

Лекция 3.

Методы изображений

12. Параллельное проектирование. Возьмем в евклидовом пространстве E_3 некоторую плоскость σ и какой-нибудь ненулевой вектор \vec{p} , непараллельный этой плоскости.

Пусть \bar{A} - произвольная точка пространства. Проведя через эту точку прямую, параллельную вектору \vec{p} , найдем точку A_0 , в которой наша прямая (рис.23) пересекает заданную плоскость. Точка A_0 называется *проекцией* точки \bar{A} на плоскость σ при проектировании параллельно вектору \vec{p} .

Если вектор $\vec{p} \perp \sigma$, то точка A_0 называется *ортогональной проекцией* точки \bar{A} (рис.24).

Множество параллельных проекций (рис.23) всех точек данной фигуры \bar{F} образует некоторую фигуру F_0 , которая называется *параллельной проекцией фигуры \bar{F}* .

Основные свойства параллельного проектирования.

1. Проекция прямой есть прямая (рис.25).
2. Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают (рис.25).
3. Проекция отрезка \bar{AB} есть отрезок A_0B_0 , где A_0, B_0 - проекции точек \bar{A}, \bar{B} (рис.26).
4. При параллельном проектировании сохраняется простое отношение трёх точек

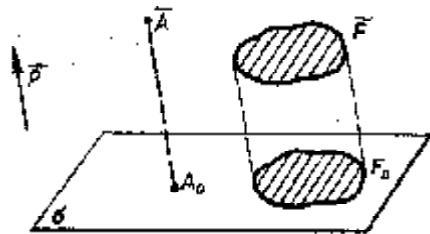


Рис.23.

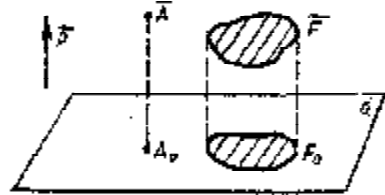


Рис.24.

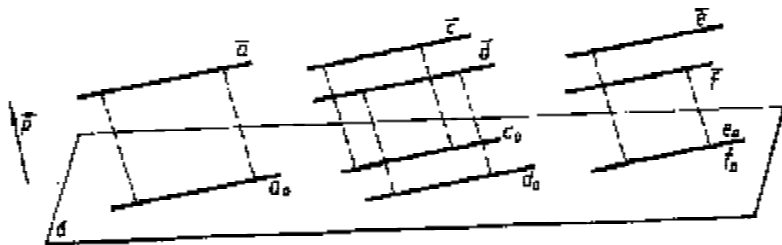


Рис.25.

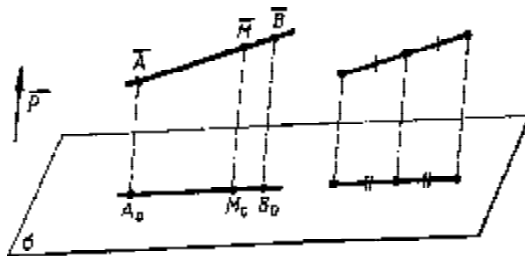
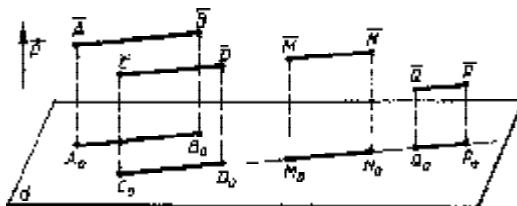
 $(\overline{AB}, \overline{M}) = (A_0B_0, M_0)$ Рис.26.

Рис.27.

$$(\overline{AB}, \overline{M}) = (A_0B_0, M_0) \text{ или } \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{\overrightarrow{A_0M_0}}{\overrightarrow{M_0B_0}};$$

в частности, проекция середины отрезка есть середина проекции отрезка (рис.26).

5. Проекции параллельных отрезков параллельны или принадлежат одной прямой (рис.27).

6. Проекции параллельных отрезков или отрезков, лежащих на одной прямой, пропорциональны самим отрезкам.

13. Аффинные отображения. Понятие *аффинного отображения* одной плоскости на другую является обобщением понятия аффинного преобразования.

Пусть $\bar{\sigma}$ и σ - различные или совпадающие плоскости пространства E_3 .

Определение 5. *Взаимно однозначное отображение $f: \bar{\sigma} \rightarrow \sigma$ называется аффинным отображением плоскости $\bar{\sigma}$ на плоскость σ , если оно любые три точки $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$ плоскости $\bar{\sigma}$, лежащие на одной прямой, переводит в три точки M_1, M_2, M_3 плоскости σ , лежащие на одной прямой и сохраняет их простое отношение, т.е.*

$$(\bar{M}_1\bar{M}_2, \bar{M}_3) = (M_1M_2, M_3).$$

Аффинное отображение $f: \bar{\sigma} \rightarrow \sigma$ будет аффинным преобразованием, если плоскости $\bar{\sigma}$ и σ совпадают.

Пример 1. Пусть $\bar{\sigma}$ и σ - различные плоскости пространства E_3 , а \vec{p} - ненулевой вектор, не параллельный этим плоскостям (рис.28). Каждой точке $\bar{M} \in \bar{\sigma}$ поставим в соответствие её проекцию $M_0 \in \sigma$ при проектировании параллельно вектору \vec{p} . Ясно, что это отображение является взаимно однозначным, а из свойств 1 и 4 следует, что оно является аффинным. Рассмотренное отображением будем называть *параллельным проектированием* плоскости $\bar{\sigma}$ на плоскость σ по направлению вектора \vec{p} .

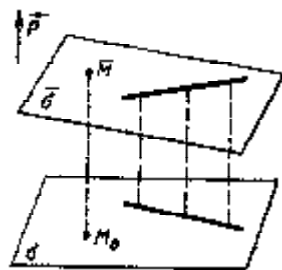


Рис.28.

Пример 2. Пусть $f: \bar{\sigma} \rightarrow \sigma$. Тогда два четырехугольника (рис.29) лежащие соответственно в плоскостях $\bar{\sigma}$ и σ будут аффинно-эквивалентны, если мы сможем обозначить их как \overline{ABCD} и $ABCD$ так, чтобы

$$(\overline{AC}, \overline{E}) = (AC, E) \text{ и } (\overline{BD}, \overline{E}) = (BD, E),$$

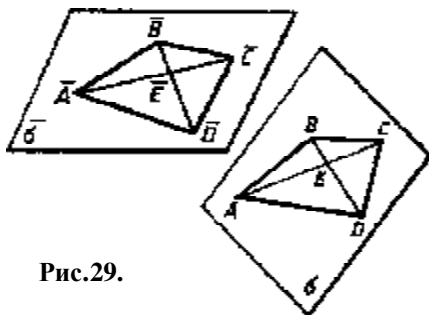


Рис.29.

где \bar{E} и E - точки пересечения прямых $\overline{AC}, \overline{BD}$ и AC, BD .

14. Изображение плоских фигур в параллельной проекции

В школьной практике применяется именно этот способ построения изображений.

Выберем некоторую плоскость σ и назовем её *плоскостью изображений*. Затем возьмем ненулевой вектор \vec{p} , не параллельный плоскости σ . Направление этого вектора назовем *направлением проектирования*. Пусть \bar{F} - произвольная фигура (плоская или пространственная), расположенная в пространстве, а F_0 - параллельная проекция этой фигуры на плоскость σ . Фигуру \bar{F} называют оригиналом, а F_0 - проекцией оригинала. Любую фигуру F на плоскости σ подобную фигуре F_0 , называют изображением фигуры \bar{F} (рис.30).

Построенное таким образом изображение фигуры соответствует её зрительному восприятию при рассмотрении из точки, расположенной достаточно далеко от фигуры (из бесконечно удаленной точки).

Произвол в выборе изображения при данном проектировании объясняется тем, что обычно плоскостью изображе-

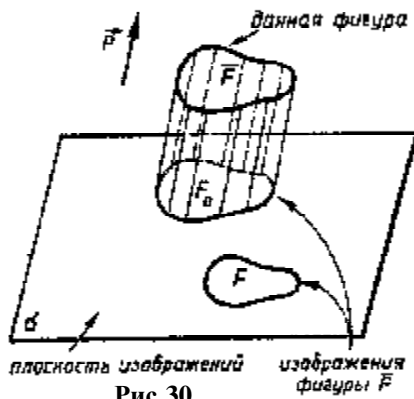


Рис.30.

ний служит плоскость листа бумаги (или классная доска) и проекция оригинала не всегда помещается на этом листе, а если и помещается, то не всегда удобно расположена. В этих случаях, получив на плоскости σ проекцию F_0 оригинала \bar{F} , подвергают плоскость σ преобразованию подобия так, чтобы образ F фигуры F_0 имел удобное расположение и удобные размеры.

Таким образом, изображение фигуры зависит от выбора плоскости изображений σ , направления проектирования и выбранного подобия плоскости σ . Обычно берется такое изображение фигуры, которое является наиболее наглядным и удобным для выполнения на нем дополнительных построений.

Построение изображений фигур с помощью параллельного проектирования (*плоскости изображения и оригинала пересекаются и направление проектирования не параллельно ни одной из этих плоскостей*) основано на *теореме об изображении плоских фигур*.

Теорема 9. Пусть фигуры \bar{F} и F лежат соответственно на пересекающихся плоскостях $\bar{\sigma}$ и σ . Фигура F может служить изображением фигуры \bar{F} тогда и только тогда, когда фигуры \bar{F} и F аффинно-эквивалентны.

Используя вышеизложенную теорему, рассмотрим построение изображений некоторых многоугольников. По теореме об изображениях плоских фигур изображением n -угольника является фигура, аффинно-эквивалентная оригиналу, т.е. снова n -угольник.

Рассмотрим более подробно вопрос о построении изображений треугольников и четырехугольников.

Треугольник. Ясно, что любой треугольник $ABC \in \sigma$ может служить изображением данного треугольника $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \in \bar{\sigma}$, если плоскости σ и $\bar{\sigma}$ пересекаются. Если $\bar{\sigma} \parallel \sigma$, то $\triangle ABC \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Это следует из того, что при аффинном преобразовании $f: \bar{\sigma} \rightarrow \sigma$ репер $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ переходит в репер (A, B, C) , поэтому треугольники $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ и ABC аффинно-эквивалентны, а по теореме 9 треуголь-

ник ABC может служить изображением треугольника \overline{ABC} .

Четырехугольник. По теореме 9 любой четырехугольник плоскости σ , аффинно-эквивалентный данному четырехугольнику $\overline{F} \in \overline{\sigma}$, может служить его изображением, если плоскости σ и $\overline{\sigma}$ пересекаются. Следуя примеру 2 данной лекции для построения изображения $ABCD$ данного четырехугольника \overline{ABCD} в качестве вершин A, B, C можно выбрать три произвольные точки, не лежащие на одной прямой. При этом изображение D четвертой вершины \overline{D} определяется однозначно из условий

$$(\overline{AC}, \overline{E}) = (AC, E) \text{ и } (\overline{BD}, \overline{E}) = (BD, E), \quad (*)$$

где \overline{E} и E - точки пересечения прямых $\overline{AC}, \overline{BD}$ и AC, BD .

Трапеция. Фигурой, аффинно-эквивалентной трапеции, является трапеция, поэтому *изображением трапеции является трапеция*. Условия (*) в случае трапеции означают, что отношение оснований оригинала равно отношению оснований изображения. Итак, *трапеция $F \in \sigma$ является изображением данной трапеции $\overline{F} \in \overline{\sigma}$ только в том случае, когда отношение оснований трапеции F равно отношению оснований трапеции \overline{F}* .

Параллелограмм (ромб, прямоугольник, квадрат) изображается в виде параллелограмма. Так как любые два параллелограмма аффинно-эквивалентны, то любой параллелограмм плоскости изображения является изображением данного параллелограмма - оригинала. В частности, любой параллелограмм плоскости σ является изображением квадрата плоскости $\overline{\sigma}$.

n -Угольник, где $n > 4$. Из предыдущего изложения ясно, что при построении изображения n -угольника, три вершины изображения берутся произвольно, а остальные вершины находятся построением с соблюдением условий (*).

На рисунке 31 построено изображение пятиугольника \overline{ABCDE} . Вершины A, B, C выбраны произвольно, а вершины D, E построены. Вершина D , например, построена с использо-

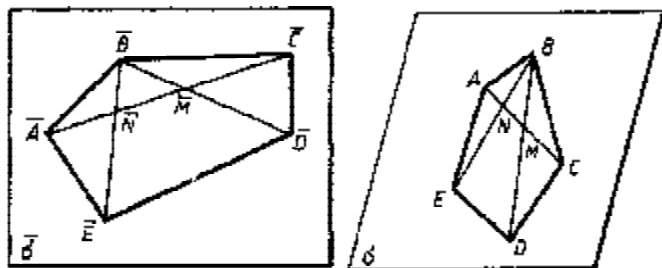


Рис.31.

ванием условий $(\overline{BD}, \overline{M}) = (BD, M)$ и $(\overline{AC}, \overline{M}) = (AC, M)$.

На рисунке 32 построено изображение правильного шестиугольника \overline{ABCDEF} с центром в точке O . В данном случае произвольными выбираем точки A, B, O .

Точку D строим как точку, симметричную точке A относительно точки O . Для построения точки C

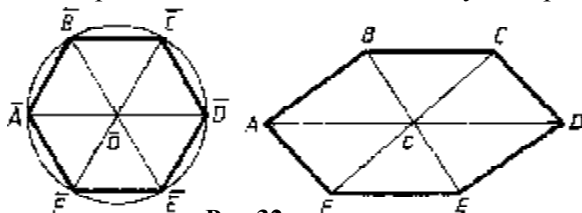


Рис.32.

строим прямые BC и DC из условий $BC \parallel AO$ и $DC \parallel BO$, и т.д.

Окружность. Построение изображения окружности основано на следующем утверждении.

Лемма 1. В любом аффинном отображении эллипс (окружность) переходит в эллипс.

Из этой леммы с учетом теоремы 9, мы заключаем, что изображением данной окружности является эллипс. При этом изображением центра окружности является центр эллипса, а изображением взаимно перпендикулярных диаметров - сопряженные диаметры (рис.33).

Таким образом, построение данной окружности сводится к построению какого-нибудь эллипса (рис.34) на плоскости σ .

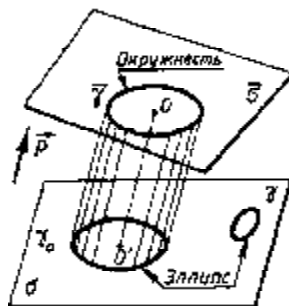


Рис.33.

Эллипс обычно задается двумя хордами AB и CD , принадлежащими сопряженным диаметрам. Их общей серединой является центр O эллипса. Ход построения изображения окружности ясен из рисунка 34.

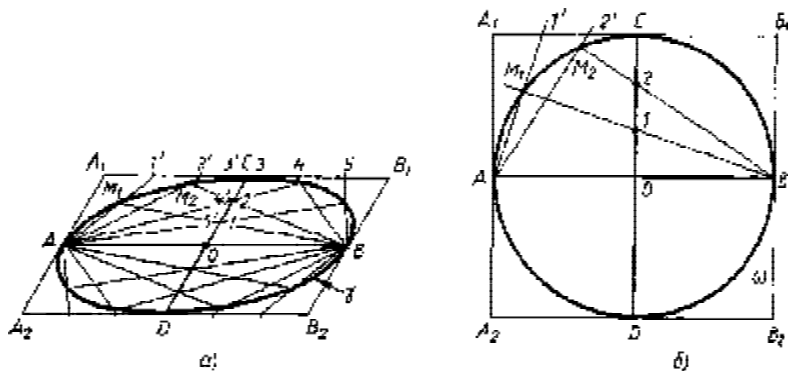


Рис.34.

15. Изображение многогранников в параллельной проекции

Лемма 2. Пусть четырехугольники $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ лежащие соответственно в плоскостях σ_1 и σ , аффинно-эквивалентны. Тогда существует такая плоскость σ_0 , что проекция четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ на эту плоскость по направлению вектора \vec{r} , ортогонального к плоскости σ_1 , подобна четырехугольнику $ABCD$ (рис.35).

Здесь учитывается порядок вершин, в котором записаны данные четырехугольники, т.е. предполагается, что существует аффинное отображение $f: \sigma \rightarrow \sigma_1$, такое, что $A_1 = f(A)$, $B_1 = f(B)$, $C_1 = f(C)$, $D_1 = f(D)$.

Теорема 10. (Теорема Польке-Шварца). Вершины любого четырехугольника $ABCD$ плоскости σ , заданные в определенном порядке, могут служить изображением аффинного репера, равного данному реперу $R^* = (A^*, B^*, C^*, D^*)$.

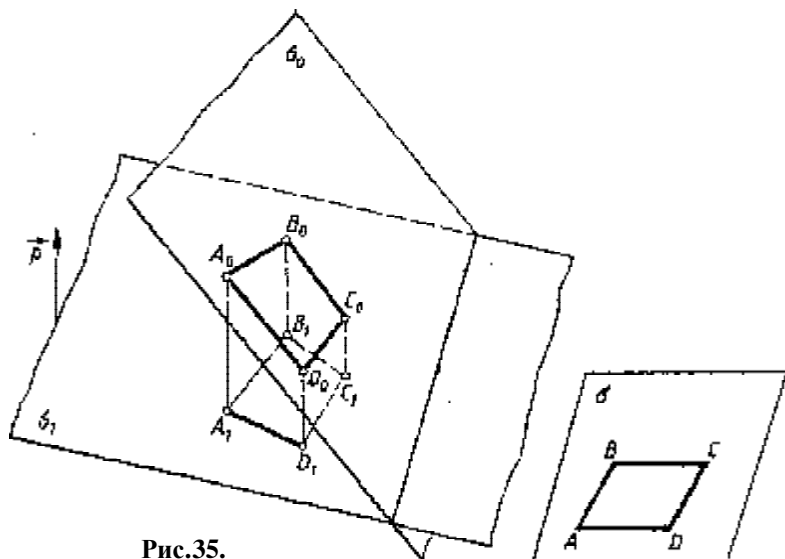


Рис.35.

Доказательство. На прямых A^*C^* и B^*D^* возьмем точки M^* и N^* так, чтобы $(A^*C^*, M^*) = (AC, E)$ и $(B^*D^*, N^*) = (BD, E)$. Здесь E - точка пересечения прямых AC и BD (рис.36). проведем какую-нибудь плоскость $\sigma_1 \perp M^*N^*$, и рассмотрим ортогональную проекцию $A_1B_1C_1D_1$ репера R^* на эту плоскость. Точки M^* и N^* проектируются в одну и ту же точку E_1 . Так как $(A_1C_1, E_1) = (A^*C^*, M^*) = (AC, E)$ и $(B_1D_1, E_1) = (B^*D^*, N^*) = (BD, E)$, то четырехугольники $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ аффинно-эквивалентны.

По лемме 2 существует такая плоскость σ_0 , что проекция $A_0B_0C_0D_0$ четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ на эту плоскость по направлению вектора M^*N^* подобна четырехугольнику $ABCD$. Из рисунка 36 видно, что четырехугольник $A_0B_0C_0D_0$ есть параллельная проекция репера R^* на плоскость σ_0 .

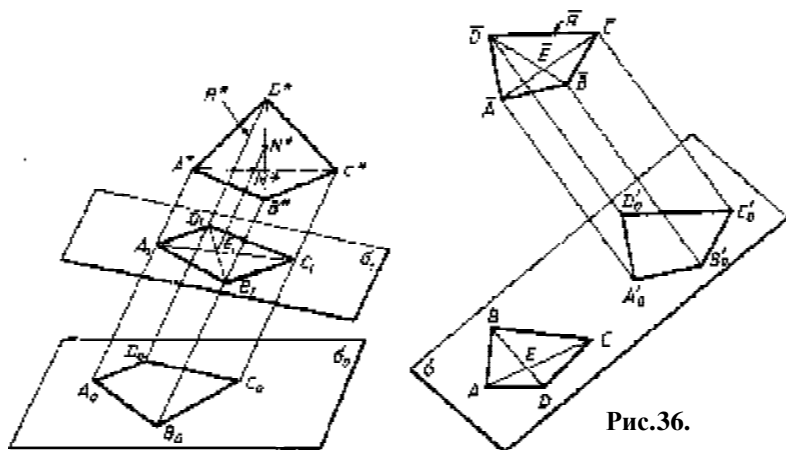


Рис.36.

Рассмотрим какое-нибудь движение трехмерного пространства E_3 , в котором плоскость σ_0 переходит в плоскость σ . Обозначим через $\bar{R} = (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ образ репера R^* , а через $A'_0 B'_0 C'_0 D'_0$ образ четырехугольника $A_0 B_0 C_0 D_0$ в этом движении. Мы видим, что проекция $A'_0 B'_0 C'_0 D'_0$ репера \bar{R} на плоскость σ подобна данному четырехугольнику $ABCD$, т.е. $ABCD$ - изображение репера \bar{R} , равного данному реперу R^* .

Тетраэдр. Пусть $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ - тетраэдр-оригинал. A_0, B_0, C_0, D_0 - проекции его вершин, а A, B, C, D - изображения его вершин (рис.37). Тогда фигура, состоящая из треугольников ABC , ABD , ACD и BCD , и будет изображением этого тетраэдра. Другими словами, изображением тет-

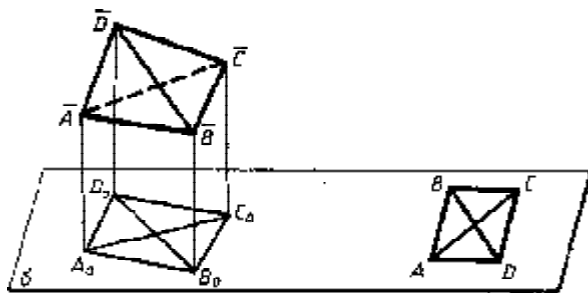


Рис.37.

раздра \overline{ABCD} является фигура, состоящая из всех сторон и диагоналей четырехугольника $ABCD$.

Из теоремы Польке-Шварца следует важный вывод: *вершины произвольного четырехугольника плоскости σ могут служить изображением вершин тетраэдра, равного данному тетраэдру.* Поэтому если задан тетраэдр, то для его изображения достаточно начертить на плоскости σ произвольный четырехугольник и провести его диагонали. На рисунке 38 изображено несколько тетраэдров, причем четырехугольник $ABCD$ выпуклый, а четырехугольники $MNPQ$ и $EFGH$ невыпуклые.

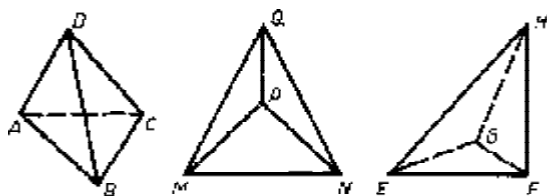


Рис.38.

Параллелепипед. Изображением параллелепипеда (в том числе прямоугольного и куба) является фигура, состоящая из трёх пар параллелограммов, причем в каждой паре один получается из другого параллельным переносом (рис.39).

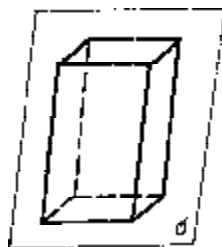


Рис.39.

Для того, чтобы построить изображение данного параллелепипеда $\overline{ABCD A' B' C' D'}$, следует учесть, что, например, точки $\overline{A}, \overline{B}, \overline{D}, \overline{A'}$ являются вершинами тетраэдра (рис.40, а), поэтому по теореме Польке-Шварца в качестве их изображений можно выбрать вершины произвольного четыреху-

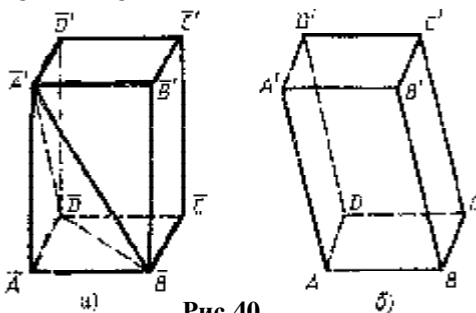


Рис.40.

гольника $ABDA'$ плоскости σ . Изображение остальных вершин получается построением с учетом того, что изображениями граней параллелепипеда являются параллелограммы (рис.40, б).

Призма. Изображением n -угольной призмы на плоскости σ является фигура, состоящая из двух равных n -угольников (один получается из другого параллельным переносом), изображающих основания призмы, и n параллелограммов, для каждого из которых противоположными сторонами являются изображения параллельных сторон оснований (рис.41).

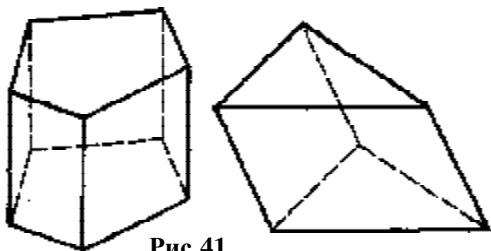


Рис.41.

Построение изображения данной призмы выполняется аналогично построению изображения параллелепипеда. Основания призмы изображаются на чертеже с учетом правил изображения плоских многоугольников.

Пирамида. Изображением пирамиды является фигура, состоящая из многоугольника, изображающего основание пирамиды-оригинала, и нескольких треугольников с общей вершиной, изображающих боковые грани пирамиды (рис.42).

Для построения изображения данной пирамиды следует учесть, что по теореме Польке-Шварца за изображение вершины пирамиды и трех вершин основания можно взять вершины произвольного четырехугольника плоскости σ . Тогда изображения остальных вершин основания и всех ребер получаются построением с учетом правил изображений плоских многоугольников.

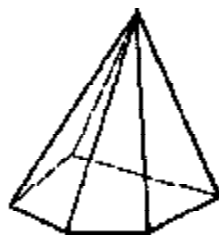


Рис.42.

16. Изображения цилиндра, конуса и шара

Цилиндр. Пусть данный цилиндр-оригинал \bar{F} расположен так, что его ось $\overline{OO_1}$ параллельна плоскости изображения σ .

Направление проектирования выбрано следующим образом: оно не параллельно плоскостям оснований цилиндра, но параллельно плоскости, проходящей через ось цилиндра перпендикулярно к плоскости σ . Такой выбор направления проектирования дает наглядное изображение цилиндра.

Выясним, как изображается цилиндр \bar{F} при выбранном нами проектировании (рис.43). Пусть $\bar{\gamma}$ - окружность верхнего основания цилиндра \bar{F} , а \overline{AB} и \overline{CD} - взаимно перпендикулярные диаметры этой окружности, причем $\overline{AB} \parallel \sigma$. Проведем образующие $\overline{AA_1}$ и $\overline{BB_1}$ цилиндра \bar{F} (так называемые *контурные образующие*) и рассмотрим касательные \overline{AM} и \overline{BN} к окружности $\bar{\gamma}$ в точках \bar{A} и \bar{B} . При проектировании цилиндра \bar{F} на плоскость σ окружность $\bar{\gamma}$ проектируется в эллипс γ с осями AB и CD , которые являются проекциями диаметров \overline{AB} и \overline{CD} (рис.44).

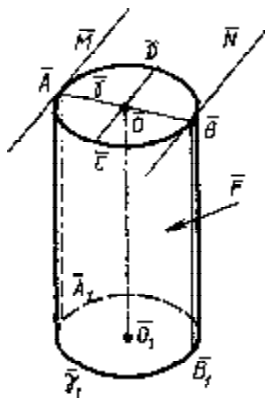


Рис.43.

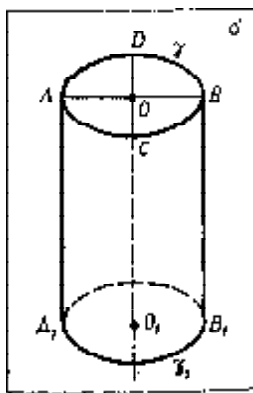


Рис.44.

Так как плоскость, определяемая прямыми $\overline{AA_1}$ и \overline{AM} , перпендикулярна к плоскости σ , то проекции этих прямых совпадают. Но проекция AM касательной \overline{AM} является касательной к

эллипсу γ . Поэтому проекция AA_1 контурной образующей $\overline{AA_1}$ является касательной к эллипсу γ (рис.44). аналогично проекция BB_1 другой контурной образующей является касательной к тому же эллипсу.

Замечание. В силу того, что ось $\overline{OO_1}$ цилиндра-оригинала параллельна плоскости изображения и диаметр \overline{AB} параллелен этой плоскости, то

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OO_1}} = \frac{AB}{OO_1}.$$

Это обстоятельство часто используется при решении задач.

Конус. Аналогично случаю цилиндра предположим, что ось \overline{SO} данного конуса \overline{F} параллельна плоскости изображения σ . Направление проектирования выберем так, чтобы: а) прямая, проходящая через вершину \overline{S} конуса по этому направлению, пересекала плоскость σ_1 основания в некоторой точке \overline{K} вне окружности $\overline{\gamma}$ основания, причем $\overline{OK} > \overline{OS}$ (рис.45); б) плоскость \overline{OSK} была перпендикулярна к плоскости σ .

Выясним как изображается конус при таком проектировании. Пусть \overline{AB} и \overline{CD} взаимно перпендикулярные диаметры окружности основания $\overline{\gamma}$ и $\overline{AB} \parallel \sigma$. Проведем касательные \overline{KM} и \overline{KN} к окружности $\overline{\gamma}$, \overline{M} и \overline{N} - точки касания (рис.45), и рассмотрим образующие \overline{SM} и \overline{SN} конуса \overline{F} (контурные образующие). При проектировании конуса на плоскость σ окружность $\overline{\gamma}$ проектируется в эллипс γ с осями AB и CD , а вершина \overline{S} в точку S , расположенную вне эллипса γ (рис.46). Отрезки AB и CD являются проекциями диаметров \overline{AB} и \overline{CD} окружности $\overline{\gamma}$. В силу условия $\overline{OK} > \overline{OS}$ имеем $AB > CD$, т.е. AB - большая ось эллипса γ , а CD - малая; отрезок CD принадлежит проекции SO оси конуса (рис.46).

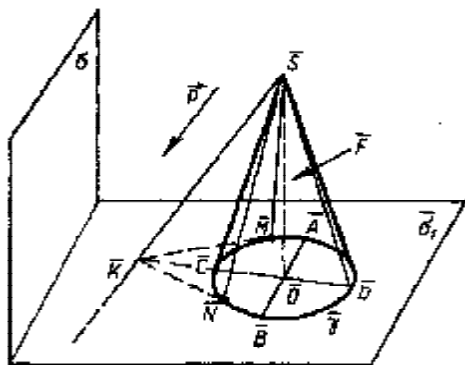


Рис.45.

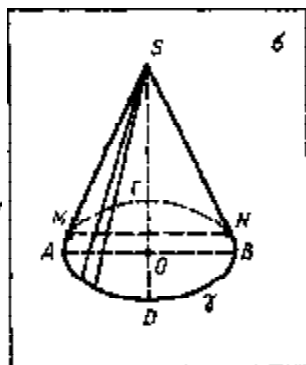


Рис.46.

Так как плоскость \overline{SMK} параллельна направлению проектирования, то проекции прямых \overline{SM} и \overline{MK} совпадают. Поэтому проекция SM контурной образующей \overline{SM} является касательной к эллипсу γ в точке M . Так как \overline{KM} и \overline{KN} - касательные к окружности $\bar{\gamma}$, то $\overline{MN} \perp \overline{OK}$. С другой стороны $\overline{AB} \perp \overline{OK}$, поэтому $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, тогда хорда MN эллипса γ параллельна оси AB и, следовательно, не проходит через центр эллипса.

Шар. Пусть \bar{F} - шар, а F_0 - параллельная проекция этого шара на плоскость изображения σ (рис.47). все прямые, касательные к шару и имеющие направление проектирования, образуют цилиндрическую поверхность вращения, которая пересекает плоскость σ по эллипсу γ_0 . Эта линия называется *очертанием шара*. Ясно, что проекция F_0 шара на плоскость σ есть часть плоскости ограниченная очертанием шара.

Если направление проектирования не перпендикулярно к плос-

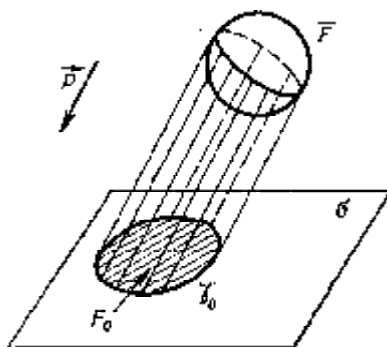


Рис.47.

кости σ , то γ_0 - эллипс, отличный от окружности и проекция F_0 не является наглядным изображением шара. Если направление проектирования перпендикулярно плоскости изображения, тогда F_0 является кругом и мы имеем наглядное изображение шара.

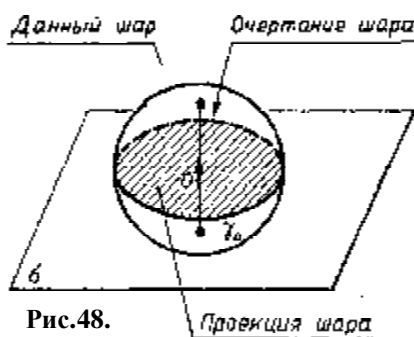


Рис.48.

В дальнейшем будем считать, что плоскость изображения σ проходит через центр шара и $\vec{p} \perp \sigma$, а очертание γ_0 шара - окружность большого круга (рис. 48).

Чтобы изображение шара стало более наглядным, изображают кроме его очертания еще какую-либо окружность большого круга - *экватор* и точки пересечения диаметра шара, перпендикулярного к плоскости экватора, с поверхностью шара - *полюсы*.

Рассмотрим вопрос об изображении экватора и полюсов, соответствующих этому экватору. Пусть $\bar{\gamma}_1$ - экватор, $\bar{\sigma}_1$ - его плоскость, а γ_1 - проекция этого экватора на плоскость σ , т.е. эллипс. Проведем диаметр AB экватора $\bar{\gamma}_1$, лежащий на прямой $\bar{\sigma}_1 \cap \sigma$, и перпендикулярный к нему диаметр \overline{CD} (рис.49: на этом рисунке данная сфера и линии $\bar{\gamma}_1$ и γ_1 не изображены). Так как эллипс γ_1 является ортогональной проекцией экватора $\bar{\gamma}_1$ на плоскость σ , то отрезок AB - большая ось этого эллипса, а отрезок CD (проекция отрезка \overline{CD} на плоскость σ) - малая ось. Но AB также диаметр очертания γ_0 шара, поэтому эллипс γ_1 и очертание шара имеют общие касательные в точках A и B (рис.50).

Итак, если на плоскости изображений σ дано очертание γ_0 шара с центром в точке O , то для построения проекции экватора, т.е. эллипса γ_1 , достаточно провести диаметр AB окружности γ_0 ,

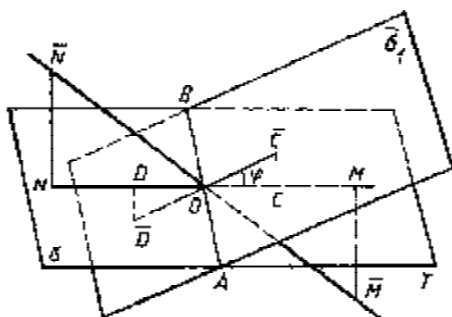


Рис.49.

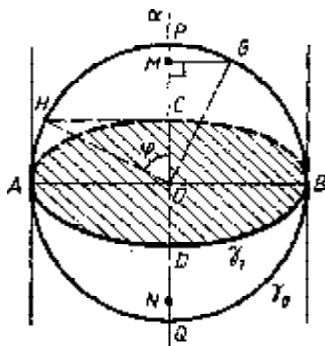


Рис.50.

построить серединный перпендикуляр этого отрезка и на нем отложить отрезок CD так, чтобы точка O была серединой этого отрезка. Тогда эллипс, построенный на осях AB и CD , и будет искомым эллипсом (рис.50). Отрезок CD можно выбрать произвольно при условии, что $CD < AB$. Из рисунка 49 видно, что

$$OC = R \cos \varphi, \quad (**)$$

где R - радиус шара \bar{F} , O - его центр, а φ - угол между плоскостями σ и σ_1 . Выбирая $CD < AB$ произвольно, по формуле (**) находим φ , т.е. определяем положение плоскости экватора.

Угол φ имеет простой геометрический смысл. Пусть касательная к эллипсу γ_1 в точке C пересекает окружность γ_0 в точке H (рис.50). Из прямоугольного треугольника OHC находим $OC = R \cos HOC$. Сравнивая это равенство с формулой (**) получим $\varphi = \angle HOC$.

Построим теперь проекции M и N полюсов \bar{M} и \bar{N} , соответствующих экватору $\bar{\gamma}_1$. Так как отрезок $\overline{MN} \perp \sigma_1$, то $\overline{MN} \perp AB$, поэтому $MN \perp AB$, а тогда точки M и N лежат на прямой CD и расположены симметрично относительно точки O . Чтобы их

построить, заметим, что прямая \overline{MN} образует с плоскостью σ угол $\pi/2 - \varphi$, поэтому (рис.49)

$$OM = R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = R \sin \varphi.$$

С другой стороны, в прямоугольном треугольнике OCH на рисунке 50 имеем

$$CH = R \sin \varphi,$$

поэтому

$$OM = CH.$$

Итак, отложив на лучах OC и OD от точки O отрезки OM и ON , равные отрезку CH , получим точки M и N .