Лекция 2.

Основные факты проективной геометрии

8. Полный четырёхвершинник (четырёхсторонник)

Определение 3. ***Полным четырёхвершинником*** *называется фигура, состоящая из четырёх точек проективной плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и шести прямых, соединяющих попарно эти точки.*

Указанные точки называются *вершинами*, а прямые - *сторонами* полного четырёхвершинника.

На рисунке 15 изображен полный четырехвершинник $ABCD$ с вершинами в точках A,B,C,D и сторонами AB,BC,CD,DA,AC,BD. Стороны, не имеющие общей вершины, называются *противоположными*. В четырехвершиннике $ABCD$ противоположными являются стороны AB и CD, BC и DA, AC и BD. Точки пересечения противоположных сторон называются *диагональными точками*, а прямые, попарно соединяющие диагональные точки, - *диагоналями* полного четырехвершинника. На рисунке 15 P,Q,R - диагональные точки, а PQ,QR,RP - диагонали полного четырехвершинника $ABCD$.

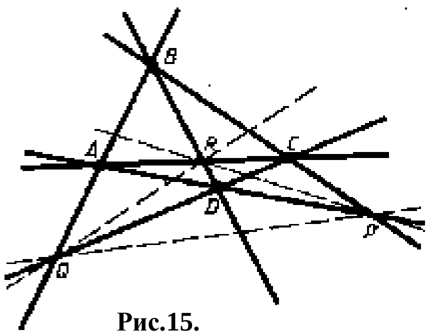

Рис.15.

Дадим, для примера, определение четырёхсторонника, двойственное определению четырехвершинника.

Определение 4. ***Полным четырёхсторонником*** *называется фигура, образованная четырьмя прямыми, из которых никакие три не являются конкурентными, и шестью точками их пересечения.*

На рисунке 15 названные прямые суть PA,PB,QB,QC. Прямые PQ,QR,RP - диагонали четырёхсторонника.

Теорема 3. *Точки пересечения одной диагонали с двумя другими делят отрезок между вершинами четырехвершинника (четырёхсторонника) гармонически.*

Пусть $ABCD$ - полный четырехвершинник, P,Q,R - его диагональные точки. Рассмотрим (рис.16) одну из его диагоналей, например PQ, и отметим на ней точки M и N, где она

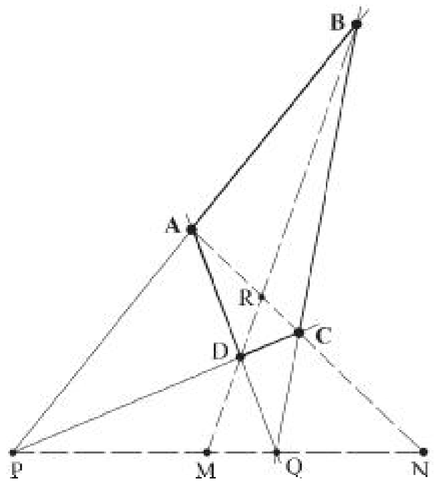

Рис.16.

пересекается с двумя другими диагоналями. Тогда теорема утверждает существование равенства $(PQMN) = -1$.

Для доказательства обратим внимание на то, что

$$x = (PQMN) = (ACRN) \text{ (проектируем из точки } B\text{)},$$

$$(ACRN) = (QPMN) \text{ (проектируем из точки } D\text{)}.$$

Известно, что

$$(QPMN) = \frac{1}{(PQMN)};$$

таким образом,

$$x = \frac{1}{x},\ x^2 = 1,\ x = \pm 1.$$

Так как M, N разделяют P, Q, то двойное отношение x должно быть отрицательным и потому оно должно быть равно именно -1, что мы и хотели доказать.

Следствие 1. *Две вершины, лежащие на стороне полного четырехвершинника, гармонически разделяют пару точек, состоящую из диагональной точки и точки, в которой эта сторона пересекает диагональ, проходящую через две другие диагональные точки.*

Рассмотрим четыре конкурентные прямые a, b, c, d. Будем говорить, что *пара прямых* a, b *гармонически разделяет пару прямых* c, d *, если* $(abcd) = -1$.

Следствие 2. *Две противоположные стороны полного четырехвершинника гармонически разделяют две диагонали, проходящие через точку пересечения этих сторон.*

На проективной плоскости, так же как и на евклидовой плоскости, можно решать задачи на построение, с одним лишь различием, на проективной плоскости не используется циркуль, так как окружность не является инвариантом. Таким образом на проективной плоскости при выполнении построений используется одна лишь линейка, полагая, что с помощью линейки как инструмента геометрических построений можно строить прямые, проходящие через данные или построенные точки.

Задача 1. На проективной прямой p даны три точки P, Q, M, построить точку X так, чтобы она была четвертой гармонической к точкам P, Q, M.

Решение. Для решения поставленной задачи воспользуемся теоремой 3. Построим полный четырехвершинник (рис.17) $ABCD$ так, чтобы точки P и Q были диагональными точками, а M - точкой пересечения прямой PQ со стороной, проходящей через

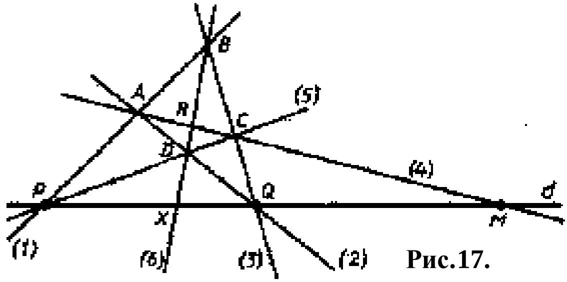

Рис.17.

третью диагональную точку R. Тогда сторона BD пересечет прямую PQ в искомой точке X. Из этого анализа вытекает способ построения точки X в последовательности обозначенной числами в круглых скобках.

9. Проективные отображения прямых и пучков. Пусть g и g' - две прямые проективной плоскости. *Взаимно однозначное отображение множества точек прямой g на множество точек прямой g' называется **проективным**, если оно сохраняет сложное отношение четырех точек, в том числе и гармоническое.*

Ясно, что для двух произвольных прямых существует бесконечное множество проективных отображений одной из этих прямых на другую.

Пусть теперь g и g' - две прямые проективной плоскости и O - точка, не лежащая на этих прямых. Каждой точке M прямой g поставим (рис.18) в соответствие проекцию M' этой точки на прямую g' из центра O. Так как на проективной плоскости любые две прямые пересекаются, то полученное отображение $f: g \to g'$ является взаимно однозначным, при этом сохраняется сложное отношение четырёх

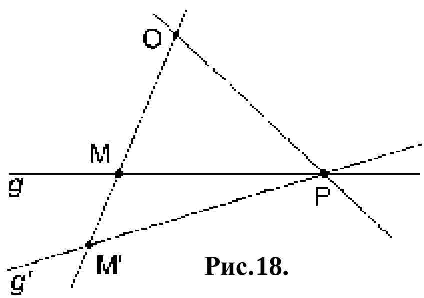

Рис.18.

точек, т.е. отображение f является проективным отображением. Такое отображение называется *перспективным отображением прямой* g *на прямую* g'. Точка O называется *центром перспективы*.

Теорема 4. *Для того, чтобы проективное отображение* $f : g \to g'$ *было перспективным, необходимо и достаточно, чтобы точка пересечения прямых* g *и* g' (рис.19) *переходила в себя*.

Рассмотрим задачу на построение образов точек при проективном отображении прямых.

Задача 2. В проективном отображении $f : g \to g'$ репер $R = (A, B, C)$ переходит в репер $R' = (A', B', C')$. Построить образ произвольной точки прямой g.

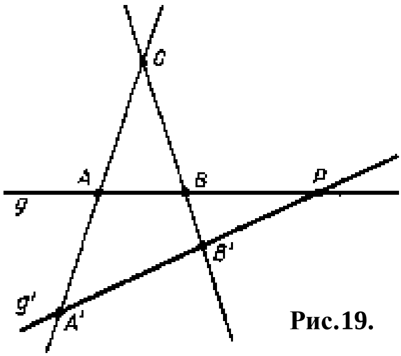

Рис.19.

Решение. Представим отображение f как произведение двух перспективных отображений. Проведём (рис.20) прямую AA' и возьмем на ней две точки O и O' отличные от точек A и A'. Построим точки B_0 и C_0. Обозначим через g_0 прямую B_0C_0 и рассмотрим перспективные отображения $f_1 : g \to g_0$ с центром в точке O и $f_2 : g_0 \to g'$ с центром в точке O'. Отображение $f_2 f_1 : g \to g'$ переводит точки A, B, C в точки A', B', C', т.е. совпадает с отображением f.

Отсюда следует простой способ построения образа M' произвольной точки $M \in g$. Проводим прямую OM и находим точку M_0, проведя затем прямую M_0O' находим точку M'.

Пользуясь принципом двойственности, введем понятие проективного отображения пучков. Рассмотрим два пучка прямых с

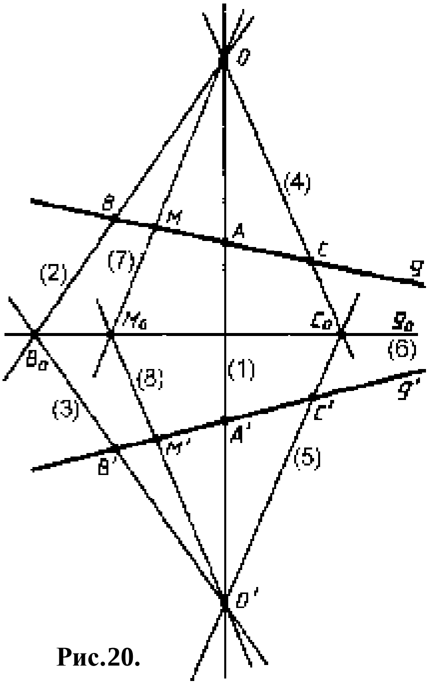

Рис.20.

центрами в точках O и O'. *Взаимно однозначное отображение пучка O на пучок O' называется проективным, если оно сохраняет сложное отношение четырех прямых.*

Рассмотрим пучки (рис.20) с центрами в точках O и O', и прямую d, не проходящую через точки O и O'. Каждой прямой a пучка O поставим в соответствие прямую a' пучка O', которая проходит через точку пересечения прямых a и d. Построенное отображение пучка O на пучок O' является проективным и называется *перспективным отображением пучка O на пучок O'*. Прямая d называется *осью перспективы*.

Имеет место теорема, двойственная теореме 4.

Теорема 5. *Для того, чтобы данное проективное отображение одного пучка на другой пучок было перспективным, необходимо и достаточно, чтобы прямая, проходящая через центры пучков, переходила в себя.*

Рассмотрим задачу на построение образов прямых при проективном отображении пучков. Эта задача двойственна предыдущей задаче, и её решение получается из решения предыдущей задачи по принципу двойственности.

Задача 3. В проективном отображении f пучка O на пучок O' три прямые a, b, c переходят соответственно в прямые a', b', c'. Построить образ произвольной прямой m пучка O.

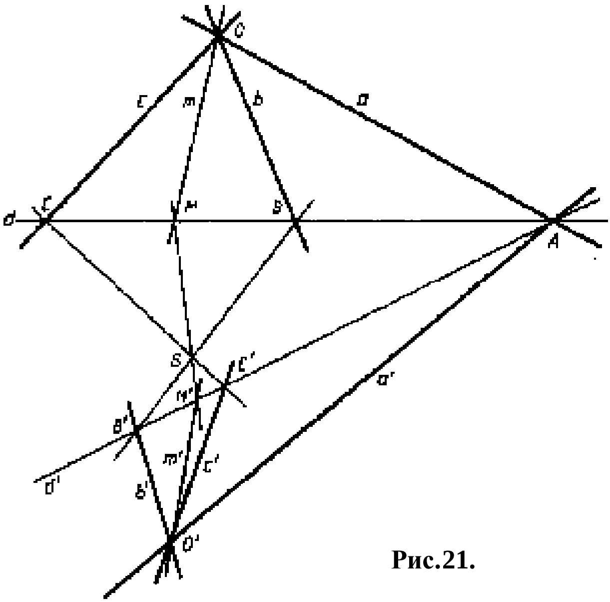

Рис.21.

<u>Решение</u>. Через точку A пересечения (рис.21) прямых a, a' проведём две прямые d, d', отличные от прямых a, a' и построим точки B, B', C, C'. Отображение f порождает проективное отображение $\varphi : d \to d'$ по закону: точке M прямой d ставится в соответствие такая точка M' прямой d', что $O'M' = f(OM)$. Так как f - проективное отображение, то и φ - проективное отображение. Но $\varphi(A) = A$, поэтому φ - перспективное отображение и его центром является точка S пересечения прямых BB' и CC'.

Для построения образа произвольной прямой m пучка O находим сначала точку $M = m \cap d$, а затем $M' = SM \cap d'$.

10. Проективные преобразования прямой. Если прямые g и g' совпадают, то проективное отображение $f : g \to g$ называется *проективным преобразованием* прямой g.

Если каждая точка прямой переходит саму в себя, то мы имеем *тождественное преобразование*. Ясно, что при тождественном преобразовании прямой все её точки неподвижные.

Теорема 6. *Если* R *и* R' *- произвольные реперы на прямой* g *, то существует одно и только одно проективное преобразование прямой* g *, которое репер* R *переводит в репер* R' **.**

Если при преобразовании $f:g\to g$ прямой g некоторая её точка перешла в себя, то мы эту точку будем называть *инвариантной* (*неподвижной*) точкой относительно данного преобразования. Теорема 6 как раз и говорит о том, что такие точки имеются.

Покажем, что нетождественное проективное преобразование прямой не может иметь более двух неподвижных точек.

Теорема 7. *Если проективное преобразование прямой имеет три неподвижные точки, то оно является тождественным преобразованием.*

Доказательство. Пусть A,B,C - три неподвижные точки проективного преобразования $f:g\to g$. Рассмотрим тождественное преобразование $f_0:g\to g$. Так как в преобразованиях f и f_0 репер $R=(A,B,C)$ переходит в себя, то теореме 6 эти преобразования совпадают , т.е. f -тождественное преобразование.

Рассмотрим задачу построения образов точек при проективном преобразовании.

Задача 4. При проективном преобразовании $f:g\to g$ репер $R=(A,B,C)$ переходит в репер $R'=(A',B',C')$. Построить образ произвольной точки M прямой g .

Решение. Проведем (рис.22) какую-нибудь прямую g_1, отличную от прямой g , и возьмем точку P, не лежащую на прямых g,g_1 . Построим образы точек A,B,C,M в перспективном отображении $f_1:g\to g_1$ с центром P. Используя задачу 2 построим образ M' точки M_1 в проективном отображении

$f_2 : g_1 \to g$, которое репер (A_1, B_1, C_1) переводит в репер (A', B', C'). Ясно, что $f_2 f_1$-проективное преобразование прямой g , которое репер R переводит в репер R' и поэтому $f_2 f_1 = f$. Отсюда следует, что M'- искомая точка, так как $f(M) = f_2 f_1(M) = f_2(M_1) = M'$.

11. Инволюция

Определение 4. *Нетождественное проективное преобразование прямой называется инволюцией, если оно совпадает с обратным преобразованием.*

Из определения следует, что если произвольная точка M в заданной инволюции переходит в точку M', то точка M' в той же инволюции переходит в точку M , т.е. инволюция $f : g \to g$ разбивает все точки прямой на пары точек, соответствующих данной инволюции.

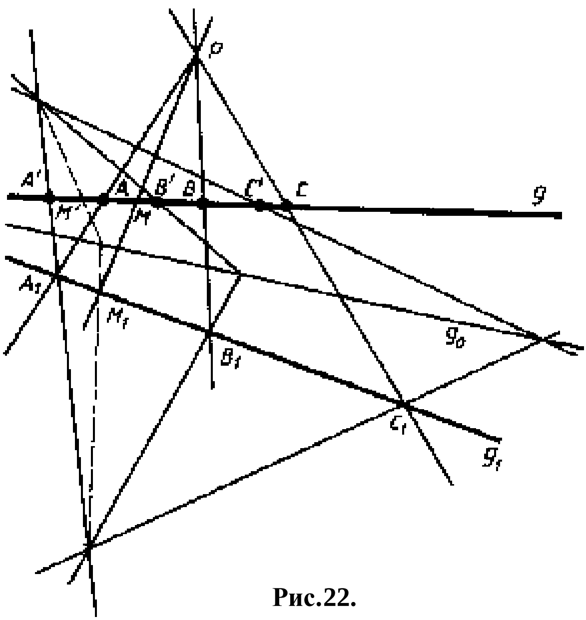

Рис.22.

Признак инволюции выражает следующая теорема.

Теорема 8. *Если в данном проективном преобразовании* $f: g \to g$ *какая-то точка* A *прямой* g *переходит в точку* B, *отличную от точки* A, *а точка* B *переходит в точку* A, *то* f *- инволюция.*

Так как инволюция - нетождественное преобразование прямой, то по теореме 7 она не может иметь более двух инвариантных точек. В проективной геометрии доказывается, *что любая инволюция либо не имеет ни одной инвариантной точки, либо имеет две инвариантные точки.*

Если инвариантных точек нет, то инволюция называется *эллиптической*, и *гиперболической*, если имеются две инвариантные точки.