# Аналитическая геометрия

*Лекция №10*

## ***Поверхности второго порядка***

# 1. Центральные поверхности

1. Эллипсоид
2. Однопóлостный гиперболоид
3. Двупóлостный гиперболоид.
4. Конус второго порядка.

Рассмотрим их канонические уравнения.

# Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

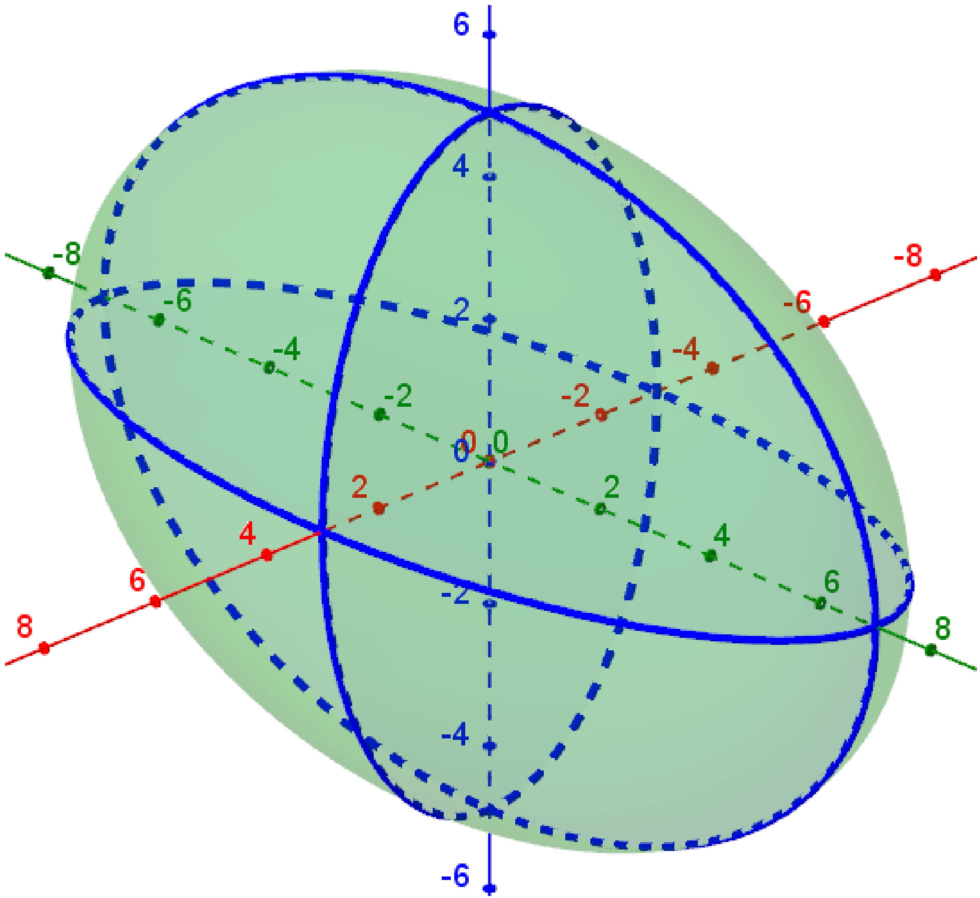
$a$, $b$, $c$ – полуоси эллипсоида.

Если $\left[\begin{array}{l} a=b \\ a=c \\ b=c \end{array}\right.$, то имеем эллипсоид вращения.

При $a=b=c$ – сфера.

Линии пересечения эллипсоида с плоскостями есть эллипсы.

Эллипсоид можно получить из сферы
(как и эллипс из окружности)
с помощью сжатия.


6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

# Однопóлостный гиперболоид

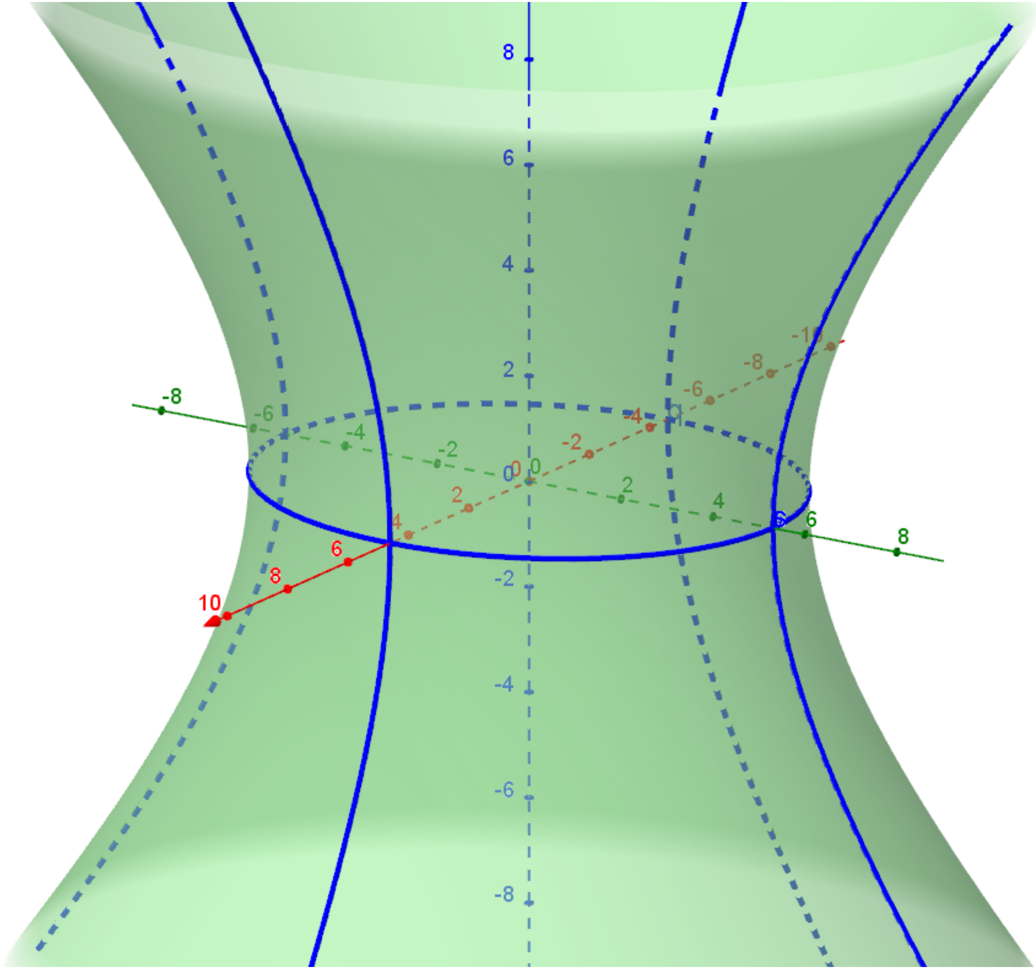
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$a$, $b$, $c$ – полуоси гиперболоида.

$x=0$, $y=0$, $z=0$ – плоскости симметрии.

При $z=0$ имеем горловой эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{при } x=0 \to \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ \text{при } y=0 \to \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{array}\right. \quad \text{– гиперболы.}$$


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10

# Двупóлостный гиперболоид

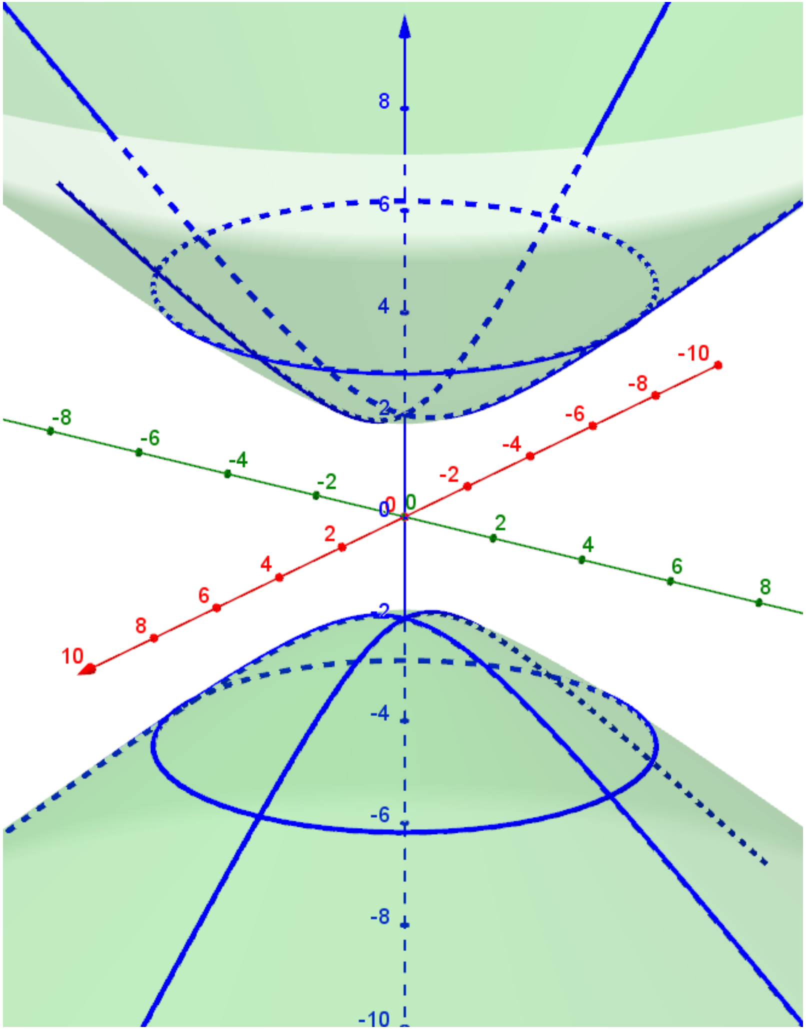
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

$a$, $b$, $c$ – полуоси гиперболоида.

$x=0$, $y=0$, $z=0$ – плоскости симметрии.

При $z=h$ имеем эллипсы $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1$.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{при } x=0 \to \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1 \\ \text{при } y=0 \to \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1 \end{array}\right. \quad \text{– гиперболы.}$$



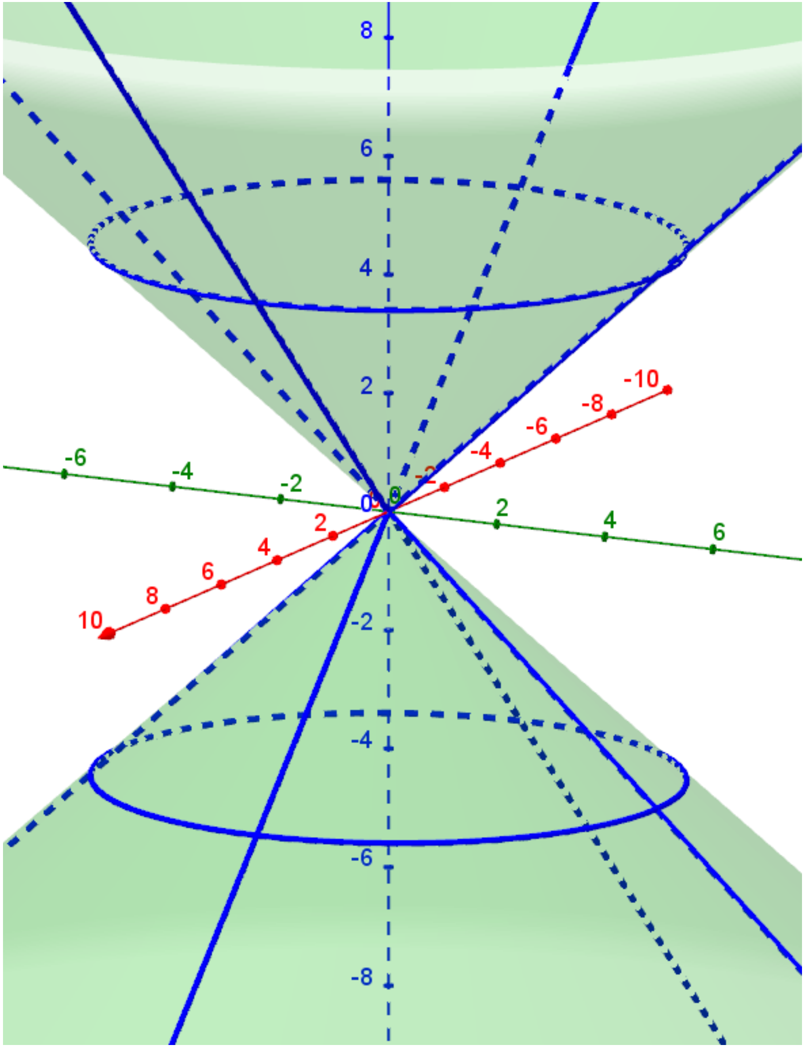
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10

# Конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Свойство:
Если некоторая точка $M \neq O(0,0,0)$
лежит на этой поверхности,
то все точки прямой $MO$
также лежат на этой поверхности.

$a=b$ – конус круглый.


8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-6
-4
-2
2
4
6
-10
-8
-6
-4
2
4
6
8
10

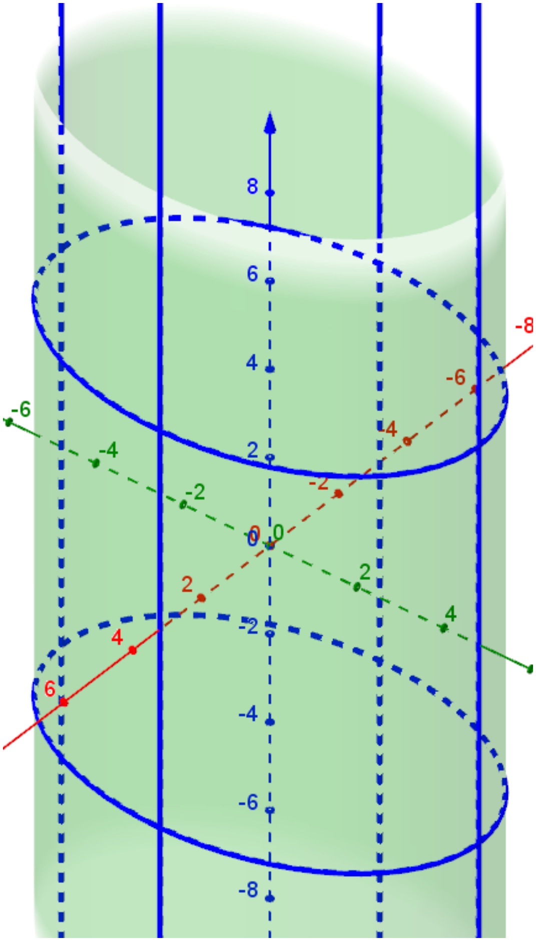
# 2. Нецентральные поверхности

1. Эллиптический цилиндр.
2. Гиперболический цилиндр.
3. Параболический цилиндр.
4. Эллиптический параболоид.
5. Гиперболический параболоид.
6. Пара пересекающихся плоскостей.
7. Пара параллельных плоскостей.
8. Пара совпадающих плоскостей.

Рассмотрим их канонические уравнения.

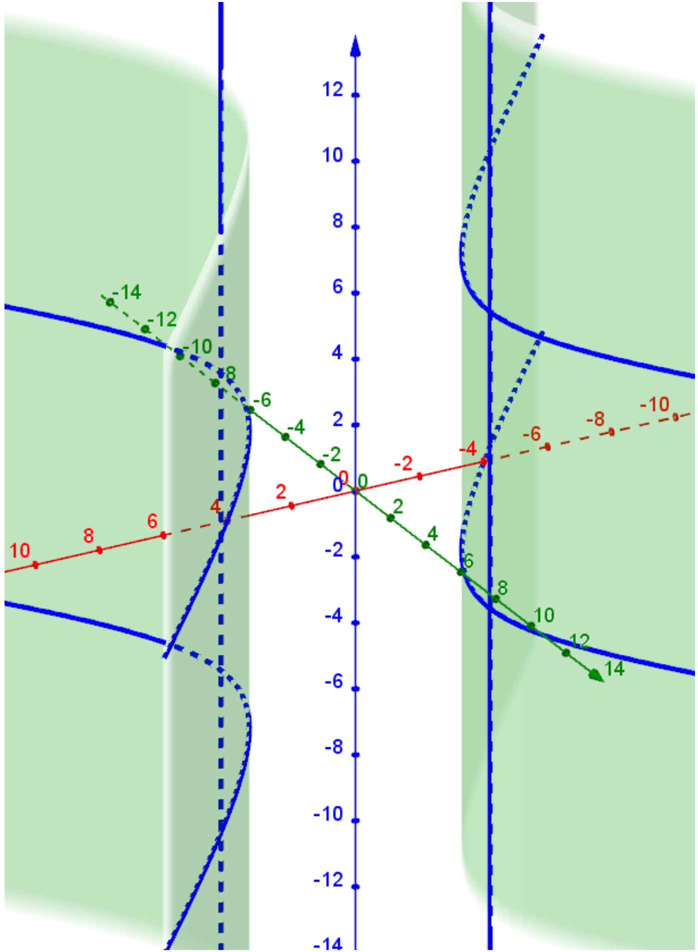
# Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



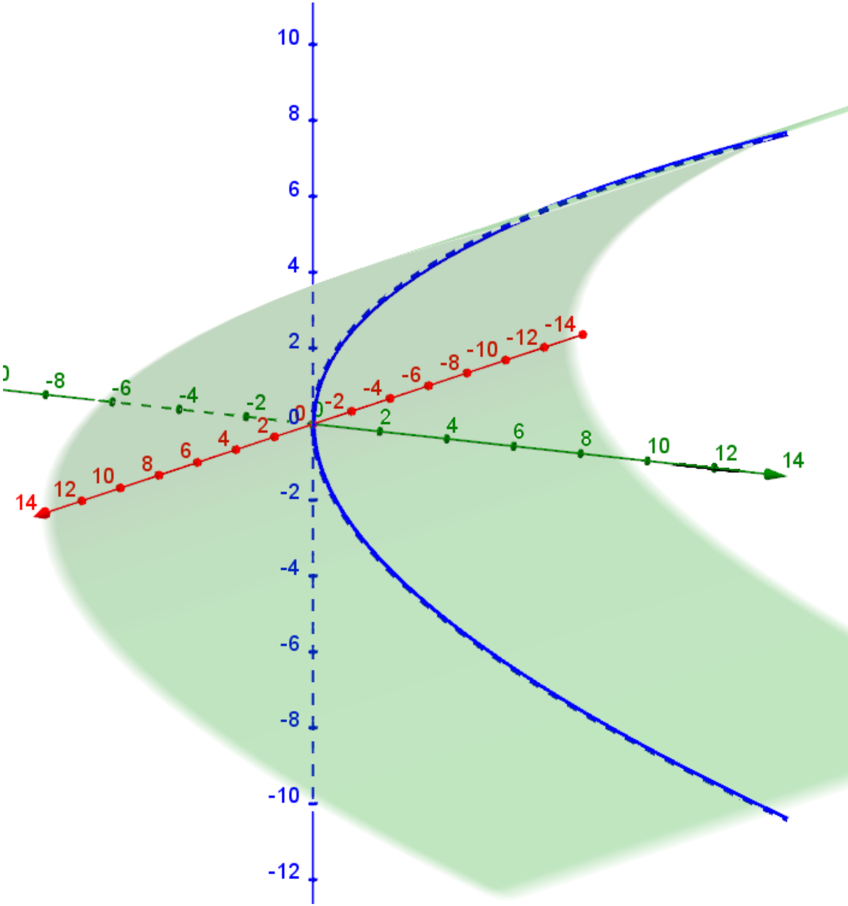
# Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



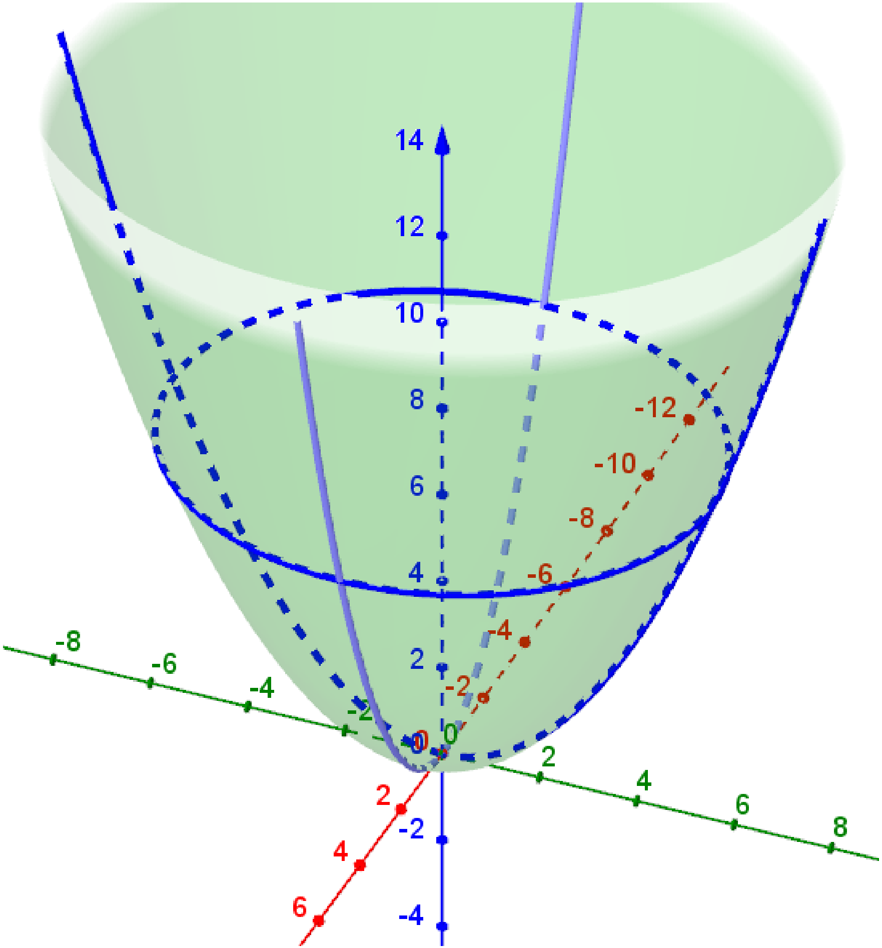
# Параболический цилиндр

$$z^2 = 2py$$



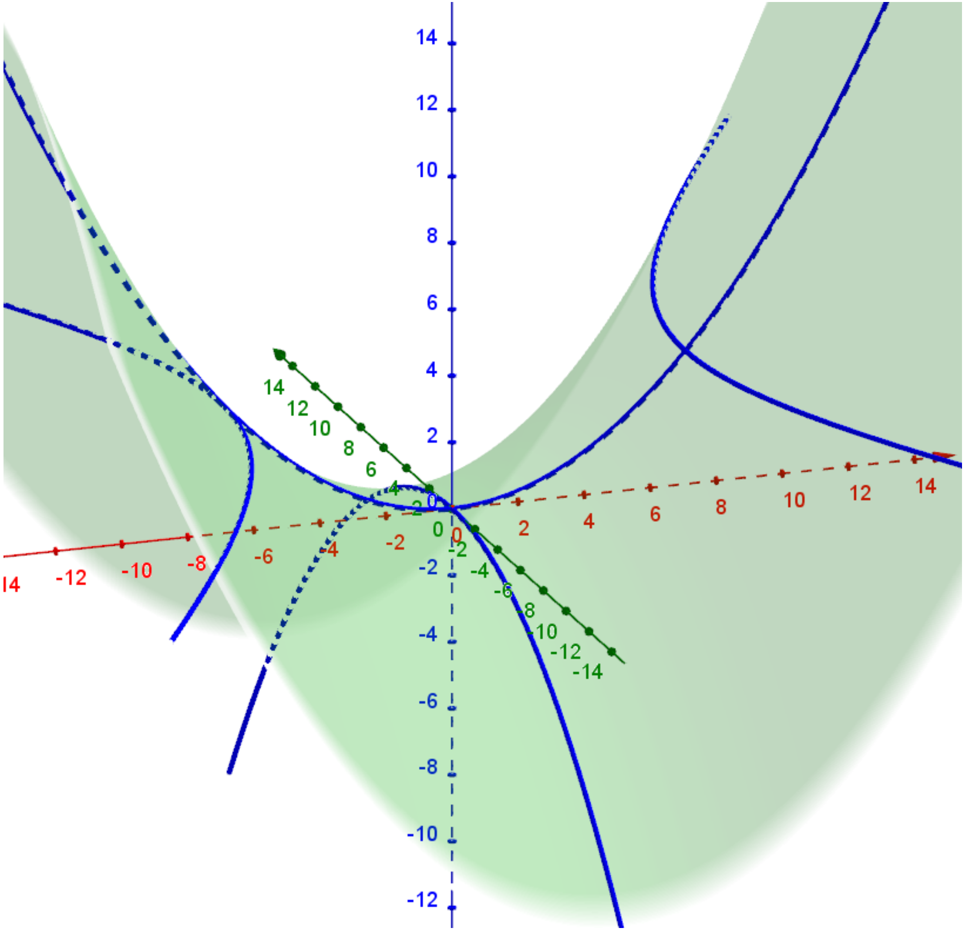
# Эллиптический параболоид

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



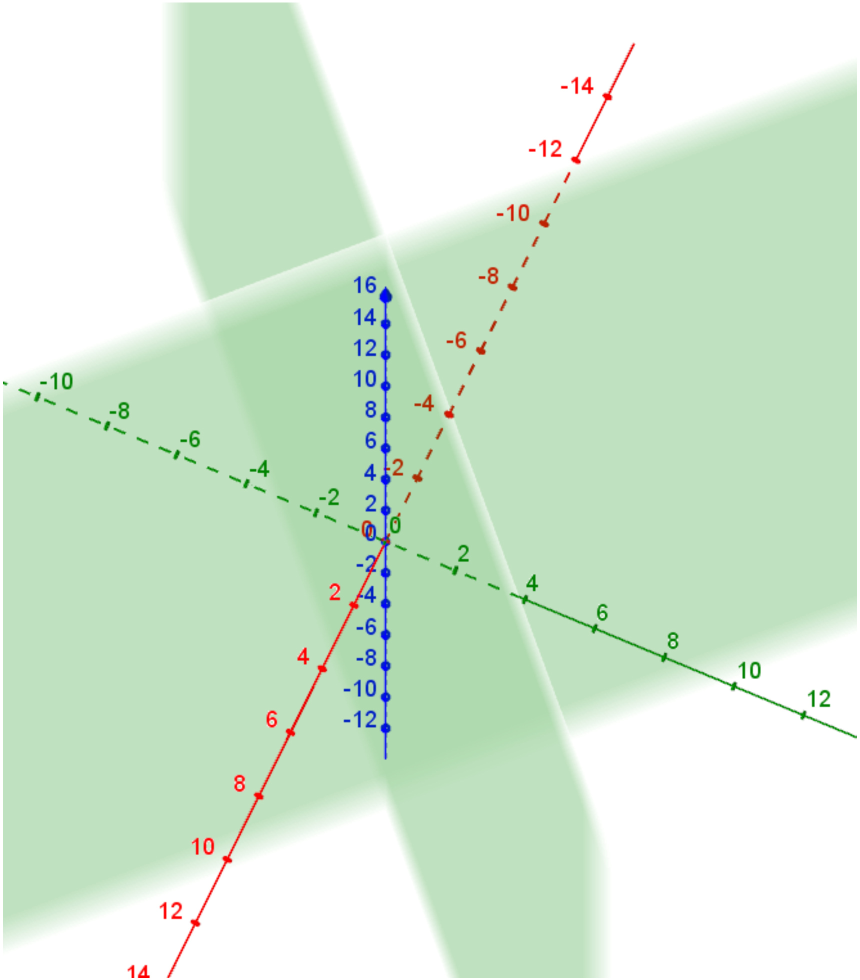
# Гиперболический параболоид

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$



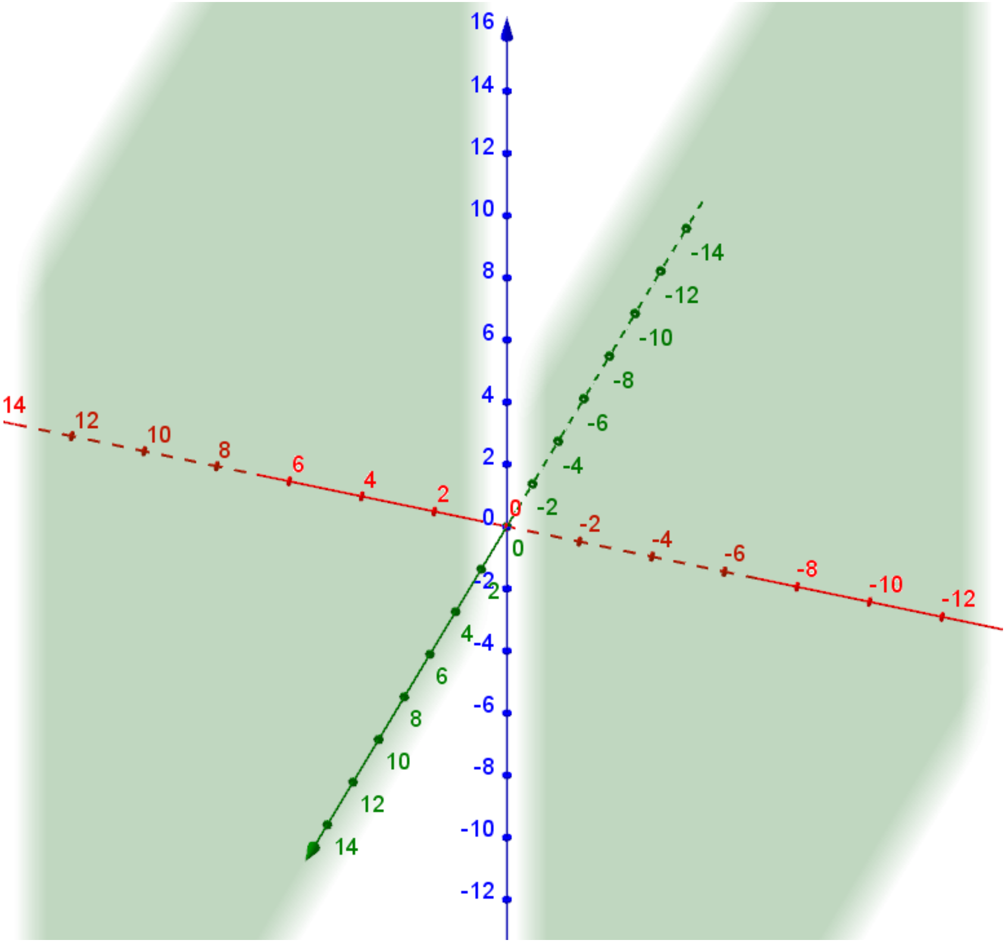
# Пара пересекающихся плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$



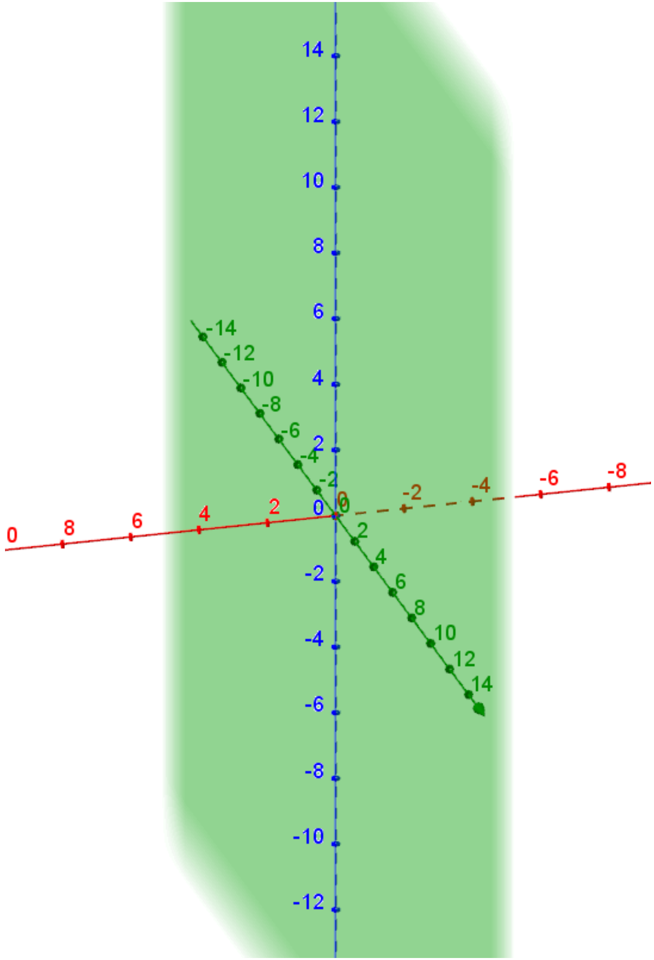
# Пара параллельных плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$



# Пара совпадающих плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} = 0$$

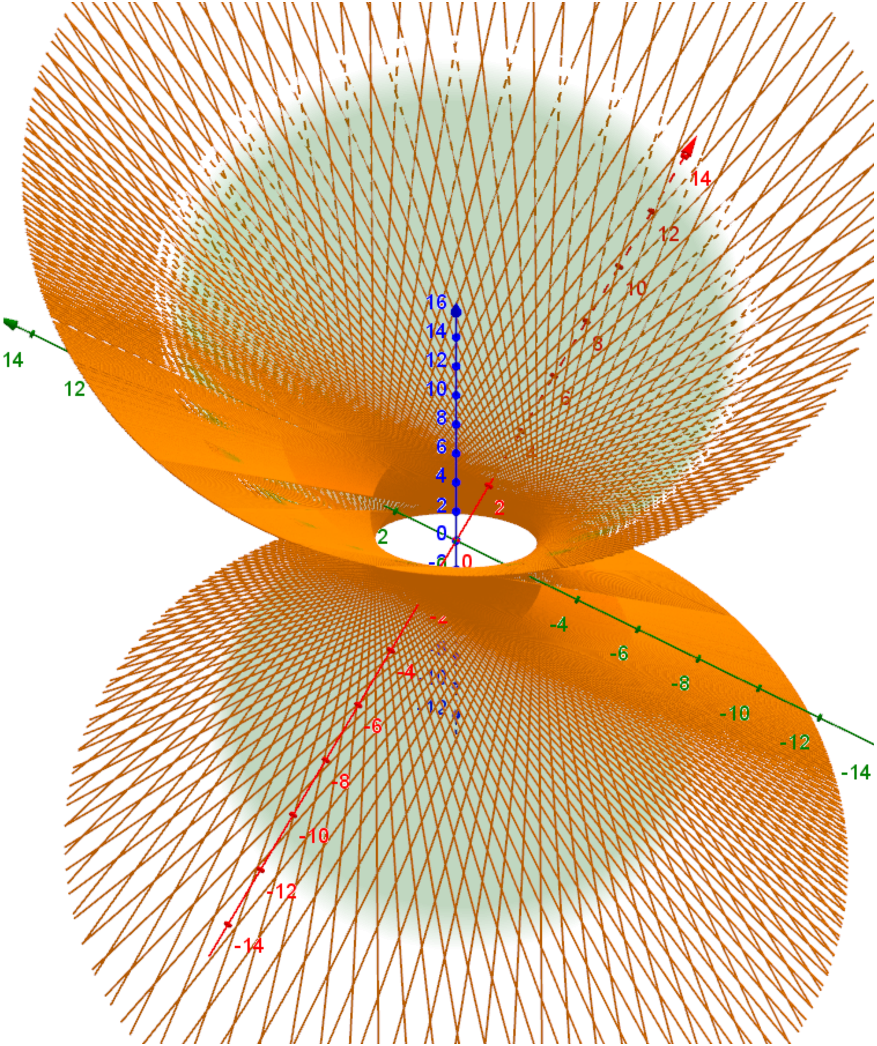


# 3. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка

# Однопо́лостный гиперболоид

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \lambda\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = 1 + \dfrac{y}{b} \end{cases} \to \begin{cases} 1 - \dfrac{y}{b} = 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0 \end{cases} \quad \text{при } \lambda = \infty$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \lambda\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = 1 - \dfrac{y}{b} \end{cases} \to \begin{cases} 1 + \dfrac{y}{b} = 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0 \end{cases} \quad \text{при } \lambda = \infty$$

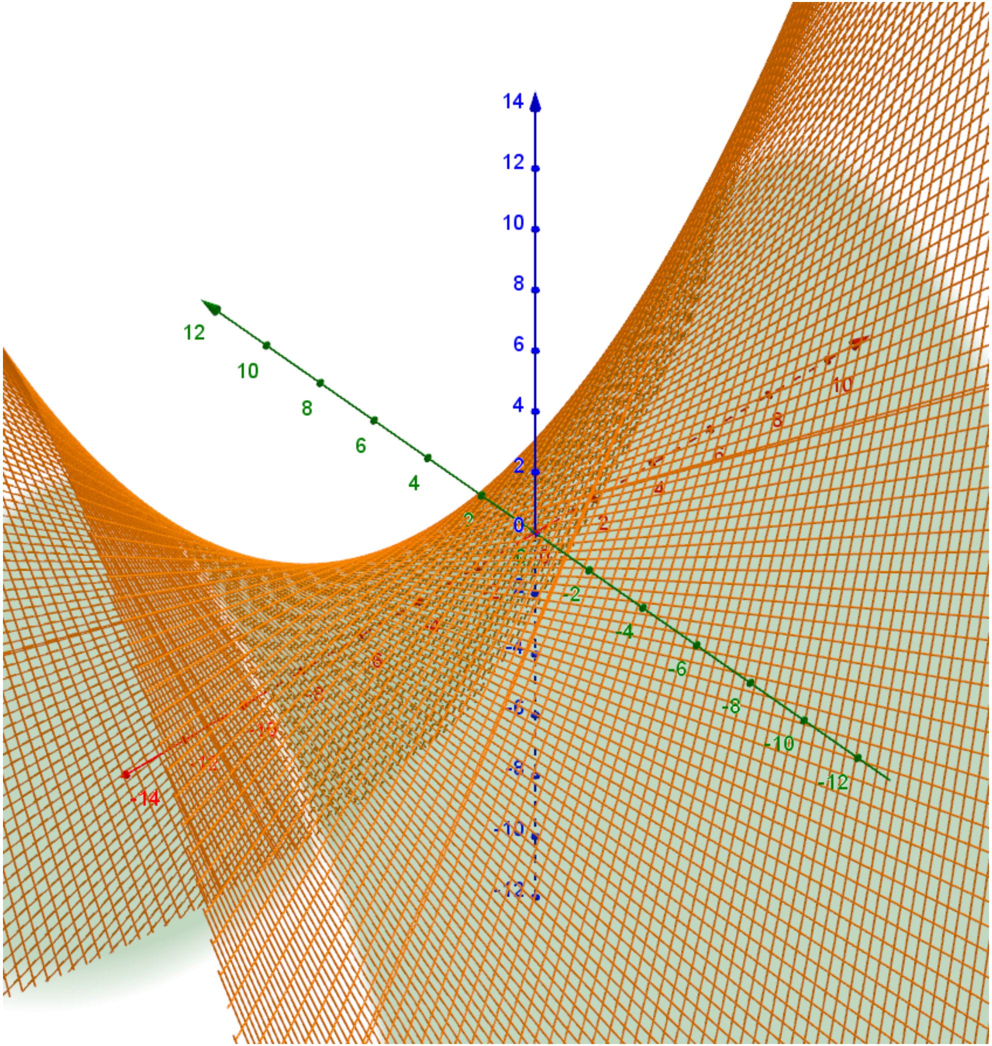


16
14
12
10
8
6
4
2
0
-4
-6
-8
-10
-12
-14

# Гиперболический параболоид

$$\begin{cases} z = \lambda\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) \\ \lambda = \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \lambda\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) \\ \lambda = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \end{cases}$$


14
12
10
8
6
4
2
0
12
10
8
6
4
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
10

инженер
Владимир
Григорьевич
Шухов

Башни Шухова

берег р. Ока,
1927 г., 128 м

Москва,
1922 г., 168 м

Кобэ,
1963 г., 108 м

| | |
|---|---|
|  |  |
| Аджигольский маяк, Херсон, 70 м | Гуанчжоу, 2009, 610 м |