Аналитическая геометрия

Лекция №8

Уравнение поверхности и уравнения линии в пространстве

1. Понятие об уравнении поверхности

Заданы:
1) декартова прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве.
2) некоторая поверхность S.

Рассмотрим уравнение:

$$\Phi(x,y,z) = 0$$

Определение.

Уравнение $\Phi(x,y,z) = 0$
называется уравнением поверхности S
(относительно заданной системы координат),
если ему удовлетворяют
координаты x, y и z любой точки,
лежащей на поверхности S,
и не удовлетворяют
координаты x, y и z ни одной точки,
не лежащей на поверхности S.

Сама поверхность S представляет собой (в заданной системе координат) ***геометрическое место точек***, координаты которых удовлетворяют уравнению $\Phi(x,y,z) = 0$.

Сама поверхность S представляет собой (в заданной системе координат) ***геометрическое место точек***, координаты которых удовлетворяют уравнению $\Phi(x,y,z)=0$.

Если (в заданной системе координат) уравнение $\Phi(x,y,z)=0$ является уравнением поверхности S, то говорят, что это уравнение определяет поверхность S.

Примеры:

1) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

2) $x^2+y^2+z^2=r^2$

3) $r=R$ (в координатах r, φ, θ)

Алгебраическая поверхность – это поверхность,
которая в прямоугольной декартовой системе координат
задаётся уравнением $\Phi(x,y,z) = 0$,
где Φ – алгебраический многочлен трёх переменных x, y, z.
Степень этого многочлена называется ***порядком*** поверхности.

Всякая не алгебраическая поверхность называется трансцендентной.

2. Уравнения линии в пространстве

Линия в пространстве –
пересечение двух поверхностей,
т.е. геометрическое место точек,
находящихся одновременно
на двух поверхностях.

Если $\Phi_1(x,y,z) = 0$ и $\Phi_2(x,y,z) = 0$ – уравнения двух поверхностей, пересечением которых есть линия L, то:

1) координаты любой точки на линии L удовлетворяют обоим уравнениям;
2) обоим уравнениям не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на линии L.

о есть, два уравнения
$\Phi_1(x,y,z) = 0$ и $\Phi_2(x,y,z) = 0$

<u>совместно</u>

определяют линию L,
т.е. являются уравнениями этой линии.

Вместо $\Phi_1(x,y,z) = 0$ и $\Phi_2(x,y,z) = 0$ можно взять любую пару поверхностей, пересекающихся по той же линии L.

То есть, вместо системы

$$\Phi_1(x,y,z) = 0 \text{ и } \Phi_2(x,y,z) = 0$$

можно взять любую эквивалентную систему.

3. Параметрические уравнения линии и поверхности в пространстве

Координаты x, y и z
любой точки данной линии
могут быть заданы
как три непрерывные функции
некоторого параметра t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

Это определение линии в пространстве эквивалентно её определению в виде пересечения двух поверхностей.

Пусть $\chi(t)$

допускает обратную функцию: $t = \chi^{-1}(z)$.

Тогда имеем две поверхности

$x = \varphi\left[\chi^{-1}(z)\right]$ и $y = \psi\left[\chi^{-1}(z)\right]$

пересечением которых служит данная линия.

4. Различные виды уравнения плоскости

1. Общее уравнение плоскости

Определения

1. В пространстве заданы плоскость π
и декартова прямоугольная система $Oxyz$.
Тогда плоскость π определяется
в этой системе уравнением первой степени.

2. В пространстве заданы декартова
прямоугольная система $Oxyz$.
Тогда всякое уравнение первой степени
с тремя переменными x, y и z определяет
относительно этой системы плоскость.

Уравнение плоскости, проходящей через т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (A, B, C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Нормальный вектор плоскости

Общее уравнение плоскости

2. Неполные уравнения плоскости.

Коэф.	Уравнение	Как проходит плоскость
$D=0$	$Ax+By+Cz=0$	через начало координат
$A=0$	$By+Cz+D=0$	параллельно Ox
$B=0$	$Ax+Cz+D=0$	параллельно Oy
$C=0$	$Ax+By+D=0$	параллельно Oz

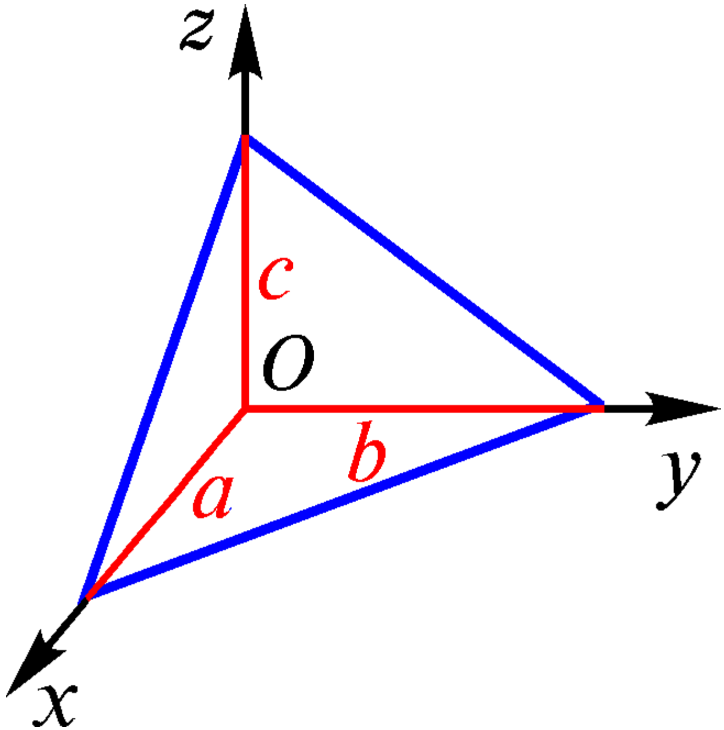
Коэф.	Уравнение	Как проходит плоскость
$A=0$ $B=0$ $D=0$	$Cz=0$	плоскость Oxy
$A=0$ $C=0$ $D=0$	$By=0$	плоскость Oxz
$B=0$ $C=0$ $D=0$	$Ax=0$	плоскость Oxz

3. Уравнение плоскости в отрезках

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



4. Угол между двумя плоскостями

Даны две плоскости π_1 и π_2:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Угол между ними равен углу между векторами $\overline{n}_1 = \left(A_1, B_1, C_1\right)$ и $\overline{n}_2 = \left(A_2, B_2, C_2\right)$:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

5. Условия

параллельности

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

и перпендикулярности

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

плоскостей

6. Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки, не лежащие на одной прямой.

Имеем три точки:

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Векторы $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ не коллинеарны.

Точка M лежит в одной плоскости с точками M_1, M_2, M_3 только, если векторы $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ и $\overline{M_1M}$ компланарны. Значит, их смешанное произведение равно нулю.

$$\left(\overline{M_1M_2}\ \overline{M_1M_3}\ \overline{M_1M}\right) = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

7. Нормированное уравнение плоскости. Отклонение точки от плоскости

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

Определение.

Отклонение δ точки M от плоскости π есть:

- ✓ число $+d$, когда
  точка M и начало координат O
  лежат по разные стороны от плоскости π;
- ✓ число $-d$, когда
  когда M и O лежат по одну сторону от π.

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

8. Пучки и связки плоскостей

Пучок плоскостей (с центром в L) – совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую L:

$$\alpha\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + \beta\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0$$

Связка плоскостей (с центром в M_0) – совокупность всех плоскостей, проходящих через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где A, B, C – любые числа.

4. Прямая линия
в пространстве

1. Канонические уравнения прямой в пространстве.

Уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и имеющей направляющий вектор $\overline{q} = \left(l, m, n\right)$.

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

2. Уравнения прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

3. Параметрические уравнения прямой в пространстве

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = t$$

$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \\ z = z_1 + nt \end{cases}$$

4. Угол между прямыми в пространстве.

Пусть прямые заданы каноническими уравнениям:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

Их направляющие векторы:

$$\overline{q}_1=\left(l_1,m_1,n_1\right) \text{ и } \overline{q}_2=\left(l_2,m_2,n_2\right)$$

Тогда:

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

Условия параллельности прямых

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

и перпендикулярности прямых

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

5. Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

Даны две прямые:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

Необходимо и достаточно, чтобы три вектора:

$$\overline{M_1M_2}=\left(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\right),$$

$$\bar{q}_1=\left(l_1,m_1,n_1\right) \text{ и } \bar{q}_2=\left(l_2,m_2,n_2\right)$$

были компланарны.

Тогда

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Если при этом будет нарушена одна из пропорций $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$, то эти прямые не только будут лежать в одной плоскости, они будут ещё и пересекаться.

6. Угол между

прямой $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$

и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$

вычисляется по формуле:

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

Используется синус т.к. искомый угол – дополнительный к углу
между направляющим вектором прямой
и нормальным вектором плоскости.

Условие параллельности прямой и плоскости

$$Al + Bm + Cn = 0$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$$

7. Условия принадлежности

прямой $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$

плоскости $Ax+By+Cz+D=0$:

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \\ Al+Bm+Cn=0 \end{cases}$$

8. Связка прямых

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

где l, m, n – любые числа.

5. Некоторые задачи на прямую и плоскость в пространстве

<u>Задача 1</u>

Найти условие пересечения трёх плоскостей в одной и только в одной точке.

Решение

Чтобы три плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

пересекались в одной и только в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Задача 2

Найти биссектральные плоскости двугранного угла,
образованного двумя данными плоскостями.

Решение

Представим уравнения заданных плоскостей в нормированном виде:

$$x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_1 = 0$$

$$x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 - p_2 = 0$$

Их левые части равны отклонениям δ_1 и δ_2 точки $M(x,y,z)$ от первой и от второй плоскостей соответственно.

Для одной биссектральной плоскости: $\delta_1 = \delta_2$

Для другой: $\delta_1 = -\delta_2$

Тогда имеем уравнения искомых плоскостей:

$$\left(x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_1\right) -$$
$$-\left(x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 - p_2\right) = 0$$

и

$$\left(x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_1\right) +$$
$$+\left(x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 - p_2\right) = 0$$

Задача 3

Найти условия, при которых данная плоскость пересекает данный отрезок AB.

Решение

Представим уравнение плоскости в нормированном виде:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

$\boxed{A(x_a, y_a, z_a)}$

Подставим координаты точек

$\boxed{B(x_b, y_b, z_b)}$

$\boxed{\delta_1}$

Найдём

$\boxed{\delta_2}$

Ответ: $\operatorname{sign}\delta_1 = -\operatorname{sign}\delta_2$

<u>Задача 4</u>

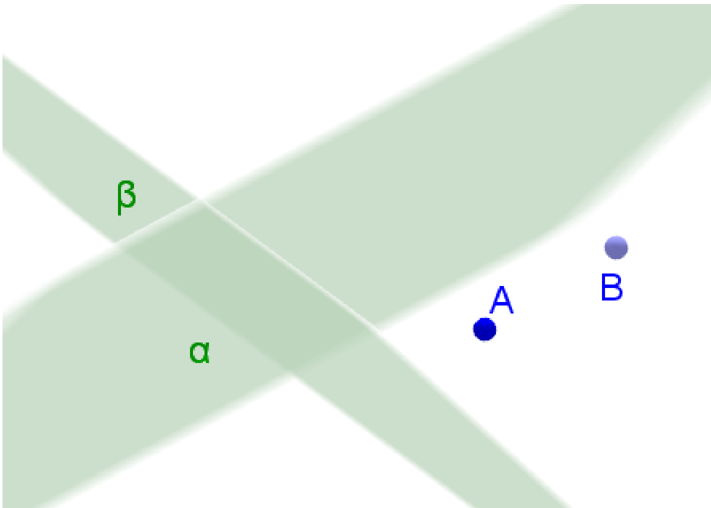
Определить местоположение данных точек A и B относительно двугранных углов, образованных данными плоскостями α и β.

Решение

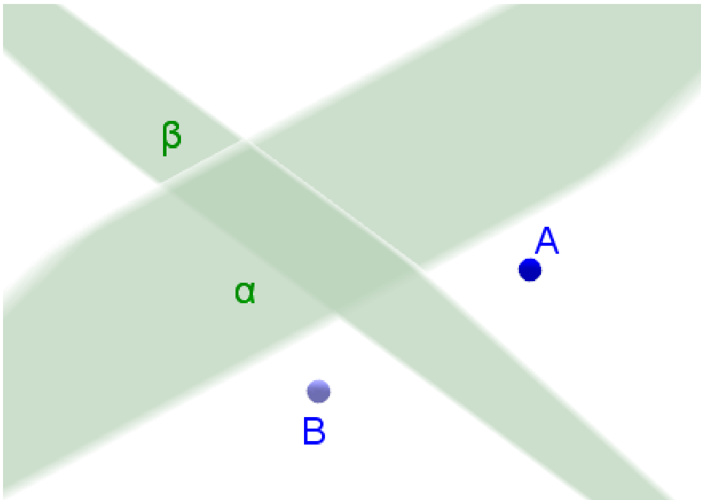
Найдём отклонения $\delta_{A\alpha}$, $\delta_{A\beta}$, $\delta_{B\alpha}$, $\delta_{B\beta}$.

Тогда точки лежат:

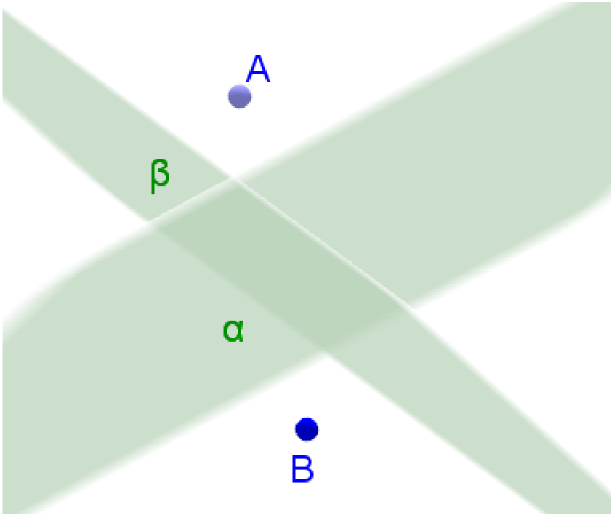
$$\begin{cases} \operatorname{sign}\delta_{A\alpha} = \operatorname{sign}\delta_{B\alpha} \\ \operatorname{sign}\delta_{A\beta} = \operatorname{sign}\delta_{B\beta} \end{cases}$$ – в одном углу;



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\operatorname{sign}\delta_{A\alpha} = -\operatorname{sign}\delta_{B\alpha}\\ \operatorname{sign}\delta_{A\beta} = \operatorname{sign}\delta_{B\beta}\end{cases}\\ \begin{cases}\operatorname{sign}\delta_{A\alpha} = \operatorname{sign}\delta_{B\alpha}\\ \operatorname{sign}\delta_{A\beta} = -\operatorname{sign}\delta_{B\beta}\end{cases}\end{array}\right.$$ – в смежных углах;



$$\begin{cases} \operatorname{sign}\delta_{A\alpha} = -\operatorname{sign}\delta_{B\alpha} \\ \operatorname{sign}\delta_{A\beta} = -\operatorname{sign}\delta_{B\beta} \end{cases}$$ – в вертикальных углах.



Задача 5

Найти уравнения прямой,
проходящей через данную точку $M(x_1, y_1, z_1)$
и перпендикулярной
данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Решение

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}$$

потому что нормальный вектор плоскости

$$\overline{n} = \left(A, B, C\right)$$

служит направляющим вектором искомой прямой.

Задача 6

Найти уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной данной плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$.

Решение

$$A_1\left(x-x_0\right)+B_1\left(y-y_0\right)+C_1\left(z-z_0\right)=0$$

потому что искомая плоскость принадлежит связке плоскостей и имеет тот же нормальный вектор $\bar{n}=\left(A_1,B_1,C_1\right)$, что и заданная плоскость.

Задача 7

Найти уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярной заданной прямой

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

Решение

$$l\left(x-x_0\right)+m\left(y-y_0\right)+n\left(z-z_0\right)=0$$

потому что искомая плоскость принадлежит связке плоскостей и имеет нормальный вектор равный направляющему вектору заданной прямой $\overline{q}=\left(l,m,n\right)$.

<u>Задача 8</u>

Найти уравнение плоскости, проходящей через данную прямую

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

и через заданную ***<u>не</u>*** лежащую на этой прямой точку $M(x_0, y_0, z_0)$.

Решение

Искомая плоскость принадлежит связке плоскостей

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0$$

Используем условия принадлежности прямой к плоскости:

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \\ Al+Bm+Cn=0 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} A\left(x_1-x_0\right)+B\left(y_1-y_0\right)+C\left(z_1-z_0\right)=0 \\ Al+Bm+Cn=0 \end{cases} \qquad (*)$$

Точка $M(x_0,y_0,z_0)$ не лежит на данной прямой.

Значит, нарушается хотя бы одна из пропорций

$$\frac{x_1 - x_0}{l} = \frac{y_1 - y_0}{m} = \frac{z_1 - z_0}{n}$$

Тогда A, B, C можно определить из $(*)$ задав произвольно один коэффициент.

Задача 9

Найти уравнение плоскости, проходящей через данную прямую

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

и параллельной другой данной прямой

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

Решение

Используя условия принадлежности прямой к плоскости, получим

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Al_1 + Bm_1 + Cn_1 = 0 \end{cases}$$

Условие параллельности плоскости и второй данной прямой даёт

$$Al_2 + Bm_2 + Cn_2 = 0$$

Тогда из полученой системы 3-х уравнений можно определить A, B, C, D
задав один коэффициент произвольно.

Задача 10

Найти уравнение плоскости, проходящей через заданную прямую L_1 и перпендикулярной заданной плоскости π.

Решение

Задача сводится к предыдущим:

1) Через точку прямой L_1 проведём прямую L_2, перпендикулярную плоскости π (задача 5).

2) Через прямую L_1 проведем плоскость, параллельную прямой L_2 (задача 9).

Задача 11

Найти уравнения перпендикуляра L_2, опущенного из заданной точки M_0 на данную прямую L_1.

Решение

Задача сводится к предыдущим.

Находим 2 плоскости, проходящих через:
1) точку M_0 и прямую L_1 (задача 8).
2) точку M_0 и перпендикулярную к прямой L_1 (задача 7).

Искомый перпендикуляр L_2 есть линия пересечения этих плоскостей.

Задача 12

Найти расстояние от точки M_0 до прямой L_1.

Решение

У нас есть уравнения перпендикуляра L_2, опущенного из точки M_0 на прямую L_1 (задача 11).

Решим совместно уравнения прямых L_1 и L_2. Это даст точку M_1 основания перпендикуляра.

Искомое расстояние есть длина отрезка $\overline{M_0 M_1}$.

Задача 13

Найти общий перпендикуляр
к двум скрещивающимся прямым L_1 и L_2.

Решение

1) Проведем плоскость π_0 через прямую L_1 параллельно прямой L_2 (задача 9).

2) Проведем через прямые L_1 и L_2 плоскости π_1 и π_2 перпендикулярно π_0 (задача 10).

3) Искомый перпендикуляр есть линия пересечения плоскостей π_1 и π_2.

Задача 14

Найти кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми L_1 и L_2.

Решение

1) Построим плоскость π_0 через прямую L_1 параллельно прямой L_2 (задача 9).

2) Найдём расстояние от любой точки прямой L_2 до плоскости π_0.