VARIETY OF GEOMETRIES

A. K. TSIKH

The history of some geometries is discussed. Different approaches to building of geometries, including the Klein's program, are presented. This program is used for defining the types of geometry. Starting from the projective geometry based on the perspective theory in fine arts a procedure for the construction of many types of geometries is described.

Рассказывается об истории некоторых геометрий. Излагаются различные подходы к построению геометрий, а также программа Клейна, с помощью которой определяются типы геометрий. Показано, как с помощью проективной геометрии, основанной на теории перспективы в изобразительном искусстве, можно построить многие другие типы геометрий.

МНОГООБРАЗИЕ ГЕОМЕТРИЙ

А. К. ЦИХ

Красноярский государственный университет

ДЛЯ ЧЕГО НУЖНЫ РАЗЛИЧНЫЕ ГЕОМЕТРИИ

Геометрия – это греческое слово, происходящее от слов *гео* – Земля и *метрон* – измерение. Таким образом, само слово показывает, что возникновение геометрии связано с землемерием. Элементы геометрической науки зародились в глубокой древности, более 4000 лет назад. Однако лишь со времен Пифагора (V в. до н. э.), после доказательства его знаменитой теоремы, геометрия в интеллектуальном смысле отделилась от искусства измерения, а спустя два столетия усилиями Евклида она превратилась в цельную научную систему. В то время были созданы основы евклидовой геометрии.

Ближе к нашему времени параллельно с развитием других наук развивалась и геометрия. В сути своей оставаясь неизменной, она расширяла свои методы и предмет исследования. Так, в эпоху Возрождения на основе теории перспективы, созданной в живописи, появилась проективная геометрия. Ее главное отличие от евклидовой геометрии состоит в том, что в ней нет параллельных прямых. Развитие проективной геометрии было обусловлено потребностями начертательной геометрии в архитектуре и инженерии того времени. В начале XIX века, как бы возвращаясь к проблеме землемерия на новом уровне, создается дифференциальная геометрия, призванная проводить измерения (вычисления) на искривленных фигурах – поверхностях. Эти исследования привели к появлению неевклидовых геометрий, связанных с такими именами, как К.Ф. Гаусс, Н.И. Лобачевский, Г.Б. Риман. Неевклидовы геометрии сыграли определяющую роль при построении А. Эйнштейном теории относительности, в которой необходимо было принять факт искривленности окружающего нас пространства.

Большое влияние на развитие геометрической науки в XX веке оказали исследования в физике, химии и биологии на уровне микроявлений, происходящих в пределах малых расстояний. При этом геометрия стала терять наглядность, поскольку наш глаз не может созерцать явления на уровне микромира – мира атомов и молекул, для описания которого были привлечены многомерные и даже бесконечномерные пространства.

Упомянутые геометрии составляют далеко не полный перечень всего многообразия существующих геометрий. Вопросы, связанные с основаниями геометрии, очень тесно переплетаются с интересами психологии и теории познания в целом, которые сами исследуют вопрос о том, как возникают пространственное воображение и интуиция, и о том, имеем ли мы право пользоваться математическими методами для изучения окружающего нас пространства. Принятие того или иного типа геометрии всегда зависит от характера исследуемой проблемы. Сама же необходимость построения многих различных геометрий связана исключительно со сложной природой окружающего нас мира.

КАК ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ ТИП ГЕОМЕТРИИ

Аксиоматический подход в геометрии

Как уже говорилось, элементы геометрической науки зародились в глубокой древности. По мере накапливания сведений о метрических соотношениях в треугольниках и других фигурах стали появляться сравнительно строгие логические доказательства геометрических утверждений. Систематизация этих сведений и утверждений позволила Евклиду в III в. до н.э. сформулировать основные положения (аксиомы), из которых логическими умозаключениями выводились различные свойства простейших фигур на плоскости и в пространстве. Так сформировалась исторически первая геометрическая система – евклидова геометрия.

Под геометрической системой в данной ситуации понимается аксиоматика евклидовой геометрии, в которой основными (неопределяемыми) объектами служат точки, прямые и плоскости, а отношения между этими объектами выражены словами “принадлежит”, “между”, “конгруэнтен”. Природа основных объектов и отношений между ними может быть какой угодно, лишь бы эти объекты и отношения удовлетворяли заданной системе аксиом (например, в системе аксиом евклидовой геометрии, предложенной в 1898 году Давидом Гильбертом, число таких аксиом 20). Упомянутые объекты, отношения и аксиомы должны быть такими, чтобы из них можно было логически вывести все содержание геометрии, не обращаясь далее к интуиции.

Метод координат

Геометрическую систему (или, более кратко, геометрию) можно строить не только на основе аксиоматического подхода. В этом направлении весьма плодотворным оказался метод координат, введенный Рене Декартом в XVII столетии. Введение координат для описания точек в пространстве или на плоскости сыграло большую роль в развитии таких отраслей точного естествознания, как небесная механика, гидродинамика, теория упругости и т.д. Фактически Декарт придумал координаты для построения модели евклидовой геометрии, ибо он реализовал неопределяемый в аксиоматической теории объект – точку в виде тройки чисел (x, y, z) в пространстве или в виде пары чисел (x, y) на плоскости, а прямую и плоскость задал как совокупность решений некоторых уравнений. Плодотворность метода координат была обусловлена возможностью применения математического анализа (ибо здесь мы имеем дело с числами), поэтому геометрическую систему, основанную на методе координат, называют аналитической геометрией.

Определение геометрии по группе преобразований

Различные геометрии можно строить как в рамках аксиоматического, так и координатного подходов. Схема такого построения была предложена Феликсом Клейном в его знаменитой Эрлангенской программе 1872 года (см.[1] или [2]). Сущность этой программы состоит в следующем. Как известно, в евклидовой геометрии фигуры сравнивают между собой посредством наложения одной на другую. При этом наложение осуществляется с помощью движения (перемещения), которое в случае геометрии плоскости сводится к последовательному применению таких преобразований (процедур), как параллельный перенос, вращение или зеркальное отражение. Эти преобразования характеризуются тем, что сохраняют расстояния между точками. Вместо движений можно выбрать какую-нибудь иную совокупность геометрических преобразований и объявить равными фигуры, получающиеся одна из другой с помощью преобразований этой совокупности; это приведет к иной геометрии, изучающей свойства фигур, не меняющиеся при рассматриваемых преобразованиях. Естественно потребовать, чтобы введенное равенство удовлетворяло следующим условиям:

1) каждая фигура F равна сама себе;

2) если фигура F равна фигуре F', то и F' равна F;

3) если фигура F равна F', а F' равна F'', то и F равна F''.

Свойство 3) подчеркивает, что если одно преобразование нашей совокупности переводит F в F', а другое переводит F' в F'', то преобразование, состоящее в последовательном применении этих двух, должно также включаться в данную совокупность преобразований. Очевидно, второе свойство требует, чтобы наряду с любым преобразованием (переводящим F в F') в данную совокупность входило и преобразование, возвращающее точки на место; такое преобразование называется обратным к первоначальному. Наконец, свойство 1) позволяет заключить, что в совокупность преобразований входит такое, которое любую фигуру переводит в себя, то есть оставляет все точки неподвижными; такое преобразование называется тождественным или единичным. Если совокупность преобразований плоскости или пространства обладает отмеченными свойствами:

1) содержит тождественное преобразование,

2) наряду с каждым преобразованием содержит обратное к нему,

3) вместе с любыми двумя преобразованиями содержит такое, которое равносильно их последовательному применению, то такая совокупность называется группой преобразований.

Теория, которая изучает свойства фигур, сохраняющихся при всех преобразованиях данной группы, называется геометрией этой группы. Выбор различных групп преобразований приводит к разным геометриям. Так, рассмотрение группы движений приводит к обычной евклидовой геометрии. Проективная геометрия возникает при рассмотрении группы проективных преобразований, переводящих прямые в прямые. Клейн показал [1], что многие геометрии можно получить рассмотрением подгрупп группы проективных преобразований. Некоторые из этих геометрий мы опишем ниже, а сейчас точно определим понятие проективной плоскости и ее геометрии.

ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ И ЕЕ ОСНОВНАЯ (ПРОЕКТИВНАЯ) ГЕОМЕТРИЯ

Точки и прямые проективной плоскости

Понятие проективной плоскости можно определить аксиоматически, подобно тому как это делается в планиметрии Евклида. Для этого в системе аксиом евклидовой плоскости аксиому о существовании параллельных прямых надо заменить на следующую: любые две прямые пересекаются. Идея такого видоизменения евклидовой плоскости принадлежит Жирару Дезаргу (1639 год), который был архитектором по профессии. Эту идею Дезарг заимствовал из теории перспективы, созданной художниками.

Суть понятия перспективы состоит в том, что лучи света, исходящие из каждой видимой точки предмета в направлении глаза зрителя, оставляют изображение на сетчатке глаза. Теперь представим себе, что между глазом S и предметом установлена прозрачная плоская пластинка β (рис. 1). Каждый луч, направленный от видимой точки P к глазу, пересечет пластинку в одной точке P'. Совокупность таких точек и даст изображение (перспективу) предмета на холсте или бумаге художника, расположенной в плоскости пластинки β. В частности, если в качестве видимых предметов взять две параллельные прямые в плоскости α (например, рельсы железной дороги), то по мере удаления точек P, Q вдоль этих прямых их изображения P', Q' будут сливаться в одну точку T'. Тем самым можно считать, что прямые l_1 и l_2 пересеклись на линии горизонта в некоторой точке T. Эта точка не принадлежит созерцаемой глазом S плоскости α, в то время как на β для нее существует изображение T'. Таким образом, на холсте художника изображения любых прямых пересекаются.

С использованием метода координат реализацию проективной плоскости можно осуществить следующим образом. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$

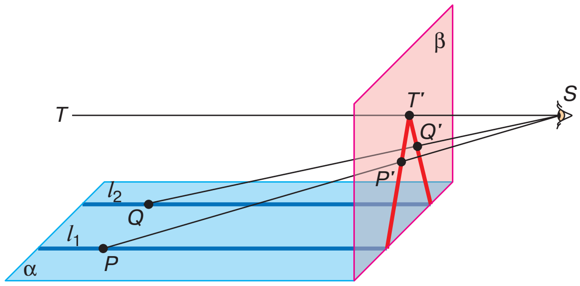

Рис. 1

переменных x_1, x_2, x_3 совокупность всех плоскостей, проходящих через начало координат $O = (0, 0, 0)$. Очевидно, любые две такие плоскости либо совпадают, либо пересекаются по прямой. Поэтому, объявив в качестве точек проективной плоскости прямые в $\mathbb{R}^3$, проходящие через O, а в качестве прямых – плоскости в $\mathbb{R}^3$, проходящие через O, мы обеспечим выполнение указанной выше аксиомы о пересечении любых двух прямых. Нетрудно убедиться, что при такой реализации точек и прямых выполнятся все аксиомы проективной плоскости.

Итак, запас точек проективной плоскости реализован в виде множества всех прямых в $\mathbb{R}^3$, проходящих через O. Заметим, что каждая такая прямая определяется любой своей точкой $(x_1, x_2, x_3) \neq O$, ибо через O и эту точку в $\mathbb{R}^3$ можно провести единственную прямую. При этом для любой точки $(x_1, x_2, x_3) \neq O$ фиксированной прямой $l \subset \mathbb{R}^3$ отношения $x_1 : x_2 : x_3$ одни и те же. Тем самым точки проективной плоскости можно характеризовать тройками чисел $x_1 : x_2 : x_3$, определенными с точностью до общего множителя, причем хотя бы одно из чисел x_1, x_2, x_3 отлично от нуля. Такие тройки чисел называются проективными (или однородными) координатами для точки проективной плоскости, которую они определяют. Сопоставим приведенную реализацию проективной плоскости с рис. 1, поясняющим понятие перспективы в живописи. Для этого предположим, что глаз наблюдателя находится в точке O – начале координат пространства $\mathbb{R}^3$ и что роль пластинки β играет плоскость $\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1\}$, которая параллельна плоскости, содержащей оси Ox_1, Ox_2, и пересекает ось Ox_3 при $x_3 = 1$ (рис. 2). Плоскость, содержащая оси Ox_1 и Ox_2, задается уравнением $x_3 = 0$. Глаз наблюдателя созерцает все точки любой прямой, проходящей через O, как одну точку. И это обстоятельство нас вполне устраивает, ибо каждая такая прямая и была объявлена точкой проективной плоскости.

Каждая прямая l, не лежащая в плоскости $\{x_3 = 0\}$, пересекает плоскость $\beta = \{x_3 = 1\}$ в единственной точке. Следовательно, отождествив такое множество прямых с плоскостью β, можно считать, что проективная плоскость слагается из евклидовой плоскости β и множества прямых в плоскости $\{x_3 = 0\}$,

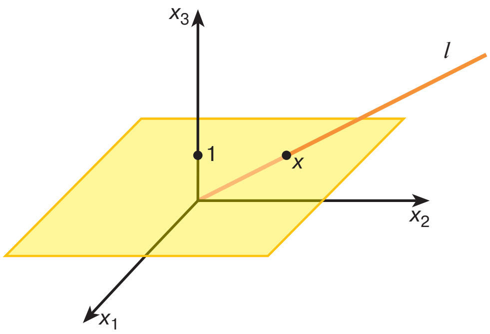

Рис. 2

проходящих через O. Последнее множество прямых определяет проективную прямую. Таким образом, проективную плоскость можно представлять как евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ с добавленной бесконечно удаленной прямой. Если $\mathbb{R}^2$ имеет координаты X_1, X_2, то ее вложение в проективную плоскость осуществляется взаимно однозначным соответствием

$$(X_1, X_2) \longleftrightarrow (X_1 : X_2 : 1).$$

Если точка $x_1 : x_2 : x_3$ не принадлежит бесконечно удаленной прямой, то есть $x_3 \neq 0$, то при указанном соответствии она сопоставляется точке $(X_1, X_2) = (x_1/x_3, x_2/x_3)$. Часть проективной плоскости, характеризуемая условием $x_3 \neq 0$, называется ее аффинной частью (плоскостью), а координаты

$$X_1 = \frac{x_1}{x_3}, \qquad X_2 = \frac{x_2}{x_3} \qquad (1)$$

(пригодные для этой части по причине того, что $x_3 \neq 0$), определенные по проективным координатам $x_1 : x_2 : x_3$, называются аффинными координатами.

Группа коллинеаций и порожденная ею проективная геометрия

После приведенного описания проективной плоскости мы можем поставить вопрос об определении группы преобразований проективной плоскости. Эта группа определяется тем свойством, что каждое входящее в нее преобразование переводит любую прямую проективной плоскости опять же в прямую. Всякое такое преобразование называется коллинеацией, или проективным преобразованием. Описание таких преобразований дает следующая

Теорема Мёбиуса. *Всякое проективное преобразование проективной плоскости задается формулами вида*

$$\begin{aligned} x_1^* &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2^* &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3^* &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \qquad (2)$$

где коэффициенты a_{ij} таковы, что при рассмотрении системы (2) *в качестве системы уравнений относительно x_1, x_2, x_3 она должна быть разрешимой при любых $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) \neq O$.*

Доказательство теоремы Мёбиуса несложное (хотя и не совсем простое); его можно прочитать в книге Клейна [1, с. 139–142].

Указанное в теореме условие разрешимости x от x^* равносильно тому, что наряду с самим преобразованием $x \longrightarrow x^*$ в группу проективных преобразований входит и обратное к нему преобразование. Единичное преобразование $x^* = x$ имеет вид (2) при $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$ и $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$. Нетрудно также проверить, что если наряду с преобразованием (2), переводящим x в x^*, рассмотреть преобразование $x^* \longrightarrow x^{**}$, имеющее вид (2) с некоторыми коэффициентами b_{ij}, то преобразование $x \longrightarrow x^{**}$ также будет иметь вид (2).

Следует заметить, что группа преобразований вида (2) весьма обширная, поскольку она выделена всего одним условием о переводе прямых в прямые. Ввиду обширности этой группы определяемая ею проективная геометрия является бедной в том смысле, что в такой геометрии мало различных фигур (напомним, что в геометрии заданной группы две фигуры неразличимы (равны или конгруэнтны), если они переводятся друг в друга некоторым преобразованием группы, и чем больше преобразований в группе, тем больше фигур, не различимых с данной фигурой). В частности, в проективной геометрии любые треугольники равны между собой, а также равными между собой являются все эллипсы, гиперболы и параболы. Для иллюстрации сказанного рассмотрим кривую $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, которая (после деления уравнения на x_3^2) в аффинных координатах (1) представляет собой окружность $X_1^2 + X_2^2 = 1$. В результате действия проективным преобразованием $x_1^* = x_1$, $x_2^* = x_3$, $x_3^* = x_2$ эта окружность перейдет в кривую $(x_1^*)^2 + (x_3^*)^2 - (x_2^*)^2 = 0$, представляющую в аффинных координатах гиперболу $(X_2^*)^2 - (X_1^*)^2 = 1$. Если же на эту окружность действовать преобразованием $x_1^* = x_1$, $x_2^* = -x_2 + x_3$, $x_3^* = x_2 + x_3$, то она перейдет в параболу $X_2^* = (X_1^*)^2$.

ПОСТРОЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ГЕОМЕТРИЙ НА ОСНОВЕ ПРОЕКТИВНОЙ

Заслуга Клейна состоит не только в том, что он связал тип выбираемой геометрии на данном множестве с группой преобразований множества. Клейн показал, что многие типы геометрий могут быть получены на основе проективной геометрии, исторически первой, отличной от евклидовой геометрической системы. С этой целью он предложил рассматривать группы преобразований, которые являются подгруппами группы проективных преобразований (2). Сама же подгруппа выделяется заданием некоторой геометрической фигуры (как правило, расположенной в проективной плоскости), которая переходит в себя при всех преобразованиях заданной подгруппы. Эту фигуру Клейн называл данным образом. Мы, следуя книге [2], назовем ее абсолютом, так как она выделяется абсолютным свойством – неизменностью относительно преобразований подгруппы. Будучи подмножеством проективной плоскости (или ее некоторого расширения), абсолют является потусторонней фигурой для новой геометрии, то есть элементы абсолюта не являются точками или прямыми геометрии, построенной по этому абсолюту.

Теперь приведем несколько примеров абсолютов и порождаемых ими геометрий.

Аффинная геометрия

Построим так называемую аффинную геометрию, выбрав в качестве абсолюта любую прямую в проективной плоскости. Для удобства в качестве такой прямой выберем такую, которая в проективных координатах $x_1 : x_2 : x_3$ определяется уравнением $x_3 = 0$. Ясно, что среди преобразований (2) прямую $x_3 = 0$ переводят в $x_3^* = 0$ те и только те преобразования, которые имеют вид

$$\begin{aligned} x_1^* &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2^* &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3^* &= \qquad\qquad\qquad\quad a_{33}x_3, \end{aligned} \tag{3}$$

где $a_{33} \neq 0$. Условие взаимной однозначности, как нетрудно проверить, состоит в том, что $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$. Преобразования вида (3) называются аффинными. Они обладают тем свойством, что переводят аффинную часть $x_3 \neq 0$ в себя, поэтому их можно рассматривать как преобразования этой аффинной части, забыв об абсолюте $\{x_3 = 0\}$. Разделив в (3) первое и второе уравнения на третье, получим, что в аффинных координатах преобразование (3) запишется в виде

$$X_1^* = a_1X_1 + a_2X_2 + c_1, \qquad X_2^* = b_1X_1 + b_2X_2 + c_2 \tag{4}$$

с ненулевым определителем $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$. Таким образом, мы получаем геометрию с набором точек, состоящим из плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных X_1, X_2, и группой преобразований вида (4). Такая геометрия называется аффинной. В ней, как и в проективной геометрии, неразличимы любые треугольники. Однако с кривыми второго порядка ситуация уже другая: типы кривых сохраняются (эллипсы переходят в эллипсы, гиперболы – в гиперболы и параболы – в параболы).

Евклидова геометрия

Как уже говорилось, элементы абсолюта, по которому строится новая геометрия, не входят в эту геометрию. Наряду с выражением "потусторонняя фигура" к абсолюту можно применить термин "воображаемая" или "мнимая" фигура. Последний термин особенно уместен, когда абсолют рассматривается как множество корней некоторых уравнений, поскольку уравнения могут иметь мнимые (комплексные) корни. Такая ситуация возникает, например, если в качестве абсолюта рассмотреть множество корней системы двух уравнений $x_1^2 + x_2^2 = 0$, $x_3 = 0$. Эта система не имеет вещественных корней, поскольку среди вещественных чисел ей удовлетворяет лишь тройка (0, 0, 0), которая не определяет точки проективной плоскости. Однако на множестве комплексных чисел совокупность решений непустая и состоит из двух точек $A_1 = (1 : i : 0)$, $A_2 = (1 : -i : 0)$. Итак, рассматриваемый здесь абсолют состоит из двух мнимых точек A_1 и A_2.

Так как абсолют должен обладать свойством инвариантности относительно отыскиваемой группы преобразований, то каждое преобразование этой группы должно переводить либо A_1 в A_1, A_2 в A_2 (оставлять на месте точки A_1 и A_2), либо A_1 в A_2, A_2 в A_1 (менять местами эти точки). И поскольку третья координата x_3 обеих точек A_1, A_2 равна нулю, из третьего равенства в (2) получаем $0 = a_{31} \cdot 1 \pm a_{32} \cdot i + a_{33} \cdot 0$. Но это возможно только при $a_{31} = a_{32} = 0$. Таким образом, преобразования, оставляющие инвариантной пару точек A_1, A_2, имеют вид (3), однако обладают и дополнительным свойством: при $x_3 = 0$ они сохраняют уравнение $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Последнее означает, что $(x_1^*)^2 + (x_2^*)^2 = \lambda(x_1^2 + x_2^2)$, или

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)^2 = \lambda(x_1^2 + x_2^2), \tag{5}$$

где λ – некоторое ненулевое число. Поскольку нас интересуют решения с точностью до отношения $x_1 : x_2 : x_3$, можно считать $\lambda = 1$. Несложный анализ показывает, что условию (5) удовлетворяют лишь коэффициенты a_{ij} вида

$$a_{11} = \cos\varphi, \quad a_{12} = \sin\varphi, \quad a_{21} = -\sin\varphi, \quad a_{22} = \cos\varphi,$$

где φ – некоторый свободный параметр. Подставляя эти выражения в (3), после деления первого и второго уравнений на третье, получим, что в аффинных координатах искомые преобразования (оставляющие инвариантной пару точек A_1, A_2) имеют вид

$$\begin{aligned} X_1^* &= \frac{\cos\varphi}{a_{33}}X_1 + \frac{\sin\varphi}{a_{33}}X_2 + c_1, \\ X_2^* &= -\frac{\sin\varphi}{a_{33}}X_1 + \frac{\cos\varphi}{a_{33}}X_2 + c_2 \end{aligned} \tag{6}$$

либо

$$\begin{aligned} X_1^* &= \frac{\cos\varphi}{a_{33}}X_1 + \frac{\sin\varphi}{a_{33}}X_2 + c_1, \\ X_2^* &= \frac{\sin\varphi}{a_{33}}X_1 - \frac{\cos\varphi}{a_{33}}X_2 + c_2. \end{aligned} \tag{7}$$

В случае, когда $a_{33} = 1$, преобразование (6) осуществляет вращение плоскости на угол φ (против часовой стрелки) с последующим параллельным переносом на вектор (c_1, c_2), а преобразование (7) – зеркальное отражение относительно прямой $X_2 = \mathrm{tg}\varphi \cdot X_2$ с последующим аналогичным переносом. Легко видеть, что при $a_{33} = 1$ преобразования вида (6) и (7) образуют группу преобразований, которые и составляют группу движений евклидовой геометрии. Среди всех других преобразований евклидовой плоскости они выделяются тем, что сохраняют евклидово расстояние между точками, которое определяется по формуле

$$d(X, Y) = \sqrt{(Y_1 - X_1)^2 + (Y_2 - X_2)^2}, \qquad (8)$$

где $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$.

Геометрия Минковского

Построим геометрию, которая используется в физике, а именно в специальной теории относительности. Для этого в качестве абсолюта возьмем пару точек $B_1 = (1 : -1 : 0)$, $B_2 = (1 : 1 : 0)$. Так же, как и точки A_1, A_2, участвующие при построении евклидовой геометрии, эти точки расположены на прямой $x_3 = 0$. Поэтому всякая коллинеация (2), оставляющая инвариантной пару $\{B_1, B_2\}$, переводит в себя и всю прямую, проходящую через точки B_1 и B_2, а это и есть прямая $x_3 = 0$. Отсюда заключаем, что связанная с абсолютом $\{B_1, B_2\}$ группа преобразований есть подгруппа группы аффинных преобразований (3). Поскольку пара точек $\{B_1, B_2\}$ определяется как множество решений системы уравнений $x_1^2 - x_2^2 = 0$, $x_3 = 0$, эта группа выделяется требованием (аналогичным (5))

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)^2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)^2 = x_1^2 - x_2^2.$$

Указанное требование дает

$$a_{11}^2 - a_{21}^2 = 1, \quad a_{12}^2 - a_{22}^2 = -1, \quad a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} = 0. \quad (9)$$

Отсюда видно, что $a_{11} \neq 0$. Положим $v = a_{21}/a_{11}$. Тогда система уравнений (9) легко решается, и, подобно выводу (6) и (7), находим формулы искомых преобразований в аффинных (неоднородных) координатах:

$$\begin{aligned} X_1^* &= \pm\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2}}X_1 \pm \frac{\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2}}X_2 + c_1, \\ X_2^* &= \pm\frac{\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2}}X_1 \pm \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2}}X_2 + c_2, \end{aligned} \qquad (10)$$

где знаки совпадают при X_1 и независимо от этого при X_2, так что существуют всего четыре возможности выбора знаков.

Для двух точек $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$ величина $(Y_1 - X_1)^2 - (Y_2 - X_2)^2$ является инвариантом относительно преобразований (10), поэтому по аналогии с евклидовой метрикой (8) выражение

$$\rho(X, Y) = \sqrt{(Y_1 - X_1)^2 - (Y_2 - X_2)^2}$$

можно принять за метрику, с помощью которой вычисляется расстояние между точками X и Y. Эта метрика называется псевдоевклидовой. Геометрия с такой метрикой называется геометрией Минковского.

Геометрия Минковского оказалась весьма полезным языком специальной теории относительности, поскольку в формуле (10) заложен факт постоянства скорости света в любой системе отсчета – один из основных постулатов этой теории.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели лишь некоторые типы геометрий, основанные на проективной. О ряде других геометрий можно прочитать в книге [2]. Среди них весьма важными являются (гиперболическая) геометрии Лобачевского и (эллиптическая) геометрия Римана, которые строятся по абсолютам, являющимися кривыми второго порядка. Очень интересная геометрия Лобачевского не была рассмотрена здесь лишь по той причине, что ей была посвящена специальная статья [3] в "Соросовском Образовательном Журнале". Мы также не смогли здесь коснуться такой могущественной геометрической дисциплины, как топология, которая изучает геометрические объекты с точностью до непрерывных преобразований (деформаций) и которая в какой-то мере была законодательницей геометрической моды в XX столетии. Наконец, укажем еще одну новейшую геометрию, которую физики пытаются сейчас применить в проблеме соединения теории гравитации и квантовой теории поля. Она обобщает проективную геометрию и называется торической геометрией. О ней пойдет речь в другой статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. М.: Наука, 1987. Т. 2: Геометрия. 416 с.

2. *Щербаков Р.Н.*, *Пичурин Л.Ф.* От проективной геометрии – к неевклидовой. М.: Просвещение, 1979. 158 с.

3. *Винберг Э.Б.* О неевклидовой геометрии // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. № 3. С. 104–109.

* * *

Август Карлович Цих, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой теории функций Красноярского государственного университета. Область научных интересов – многомерный комплексный анализ, алгебраическая геометрия, многомерная обработка сигналов. Автор более 60 научных работ, монографии и учебного пособия.