Аналитическая геометрия

Лекция №9

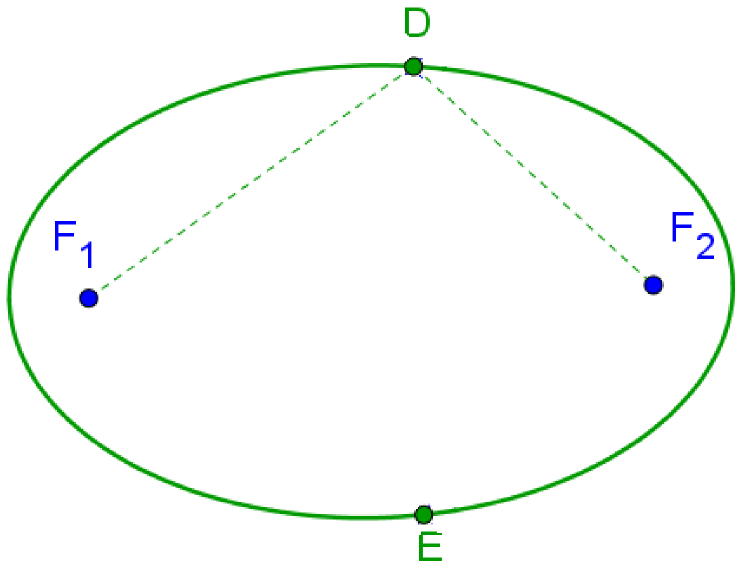
Линии второго порядка

1. Конические сечения (ко́ники)

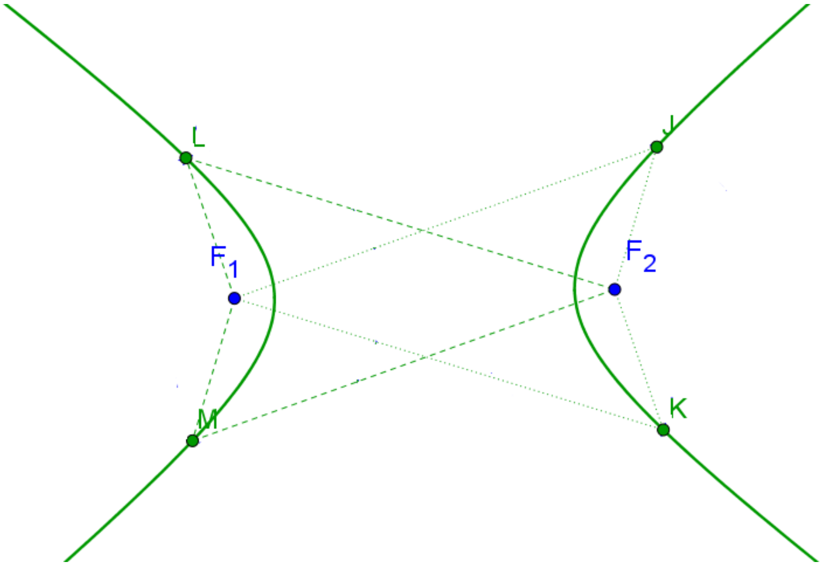
1. Окружность
2. Эллипс
3. Парабола
4. Гипербола
5. Точка
6. Совпадающие прямые
7. Пересекающиеся прямые

2. Канонические уравнения эллипса и гиперболы

Эллипс –
геометрическое место точек плоскости,
для которых ***сумма*** расстояний
до двух фиксированных точек F_1 и F_2
этой плоскости, называемых фокусами,
есть величина постоянная.



Гипербола –
геометрическое место точек плоскости,
для которых модуль ***разности*** расстояний
до двух фиксированных точек F_1 и F_2
этой плоскости, называемых фокусами,
есть величина постоянная



Эллипс	Гипербола
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
$r_1+r_2=2a$	$\lvert r_1-r_2\rvert=2a$
$F_1F_2=2c$ $e=c/a$ – эксцентриситет	
$a>c$ $e<1$	$c>a$ $e>1$
$b^2=a^2-c^2$	$b^2=c^2-a^2$
a – большая полуось b – малая полуось	a – действительная полуось b – мнимая полуось

Эллипс и гипербола симметричны относительно осей.

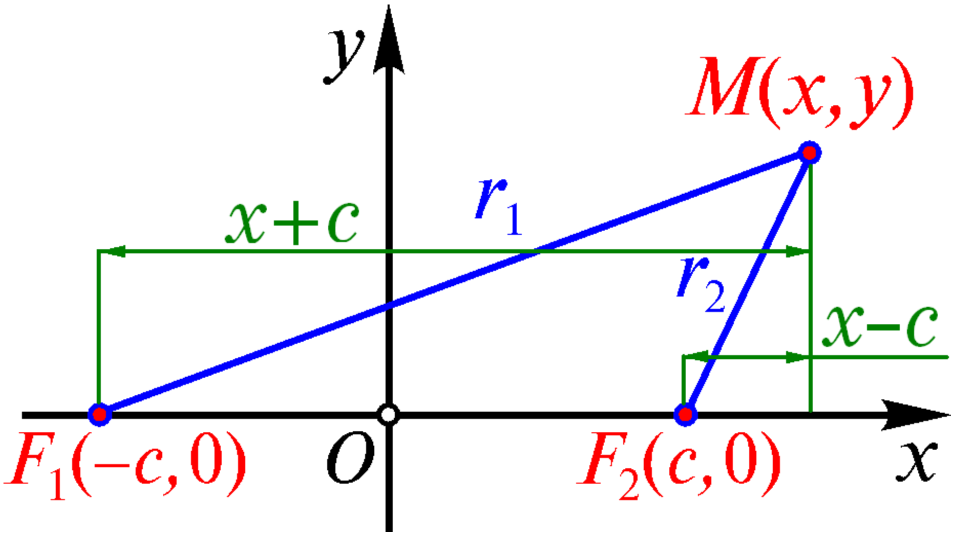
У них есть:

- ✓ оси (полуоси) – большая и малая;
- ✓ центр;
- ✓ вершины;
- ✓ основной прямоугольник ($2a \times 2b$).

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ и } -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ –}$$

сопряжённые гиперболы.

Вывод уравнений эллипса и гиперболы



Знаки для эллипса

$$r_1 \, {}^{+}_{-} \, r_2 = {}^{+}_{\pm} \, 2a$$

Знаки для гиперболы

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \; {}^{+}_{-} \; \boxed{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}} = {}^{+}_{\pm} \, 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \overset{+}{\underset{\pm}{}}2a\overset{-}{\underset{+}{}}\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2\overset{-}{\underset{\pm}{}}4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$cx = a^2\overset{-}{\underset{\pm}{}}a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2-cx$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2 =$$

$$= a^2\boxed{\left(a^2-c^2\right)} \leftarrow b^2$$

$$cx-a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2 =$$

$$= a^2\boxed{\left(c^2-a^2\right)} \leftarrow b^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Эллипс

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

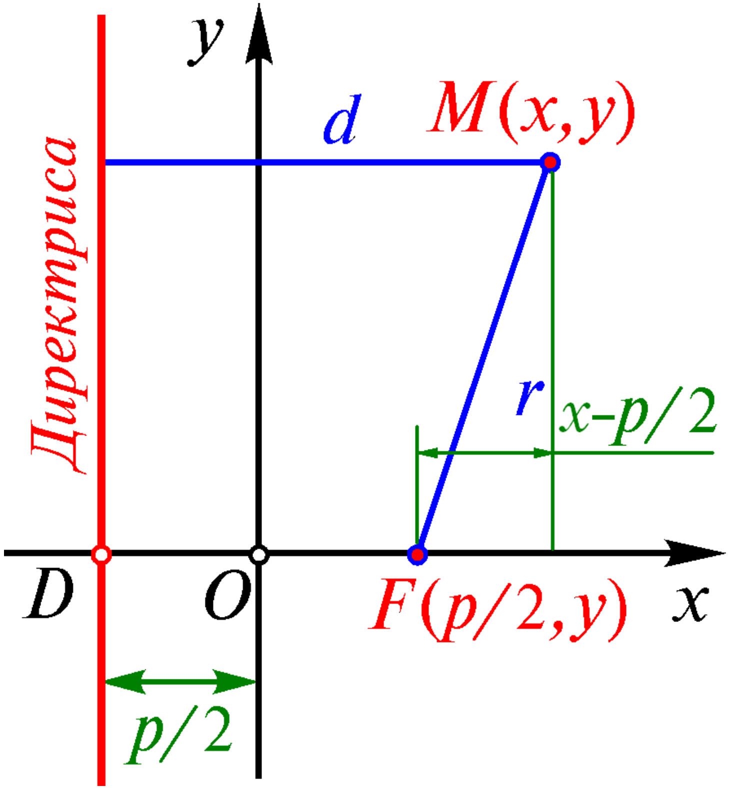
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Гипербола

Эллипс	Гипербола
Директрисы	
$x = -\frac{a}{\varepsilon}; x = \frac{a}{\varepsilon}$ вне эллипса	$x = -\frac{a}{\varepsilon}; x = \frac{a}{\varepsilon}$ между ветвями
Асимптоты	
Нет	$y = -\frac{b}{a}x; y = \frac{b}{a}x$

3. Каноническое уравнение параболы

Парабола –
геометрическое место точек плоскости,
для которых расстояние
до некоторой фиксированной точки F
этой плоскости
равно расстоянию
до некоторой фиксированной прямой,
также расположенной в этой плоскости.



$$r = d$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

$$y^2 = 2px$$

У параболы одна ветвь и одна вершина.

4. Некоторые свойства линий второго порядка

Полярное уравнение

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

p – фокальный параметр;
ε – эксцентриситет.

Полюс полярной системы координат совпадает с фокусом F.

Диаметры

1. Середины параллельных хорд линии второго порядка лежат на одной прямой.
2. Прямая, проходящая через середины параллельных хорд линии второго порядка, называется её диаметром.
3. Все диаметры эллипса и гиперболы проходят через центр.
   Все диаметры параболы параллельны её оси.

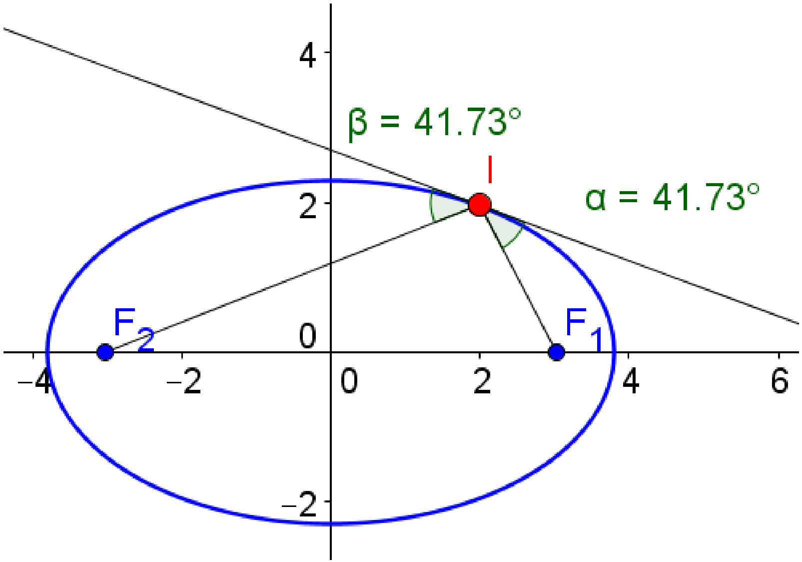
4. Если диаметр эллипса (гиперболы) делит пополам хорды, параллельные другому диаметру, то последний делит пополам хорды, параллельные первому.

Это взаимно сопряжённые диаметры:

$k_1 k_2 = -\dfrac{b^2}{a^2}$ (эллипс) и $k_1 k_2 = \dfrac{b^2}{a^2}$ (гипербола)

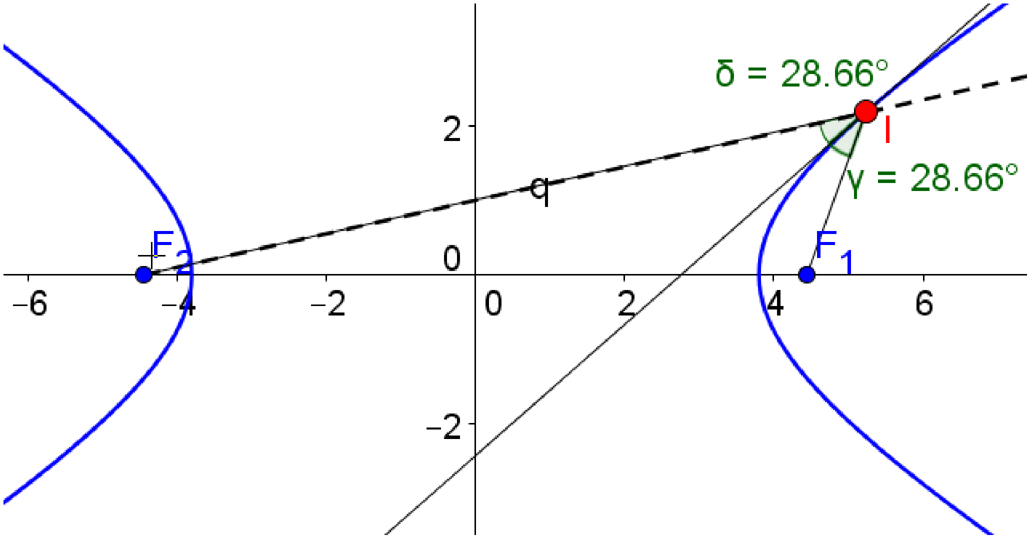
Оптические свойства эллипса, параболы и гиперболы

Эллипс



Оптические свойства эллипса, параболы и гиперболы

Гипербола



Оптические свойства эллипса, параболы и гиперболы

Парабола