Аналитическая геометрия

Лекция №11

Касательные и инварианты

1. Касательные к линиям второго порядка

Угловые коэффициенты касательных

Эллипс и гипербола:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{2xdx}{a^2} \pm \frac{2ydy}{b^2} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \mp \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Парабола

$$y^2 = 2px \rightarrow 2ydy = 2pdx \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

Касательная в точке $K(x_k, y_k)$

Эллипс и гипербола:

$$y - y_k = k\left(x - x_k\right) \rightarrow y - y_k = \mp\frac{b^2 x_k}{a^2 y_k}\left(x - x_k\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x \cdot x_k}{a^2} \pm \frac{y \cdot y_k}{b^2} = \underbrace{\frac{x_k^2}{a^2} \pm \frac{y_k^2}{b^2}}_{1}$$

Откуда:

$$\boxed{\frac{x \cdot x_k}{a^2} \pm \frac{y \cdot y_k}{b^2} = 1}$$

Парабола:

$$y - y_k = k(x - x_k) \rightarrow y - y_k = \frac{p}{y_k}(x - x_k) \rightarrow$$

$$\rightarrow yy_k - y_k^2 = kx - kx_k \rightarrow yy_k - 2px_k = kx - kx_k$$

Откуда:

$$\boxed{y \cdot y_k = p(x + x_k)}.$$

<u>Уравнение касательной и нормали в общем виде</u>

Пусть есть кривая $F(x,y) = 0.$

Тогда уравнение касательной:

$$\left(x - x_k\right)F'_x\left(x_k, y_k\right) + \left(y - y_k\right)F'_y\left(x_k, y_k\right) = 0$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x - x_k}{F'_x\left(x_k, y_k\right)} = \frac{y - y_k}{F'_y\left(x_k, y_k\right)}$$

Касательная к эллипсу, проведённая из точки

Даны эллипс и вне его точка $M(x_0,y_0)$.
Найдём координаты т.$K(x_k,y_k)$.
Имеем систему уравнений относительно x_k и y_k:

$$\begin{cases} \dfrac{x_k^2}{a^2}+\dfrac{y_k^2}{b^2}=1 \\[2ex] \dfrac{x_k\cdot x_0}{a^2}+\dfrac{y_k\cdot y_0}{b^2}=1 \end{cases}$$

Из неё получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{x_{k(1,2)}}{a} = \mp \dfrac{\dfrac{y_0}{b}\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}-1} \mp \dfrac{x_0}{a}}{\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}} \\ \\ \dfrac{y_{k(1,2)}}{b} = \pm \dfrac{\dfrac{x_0}{a}\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}-1} \pm \dfrac{y_0}{b}}{\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}} \end{cases}$$

Касательная к гиперболе, проведённая из точки

Даны гипербола и точка $M(x_0, y_0)$.
Найдём координаты т. $K(x_k, y_k)$.
Имеем систему уравнений относительно x_k и y_k:

$$\begin{cases} \dfrac{x_k^2}{a^2} - \dfrac{y_k^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{x_k \cdot x_0}{a^2} - \dfrac{y_k \cdot y_0}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Из неё получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{x_{k(1,2)}}{a} = \pm \dfrac{\dfrac{y_0}{b}\sqrt{\dfrac{y_0^2}{b^2} - \dfrac{x_0^2}{a^2} + 1} \mp \dfrac{x_0}{a}}{\dfrac{y_0^2}{b^2} - \dfrac{x_0^2}{a^2}} \\ \dfrac{y_{k(1,2)}}{b} = \pm \dfrac{\dfrac{x_0}{a}\sqrt{\dfrac{y_0^2}{b^2} - \dfrac{x_0^2}{a^2} + 1} \mp \dfrac{y_0}{b}}{\dfrac{y_0^2}{b^2} - \dfrac{x_0^2}{a^2}} \end{cases}$$

Касательная к параболе, проведённая из точки

Даны парабола и точка $M(x_0,y_0)$.
Найдём координаты т.$K(x_k,y_k)$.
Имеем систему уравнений относительно x_k и y_k:

$$\begin{cases} y_k^2 = 2px_k \\ y_k \cdot y_0 = p\left(x_k + x_0\right) \end{cases}$$

Из неё получаем:

$$\begin{cases} px_{k(1,2)} = \mp y_0 \sqrt{y_0^2 - 2px_0} + \left(y_0^2 - px_0 \right) \\ y_{k(1,2)} = y_0 \mp \sqrt{y_0^2 - 2px_0} \end{cases}$$

2. Касательные плоскости к поверхностям второго порядка

<u>Определение</u>.
Касательная плоскость
к поверхности $F(x,y,z)=0$ в данной точке –
это плоскость,
которая содержит все касательные к кривым,
проведенным на поверхности через эту точку.

<u>Замечание</u>.
Поверхность $F(x,y,z)=0$
не имеет касательной плоскости в т.M
в том и только в том случае, когда
функция $F(x,y,z)$ не дифференцируема в т.M
(это ***конические точки*** или ***рёбра*** – линии).

Уравнение касательной плоскости и нормали к ней в общем виде

Пусть есть поверхность $F(x,y,z)=0$.
Тогда касательная плоскость:

$$\left(x-x_k\right)F_x'\left(x_k,y_k,z_k\right)+$$
$$+\left(y-y_k\right)F_y'\left(x_k,y_k,z_k\right)+$$
$$+\left(z-z_k\right)F_z'\left(x_k,y_k,z_k\right)=0$$

Нормаль:

$$\frac{x-x_0}{F_x'\left(x_0,y_0,z_0\right)}=\frac{y-y_0}{F_y'\left(x_0,y_0,z_0\right)}=\frac{z-z_0}{F_z'\left(x_0,y_0,z_0\right)}$$

<u>Замечание</u>.
Уравнение касательной плоскости проще всего получается так: уравнение дифференцируется и вместо dx, dy, dz пишем $x - x_k$, $y - y_k$, $z - z_k$.

Пример: эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$$\frac{2xdx}{a^2}+\frac{2ydy}{b^2}+\frac{2zdz}{c^2}=0$$

$$\frac{2x\left(x-x_k\right)}{a^2}+\frac{2y\left(y-y_k\right)}{b^2}+\frac{2z\left(z-z_k\right)}{c^2}=0$$

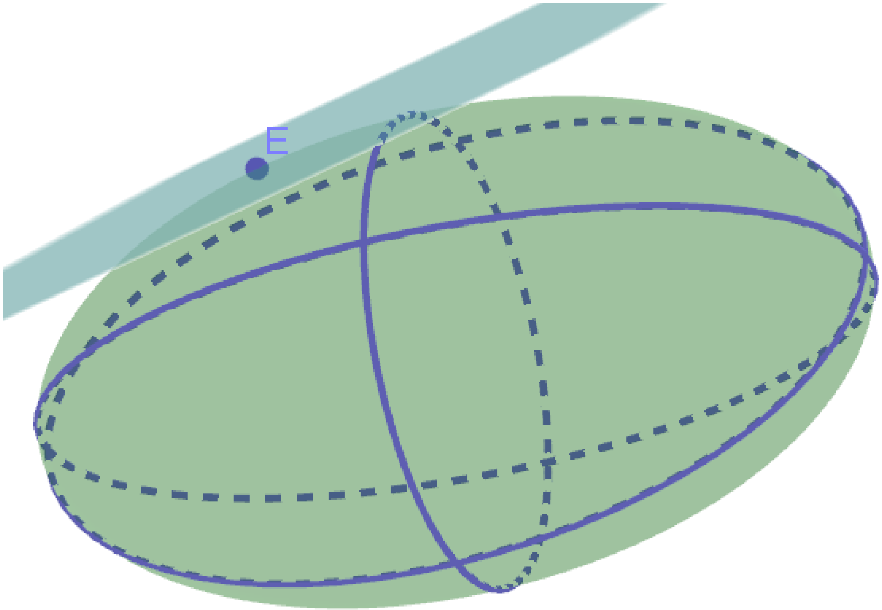
$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}_{1}-\frac{xx_k}{a^2}-\frac{yy_k}{b^2}-\frac{zz_k}{c^2}=0$$

Уравнение касательной плоскости

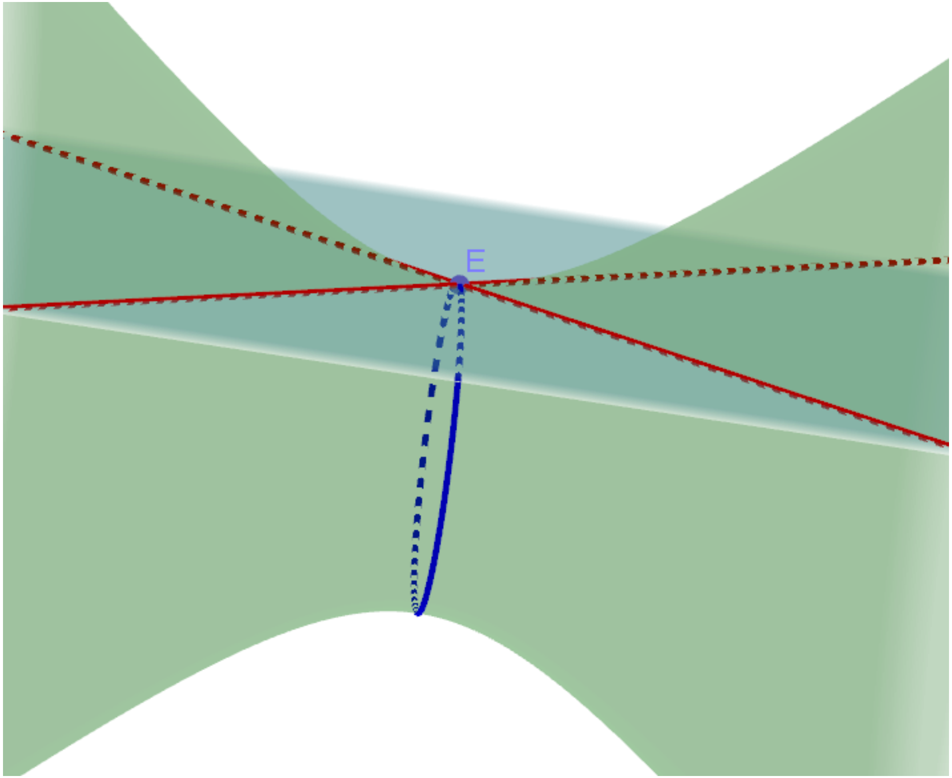
$$\frac{xx_k}{a^2}+\frac{yy_k}{b^2}+\frac{zz_k}{c^2}=1$$

Типы точек касания

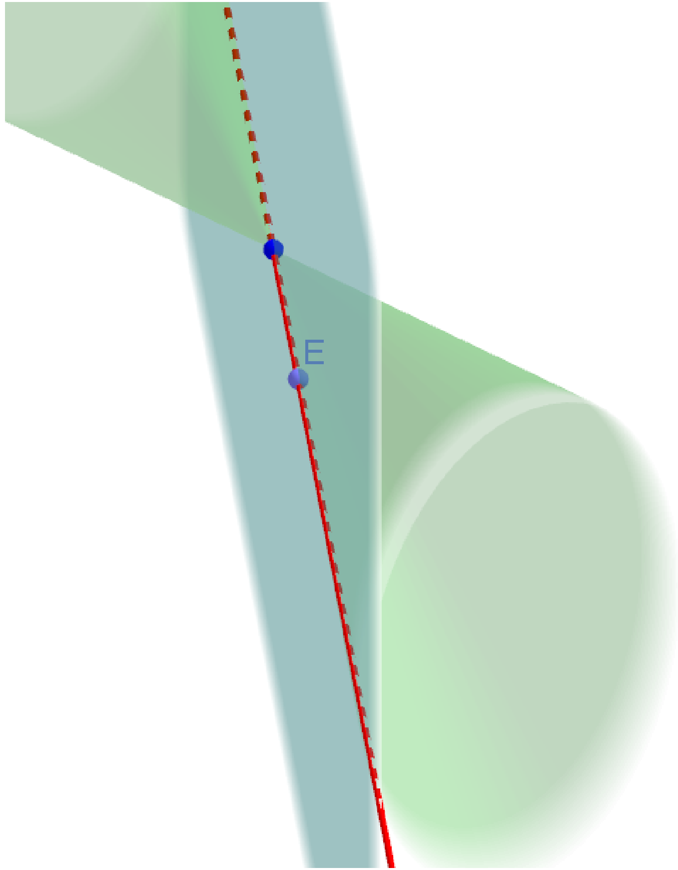
Эллиптическая



Гиперболическая



Параболическая



3. Инварианты кривых второго порядка

Общее уравнение кривых второго порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$(x, y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_{13}, a_{23})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33} = 0$$

$$X^T Q X + 2LX + a_{33} = 0$$

$$(x, y, 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow (x, y, 1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Q – матрица квадратичной части.

L – матрица линейной части.

A – расширенная матрица.

Ортогональные инварианты (не меняются при переходе от одной прямоугольной системы координат к дугой):

$$I_1 = \operatorname{tr} Q$$

$$I_2 = \det Q$$

$$I_3 = \det A$$

Семиинвариант (инвариант относительно поворота осей координат):

$$I_3' = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}$$

При $I_2 = I_3 = 0$ I_3' – ортогональный инвариант.

Классификация кривых второго порядка

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">Невырожденные
$I_3 \neq 0$</td><td>Вырожденные
(распадающиеся)
$I_3 = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Центральные кривые
$I_2 \neq 0$</td><td rowspan="2">$I_2 > 0$</td><td>$I_1 I_3 < 0$</td><td>Эллипс</td><td rowspan="2">Точка (вырожден. эллипс или пара мнимых прямых)</td></tr>
<tr><td>$I_1 I_3 > 0$</td><td>Мнимый эллипс</td></tr>
<tr><td>$I_2 < 0$</td><td colspan="2">Гипербола</td><td>Вырожденная гипербола (пара пересекаю-щихся прямых)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>Невырожденные
$I_3 \neq 0$</td><td colspan="2">Вырожденные (распадающиеся)
$I_3 = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Нецентральные кривые
$I_2 = 0$</td><td rowspan="3">$I_2 = 0$</td><td rowspan="3">Парабола</td><td>$I_3' > 0$</td><td>Пара мнимых параллельн. прямых</td></tr>
<tr><td>$I_3' < 0$</td><td>Пара действит. параллельн. прямых</td></tr>
<tr><td>$I_3' = 0$</td><td>Пара действит. совпадающ. прямых</td></tr>
</table>

3. Инварианты поверхностей второго порядка (квадрик)

Общее уравнение поверхностей второго порядка:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 +$$

$$+2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$

$$+2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2(a_{14}, a_{24}, a_{34})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a_{44} = 0$$

$$X^T Q X + 2LX + a_{44} = 0$$

$$(x, y, z, 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x, y, z, 1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Q – матрица квадратичной части.
L – матрица линейной части.
A – расширенная матрица.

Ортогональные инварианты:

$$I_1 = \operatorname{tr} Q$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{13} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \det Q$$

$$I_4 = \det A$$

Семиинварианты:

$$I_4' = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

$$I_4'' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Классификация поверхностей второго порядка

		Невырожденные поверхности		Вырожденные поверхности
		$I_4 > 0$	$I_4 < 0$	$I_4 = 0$
Центральные поверхности $I_3 \neq 0$	$I_3 I_1,\ I_2$ оба больше нуля	**Мнимый эллипсоид**	**Эллипсоид**	**Точка** (действительная вершина мнимого конуса)
	$I_3 I_1,\ I_2$ не оба больше нуля	**Однополостный гиперболоид**	**Двуполостный гиперболоид**	**Действительный конус**
Нецентральные поверхности $I_3 = 0$		**Гиперболический параболоид**	**Эллиптический параболоид**	**Цилиндры** $I'_4 \neq 0$ **Пары плоскостей** $I'_4 = 0$

	Цилиндры $I'_4 \neq 0$	Пары плоскостей $I'_4 = 0$	
$I_4 = 0,\ I_3 = 0,\ I_2 > 0$	Эллиптический цилиндр (мнимый эллиптический цилиндр, если $I'_4 I_1 > 0$ действительный, если $I'_4 I_1 < 0$)	Пара мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой	
$I_4 = 0,\ I_3 = 0,\ I_2 < 0$	Гиперболический цилиндр	Пара действительных пересекающихся плоскостей	
$I_4 = 0,\ I_3 = 0,\ I_2 = 0$	Параболический цилиндр	Пара параллельных плоскостей (мнимых, если $I''_4 > 0$; действительных, если $I''_4 < 0$)	Пара действительных совпадающих плоскостей