Определение 3</u>

Алгебраическая линия
называется линией порядка n,
если в декартовой прямоугольной
системе координат
она определяется уравнением $\Phi(x,y) = 0$,
в котором функция $\Phi(x,y)$
представляет собой
алгебраический полином n-й степени.

Теорема

Если линия
в некоторой декартовой
прямоугольной системе координат
определяется алгебраическим уравнением
степени n,

Теорема

Если линия
в некоторой декартовой
прямоугольной системе координат
определяется алгебраическим уравнением
степени n,
то эта линия и в любой другой декартовой
прямоугольной системе координат
определяется
алгебраическим уравнением
той же степени n.

Замечание

Алгебраическая линия L – распадающаяся, если алгебраический полином $\Phi(x,y)$ степени $n > 2$ в левой части её уравнения распадается на произведение двух алгебраических полиномов степеней $k > 1$ и $(n-k) > 1$ соответственно:

$$\Phi_1(x,y) \cdot \Phi_2(x,y)$$

Аналитическая геометрия

Лекция №7

Прямая на плоскости

1. Общее уравнение прямой

На плоскости π задана прямая L
и декартова прямоугольная система Oxy,
тогда прямая L определяется в этой системе
уравнением первой степени.

На плоскости π задана
декартова прямоугольная система Oxy,
тогда всякое уравнение первой степени

$$Ax + By + C = 0 \qquad (*)$$

с двумя переменными x и y определяет
относительно этой системы прямую линию.

Уравнение $(*)$ в котором A, B, C одновременно не равны нулю – ***общее уравнение прямой***

Пусть т. $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит прямой L:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0 \qquad (**)$$

Вычтем $(**)$ из $(*)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (***)$$

Это выражение – скалярное произведение двух взаимно ортогональных векторов:

$\bar{n} = (A, B)$ и $\overline{M_0 M} = (x - x_0, y - y_0)$

Значит, прямая $(*)$ ортогональна к вектору $\bar{n} = (A, B)$ – ***нормальному вектору*** прямой $(*)$.

Итак, уравнение $(***)$ определяет прямую, проходящую через т. $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (A, B)$.

Раскроем в $(***)$ скобки:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0$

Тогда, сравнивая это выражение с $(*)$, имеем:

$$C = Ax_0 - By_0$$

Если два общих уравнения

$$Ax + By + C = 0$$

и

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

определяют одну и ту же прямую,
то найдется такое число t,
что справедливы равенства

$$A_1 = At,$$

$$B_1 = Bt,$$

$$C_1 = Ct.$$

2. Неполные уравнения прямой. Уравнение прямой в отрезках

Общее уравнение прямой $(*)$
называется полным,
если все его коэффициенты A, B и C
отличны от нуля.
Если хотя бы один из коэффициентов
равен нулю,
уравнение называется неполным.

Виды неполных уравнений.

Виды неполных уравнений.

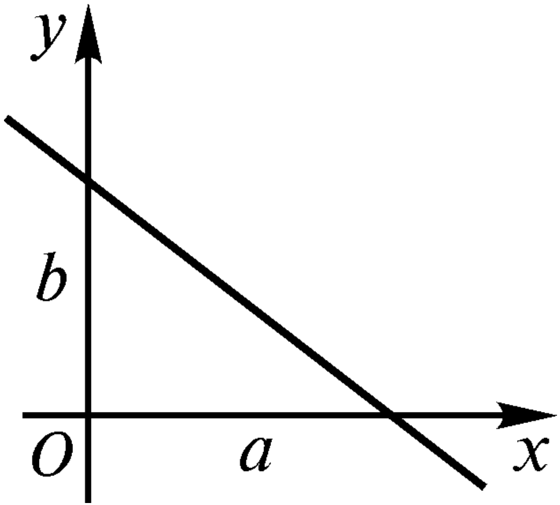
Коэф.	**Уравнение**	**Характеристика**
$\mathrm{C} = 0$	$Ax + By = 0$	Прямая проходит через начало координат
$\mathrm{B} = 0$	$Ax + C = 0$	Прямая, параллельная оси Оу
$\mathrm{A} = 0$	$By + C = 0$	Прямая, параллельная оси Ох
$\mathrm{B}=\mathrm{C}=0$	$Ax = 0$	Ось Оу
$\mathrm{A}=\mathrm{C}=0$	$By = 0$	Ось Ох

$$Ax + By + C = 0$$

$$Ax + By = -C$$

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$$

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$$



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$ – уравнение прямой в отрезках

$$\begin{cases} a = -C/A \\ b = -C/B \end{cases}$$

3. Каноническое уравнение прямой

Канонический – типовой, традиционный (от греческого $\kappa\alpha\nu\omega\nu$ – правило, предписание, образец)

Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, будем называть ***направляющим вектором*** этой прямой.

Задача

Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_1\left(x_1, y_1\right)$ и имеющей заданный направляющий вектор $\overline{q} = \left(l, m\right)$

Точка $M(x,y)$ лежит на данной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_1M}=(x-x_1,y-y_1)$ и $\overline{q}=(l,m)$ коллинеарны, т.е. тогда и только тогда, когда координаты этих векторов

пропорциональны: $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}$

канонической (симметричное) уравнение прямой

Может быть:
$l=0$ или $m=0$
Тогда
$x=x_1$ или $y=y_1$

Найдём уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Это значит, что прямая проходит через т. $M_1(x_1, y_1)$ параллельно вектору $\overline{q} = \overline{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Тогда имеем:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

4. Параметрические уравнения прямой

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = t$$

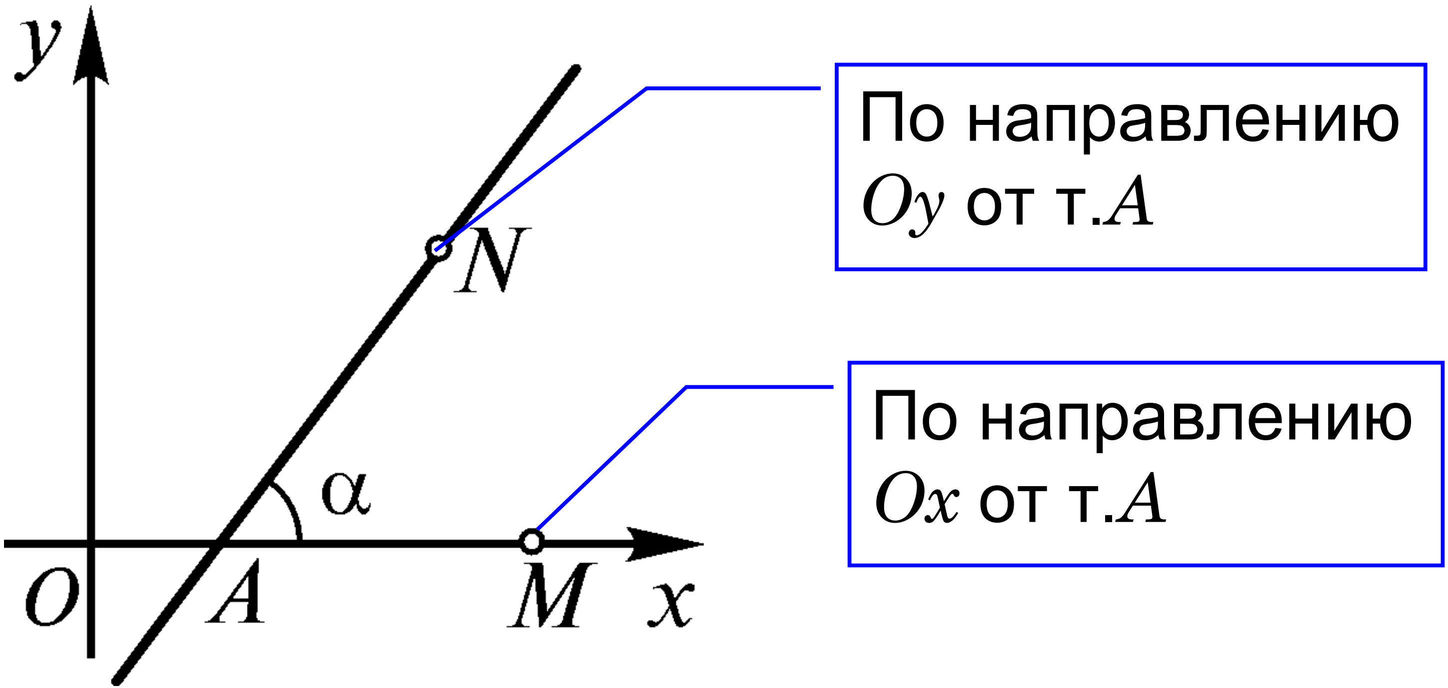
$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \end{cases}$$

Параметр *t* изменяется вдоль прямой и, как правило, величина размерная.

5. Прямая с угловым коэффициентом

Рассмотрим любую прямую, не параллельную оси Ox.

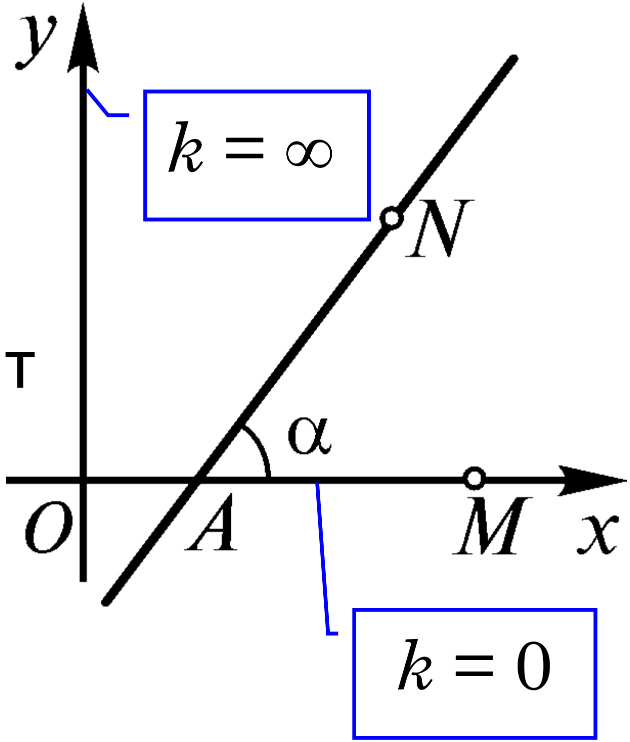
Введем понятие угла наклона этой прямой к оси Ox.



Угол $\alpha = \angle NAM$ –
угол наклона
данной прямой к оси Ox.

$\operatorname{tg} \alpha$ – угловой коэффициент
этой прямой:

$$k = \operatorname{tg} \alpha$$



Теорема.

Если прямая не параллельна оси Oy и имеет направляющий вектор $\overline{q} = \left(l, m\right)$, то угловой коэффициент этой прямой k равен $k = m/l$.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей заданный угловой коэффициент k:

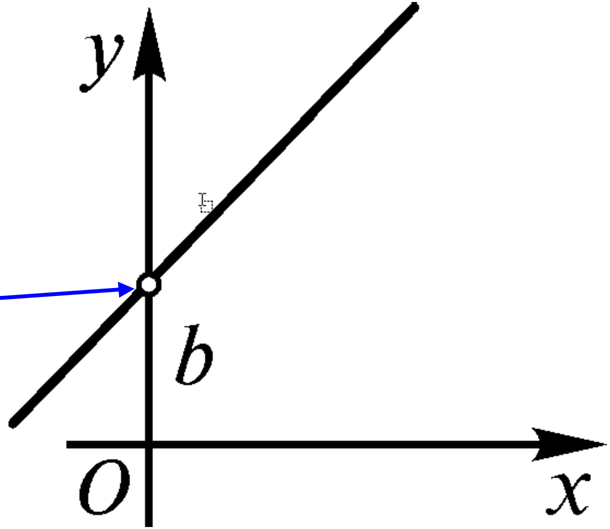
$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Пусть

$$b = y_1 - kx_1$$

Тогда

$$y = kx + b$$



Это уравнение прямой с угловым коэффициентом.

6. Угол между двумя прямыми.

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

I. Прямые заданы общими уравнениями:

$$Ax_1 + By_1 + C_1 = 0 \qquad (L_1)$$

$$Ax_2 + By_2 + C_2 = 0 \qquad (L_2)$$

Угол между прямыми L_1 и L_2

Их нормальные векторы:

$$\bar{n}_1 = \left(A_1, B_1\right)$$

$$\bar{n}_2 = \left(A_2, B_2\right)$$

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\overbrace{\boxed{A_1A_2 + B_1B_2}}^{\left(\bar{n}_1\bar{n}_2\right)}}{\underbrace{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}_{\left|\bar{n}_1\right|}\,\underbrace{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}_{\left|\bar{n}_2\right|}}$$

Условие параллельности прямых L_1 и L_2

Эквивалентно условию коллинеарности векторов $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2

$$\cos\varphi = 0 \quad \equiv \quad \left(\bar{n}_1 \bar{n}_2\right) = 0 \quad \equiv \quad A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$$

II. Прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} \qquad (L_1)$$

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} \qquad (L_2)$$

Угол между прямыми L_1 и L_2

Их направляющие векторы:

$$\bar{n}_1 = (l_1, m_1)$$

$$\bar{n}_2 = (l_2, m_2)$$

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\overset{(\bar{n}_1\bar{n}_2)}{\boxed{l_1 l_2 + m_1 m_2}}}{\underbrace{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}}_{|\bar{n}_1|}\,\underbrace{\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}_{|\bar{n}_2|}}$$

Условие параллельности прямых L_1 и L_2

Эквивалентно условию коллинеарности векторов $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2

$$\cos\varphi = 0 \quad \equiv \quad \left(\overline{n}_1 \overline{n}_2\right) = 0 \quad \equiv \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0$$

III. Прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом:

$$y = k_1 x + b_1 \qquad (L_1)$$

$$y = k_2 x + b_2 \qquad (L_2)$$

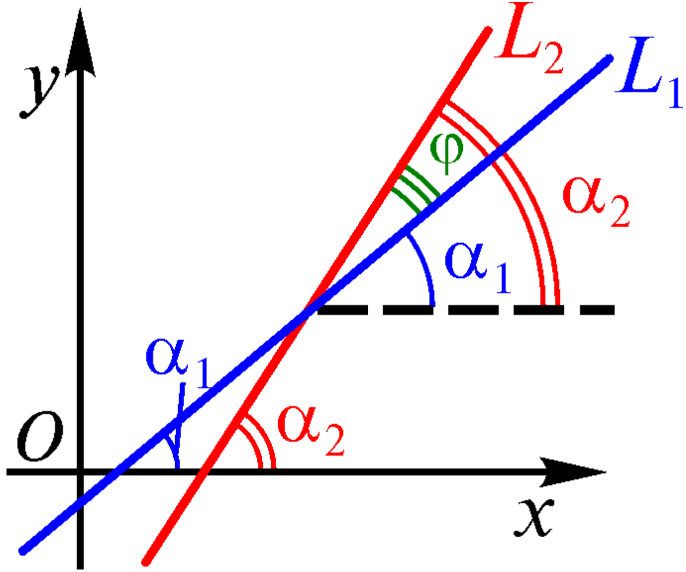
Угол между прямыми L_1 и L_2

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$



При замене $k_2 \leftrightarrow k_1$ получим угол $\pi - \varphi$.

Условие параллельности прямых L_1 и L_2

$$\operatorname{tg}\varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = k_2$$

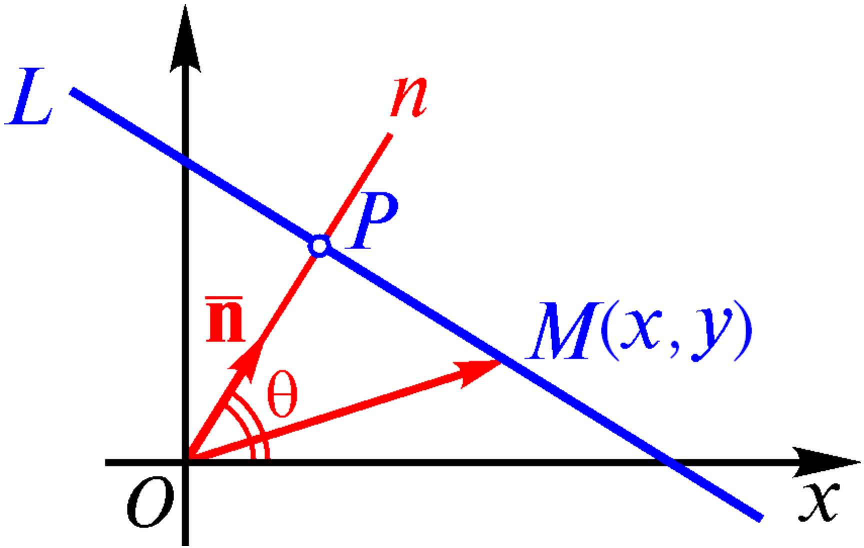
Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2

$$\operatorname{tg}\varphi \to \infty \quad \Rightarrow \quad 1 + k_1 \cdot k_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

7. Нормированное уравнение прямой.

Отклонение точки от прямой

I. Нормированное уравнение прямой



$n \perp L$

$\overline{n}$ – орт

$\overline{n} \uparrow\uparrow \overline{OP}$

$\overline{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$

$p = \overline{OP}$

Найти $L(p, \theta)$

Имеем:

$$p = \left|\overline{OP}\right| = np_n \overline{OM} = \overline{n} \cdot \overline{OM} = x\cos\theta + y\sin\theta$$

Тогда получаем: $\boxed{x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0}$

II. Отклонение точки от прямой

Пусть

d – расстояние от точки M до прямой L;

δ – отклонение (ориентированное расстояние) точки M от прямой L

Определение

Назовем отклонением δ точки M от прямой L число $+d$ в случае,

когда точка M и начало координат O лежат по ***разные*** стороны от прямой L,

и число $-d$ в случае,

когда M и O лежат по ***одну*** сторону от L.

Если же $O \in L$, то положим

$\delta = +d$ когда M лежит по ту сторону от L, куда направлен $\overline{n}$,

и $\delta = -d$ в противном случае.

Теорема

Левая часть
нормированного уравнения прямой
равна отклонению точки M
с координатами x_0, y_0
от прямой L,
определяемой этим уравнением:

$$\delta = x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta - p$$

III. Приведение общего уравнения прямой к нормированному виду

Уравнения

$$Ax + By + C = 0 \text{ и } x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$$

определяют одну и ту же прямую.

Значит, найдётся такое t, что

$$tA = \cos\theta, \quad tB = \sin\theta, \quad tC = -p$$

Откуда:

$$t = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Выберем знак. Поскольку $p \geq 0$, то

$$\operatorname{sign} p = -\operatorname{sign} C$$

Тогда получим уравнение прямой в нормальной форме:

$$\frac{Ax + By + C}{\operatorname{sign}\left(-C\right) \cdot \sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

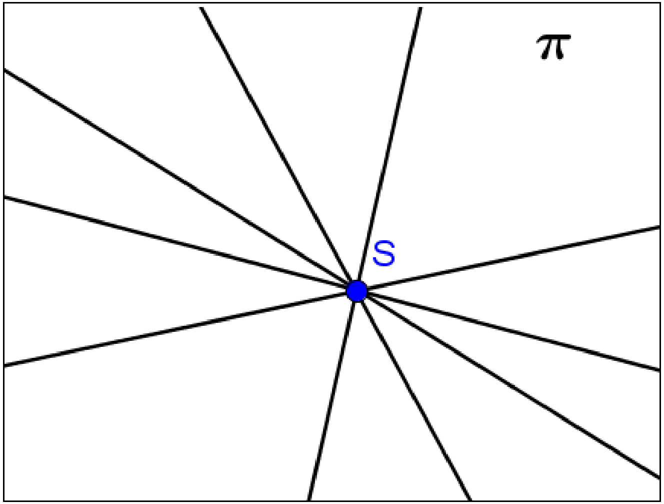
Отсюда:

$$\delta = \pm \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

и

$$d = \frac{\left|Ax + By + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

8. Уравнение пучка прямых



Центр S пучка прямых определяется заданием двух различных его прямых:

$$\alpha\left(A1x + B_1 y + C_1\right) + \beta\left(A_2 x + B_2 y + C_2\right) = 0$$

либо

$$A_1 x + B_1 y + C_1 + \lambda\left(A_2 x + B_2 y + C_2\right) = 0$$

9. Некоторые задачи на прямую линию на плоскости

Задача 1

Найти прямую,
проходящую через данную точку $M_1\left(x_1, y_1\right)$
и составляющую заданный угол φ
с данной прямой $y = k_1 x + b_1$.

Решение

Ищем прямую в виде

$$y - y_1 = k\left(x - x_1\right)$$

т.к. искомая прямая проходит через т. $M_1\left(x_1, y_1\right)$.

Осталось найти k.

Известно, что

$$\pm \operatorname{tg} \varphi = \frac{k - k_1}{1 + k k_1}$$

Откуда

$$k = \frac{k_1 \pm \operatorname{tg} \varphi}{1 \mp k_1 \operatorname{tg} \varphi}$$

Если $1 \mp k_1 \operatorname{tg} \varphi = 0$, то $x = x_1$.

<u>Ответ</u>

1) $y - y_1 = \dfrac{k_1 + \operatorname{tg}\varphi}{1 - k_1 \operatorname{tg}\varphi}(x - x_1)$ и

$$y - y_1 = \frac{k_1 - \operatorname{tg}\varphi}{1 + k_1 \operatorname{tg}\varphi}(x - x_1)$$

при $k_1 \operatorname{tg}\varphi \neq \pm 1$

2) $y - y_1 = \dfrac{k_1 + \operatorname{tg}\varphi}{2}(x - x_1)$ и $x = x_1$

при $k_1 \operatorname{tg}\varphi = -1$

3) $x = x_1$ и $y - y_1 = \dfrac{k_1 - \operatorname{tg}\varphi}{2}(x - x_1)$

при $k_1 \operatorname{tg}\varphi = 1$

Задача 2

Найти биссектрисы углов, образованных данными прямыми.

Решение

Запишем уравнения прямых
в нормированном виде:

$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ и $x\cos\theta_1 + y\sin\theta_1 - p_1 = 0$

Их левые части равны отклонениям δ_1 и δ_2 точки $M(x, y)$ биссектрисы от первой и второй прямых.

На одной биссектрисе $|\delta_1| = |\delta_2|$ и $\operatorname{sign}\delta_1 = \operatorname{sign}\delta_2$

На другой – $|\delta_1| = |\delta_2|$ и $\operatorname{sign}\delta_1 = -\operatorname{sign}\delta_2$.

тогда имеем

Ответ

$$\left(x\cos\theta + y\sin\theta - p\right) - \left(x\cos\theta_1 + y\sin\theta_1 - p_1\right) = 0$$

и

$$\left(x\cos\theta + y\sin\theta - p\right) + \left(x\cos\theta_1 + y\sin\theta_1 - p_1\right) = 0$$

Задача 3

Найти условия,
при которых данная прямая
пересекает данный отрезок AB.

Решение

Запишем уравнение прямой
в нормированном виде:

$$x \cos\theta + y \sin\theta - p = 0$$

Подставим в его левую часть
координаты точек A и B
и найдем их отклонения δ_1 и δ_2
от данной прямой.

Чтобы прямая пересекала отрезок AB,
необходимо и достаточно, чтобы точки A и B
лежали по разные стороны от неё, т.е.

$$\boxed{\operatorname{sign}\delta_1 = -\operatorname{sign}\delta_2}$$

Задача 4

Определить местоположение данной точки M и начала координат O относительно углов, образованных двумя данными прямыми.

Решение

Запишем уравнения прямых в нормированном виде
и вычислим отклонения δ_1 и δ_2 точки М
от заданных прямых.

Тогда имеем

Ответ

Соотношение δ_1 и δ_2	**Местонахождение M и O**
$\operatorname{sign}\delta_1 = \operatorname{sign}\delta_2 = -1$	в одном углу
$\operatorname{sign}\delta_1 = \operatorname{sign}\delta_2 = +1$	в вертикальных углах
$\operatorname{sign}\delta_1 = -\operatorname{sign}\delta_2$	в смежных углах

Задача 5

Найти условие пересечения трёх прямых в одной точке.

Решение

Имеем три прямых

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

Чтобы любые две из них пересекались, необходимо, чтобы хотя бы один из определителей

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \qquad (*)$$

был отличен от нуля.

Пусть пересекаются первые две прямые. Тогда третья прямая принадлежит пучку

$$\alpha\left(A_1x + B_1y + C_1\right) + \beta\left(A_2x + B_2y + C_2\right) = 0$$

Значит

$$\begin{aligned} \alpha A_1 + \beta A_2 &= -\gamma A_3 \\ \alpha B_1 + \beta B_2 &= -\gamma B_3 \\ \alpha C_1 + \beta C_2 &= -\gamma C_3 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 &= 0 \\ \alpha B_1 + \beta B_2 + \gamma B_3 &= 0 \\ \alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3 &= 0 \end{aligned}$$

Тогда, чтобы система имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (**)$$

Ответ

Чтобы три прямые, определяемые общими уравнениями, пересекались в одной и только в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $(**)$, и хотя бы один из определителей $(*)$ был отличен от 0.

Задача 6

Найти прямую,
проходящую через точку пересечения двух данных прямых
$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$
и удовлетворяющую ещё одному условию:

а) отсекающей на осях равные отрезки;

б) параллельной заданной прямой

$$A_3x + B_3y + C_3 = 0\ ;$$

в) перпендикулярной заданной прямой

$$A_3x + B_3y + C_3 = 0\ .$$

Подсказка к решению

Искомая прямая принадлежит пучку

$$\alpha\left(A_1x+B_1y+C_1\right)+\beta\left(A_2x+B_2y+C_2\right)=0$$

Отношение α / β
ищем из дополнительного условия.

Подготовительное преобразование:

$$\left(\alpha A_1+\beta A_2\right)x+\left(\alpha B_1+\beta B_2\right)y+\alpha C_1+\beta C_2=0$$

а) на осях отсекаются равные отрезки.

$$\left|\alpha A_1 + \beta A_2\right| = \left|\alpha B_1 + \beta B_2\right|$$

б) параллельность заданной прямой.

$$\frac{\alpha A_1 + \beta A_2}{A_3} = \frac{\alpha B_1 + \beta B_2}{B_3}$$

в) перпендикулярность заданной прямой.

$$\left(\alpha A_1 + \beta A_2\right) A_3 + \left(\alpha B_1 + \beta B_2\right) B_3 = 0$$