Лекция 4.

17. Аксонометрия. Ведем в пространстве аффинную систему координат $\overline{O}\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и рассмотрим соответствующий репер $\overline{R}=\left(\overline{O},\overline{E}_1,\overline{E}_2,\overline{E}_3\right)$, где $\overrightarrow{\overline{O}\,\overline{E}_i}=\vec{e}_i$, $i=1,2,3$. Произвольная точка $\overline{M}$ пространства в этом репере имеет координаты x,y,z, которые определяются равенством

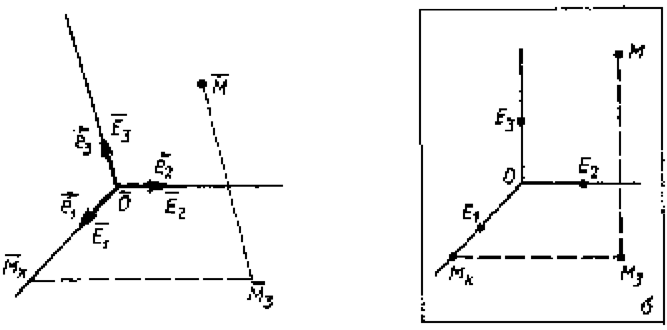
$$\overrightarrow{\overline{O}\,\overline{M}}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3,$$

или

$$\overrightarrow{\overline{O}\,\overline{M}}=x\overrightarrow{\overline{O}\,\overline{E}_1}+y\overrightarrow{\overline{O}\,\overline{E}_2}+z\overrightarrow{\overline{O}\,\overline{E}_3}. \qquad (1)$$

Рассмотрим координатную ломаную $\overline{O}\,\overline{M}_x\overline{M}_3\overline{M}$ точки $\overline{M}$ (рис.51,а). Здесь $\overline{M}_3$ - проекция точки $\overline{M}$ на плоскость $\overline{O}xy$ по направлению оси $\overline{O}z$, а $\overline{M}_x$ - проекция точки $\overline{M}_3$ на ось $\overline{O}x$ по направлению оси $\overline{O}y$.

Возьмем теперь плоскость изображений σ, выберем направление проектирования так, чтобы оно не было параллельно координатным плоскостям, и спроецируем на эту плоскость репер $\overline{R}$ и координатную ломаную точки $\overline{M}$. Подвергнув затем плоскость σ преобразованию подобия, получим на ней изображение репера $\overline{R}$ и координатной ломаной точки $\overline{M}$: $R=\left(O,E_1,E_2,E_3\right)$,



а) **Рис.51.** б)

OM_xM_3M (рис.51, б). Докажем, что

$$\overrightarrow{OM_x} = x\overrightarrow{OE_1},\ \overrightarrow{M_xM_3} = y\overrightarrow{OE_2},\ \overrightarrow{M_3M} = z\overrightarrow{OE_3}, \quad (2)$$

где x, y, z - координаты точки $\overline{M}$ в репере $\overline{R}$.

В самом деле, по равенству (1) $\overrightarrow{\overline{O}\overline{M}_x} = x\overrightarrow{\overline{O}\overline{E}_1}$, поэтому $x = -\left(\overline{M}_x\overline{E}_1, \overline{O}\right)$. При параллельном проектировании и подобии сохраняется простое отношение трех точек, поэтому

$$x = -\left(\overline{M}_x\overline{E}_1, \overline{O}\right) = -\left(M_xE_1, O\right),$$

т.е.

$$\overrightarrow{OM_x} = x\overrightarrow{OE_1} \text{ и т.д.}$$

Из равенств (2) следует важный вывод: *если на плоскости* σ *дано изображение* R *репера* $\overline{R}$*, то можно построить изображение* M *любой точки* $\overline{M}$ *по её координатам в репере* $\overline{R}$. Для этого на плоскости σ сначала по формулам (2) строим векторы $\overrightarrow{OM_x}$, $\overrightarrow{M_xM_3}$, $\overrightarrow{M_3M}$, а затем строим точку M, используя равенство

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{M_xM_3} + \overrightarrow{M_3M}.$$

Умея указанным способом строить изображения точек пространства, мы можем строить и изображения пространственных фигур. Этот метод называется методом *аксонометрического проектирования* (*аксонометрия* - *измерение по осям*) и широко применяется как в инженерной практике, так и в преподавании математики и других естественных дисциплин. Точку O называют *началом аксонометрической системы координат*, а оси $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$, $\overrightarrow{OE_3}$ - *аксонометрическими осями.*

Возникает вопрос: можно ли вершины произвольного четырехугольника плоскости σ, заданные в определенном порядке, рассматривать как изображение данного аффинного репера $\overline{R}$ пространства? Ответ на этот вопрос содержится в теореме

Польке-Шварца: *вершины любого четырехугольника плоскости изображений, заданные в определенном порядке, могут служить изображением аффинного репера, равного данному реперу* R. Другими словами, на плоскости изображений начало O и аксонометрические оси OE_1, OE_2, OE_3 можно выбрать произвольно при условии, что O, E_1, E_2, E_3 - точки общего положения.

Во многих задачах оказывается удобным в качестве исходного репера R^* выбрать ортонормированный репер. По теореме Польке-Шварца любые четыре точки общего положения O, E_1, E_2, E_3 плоскости σ, взятые в определенном порядке, можно рассматривать как изображение ортонормированного репера $\overline{R}$, равного данному реперу R^*. В этом случае отрезки OE_1, OE_2, OE_3 называются *аксонометрическими единицами,* а их длины e_x, e_y, e_z - *коэффициентами искажения.* На практике принято различать следующие виды аксонометрических проекций.

Триметрические проекции - все три коэффициента искажения различные между собой: $e_x \neq e_y$, $e_y \neq e_z$, $e_z \neq e_x$.

Диметрические проекции - два коэффициента искажения равны: $e_x \neq e_y = e_z$. В том частном случае, когда $e_y = e_z$, $e_x = \frac{1}{2} e_z$, $\angle E_2OE_3 = 90^{\mathbf{0}}$, $\angle E_1OE_2 = \angle E_1OE_3 = 135^{\mathbf{0}}$, проекция называется ***кабинетной***.

Изометрические проекции - все три коэффициента искажения равны. Если к тому же $\angle E_2OE_3 = 90^{\mathbf{0}}$, $\angle E_1OE_2 = \angle E_1OE_3 = 135^{\mathbf{0}}$, то проекция называется ***кавальерной*** или ***военной***.

Пусть $R = (O, E_1, E_2, E_3)$ - изображение аффинного репера $\overline{R}$ пространства, а M, M_1, M_2, M_3 - изображения данной точки $\overline{M}$ и её проекций $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3$ на координатные плоскости по направлениям соответствующих координатных осей (рис.52). Точку M называют *аксонометрической проекцией* точки $\overline{M}$, а точки M_1, M_2, M_3 - *вторичными проекциями* этой точки. Заметим, что если на плоскости σ задана точка M и одна из точек M_1, M_2, M_3 (например M_3), то точка $\overline{M}$ в пространстве вполне определена. В самом

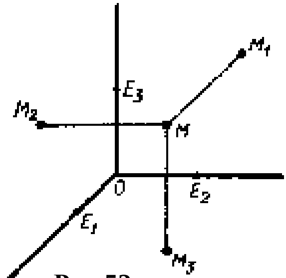


Рис.52.

деле, по точкам M и M_3 мы сможем восстановить ломаную OM_xM_3M и с её помощью по формулам (2) найти координаты x, y, z точки $\overline{M}$ в репере $\overline{R}$. Таким образом, точку $\overline{M}$ пространства мы можем задать на плоскости σ с помощью двух точек (M, M_3) (или (M, M_1), (M, M_2)), которые расположены так, что прямые MM_3 и Oz параллельны или совпадают (рис.53).

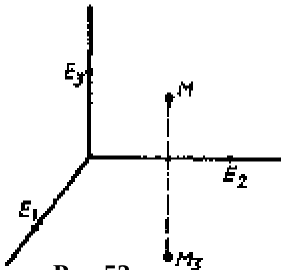


Рис.53.

Рассмотрим теперь изображения прямых и плоскостей на плоскости σ. Из соображений наглядности будем предполагать, что направление проектирования не параллельно рассматриваемым прямым и плоскостям. Поэтому аксонометрическая проекция любой прямой есть прямая линия, а аксонометрическая проекция плоскости - вся плоскость σ.

Прямая $\overline{a}$ пространства на плоскости изображений σ задается двумя её точками (M, M_3) и (N, N_3) или аксонометрической проекцией a и вторичной проекцией a_3. На рисунке 54 изображены прямые (a, a_3) и (MN, M_3N_3). Если прямая $\overline{a}$ не па-

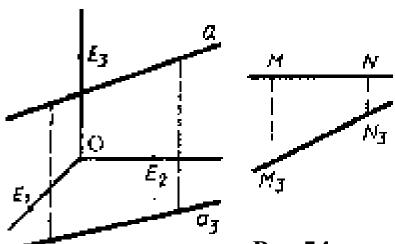


Рис.54.

раллельна оси $\overline{O}\overline{z}$, то её вторичная проекция a_3 есть прямая, в противном случае - точка. На рисунке 55 изображена прямая $\overline{a}$ параллельная оси $\overline{O}\overline{z}$. Мы видим, что её аксонометрическая проекция a - прямая, параллельная аксонометрической оси Oz, а вторичная проекция a_3 - точка. Сама ось $\overline{O}\overline{z}$ на плоскости σ задается парой (Oz, O). Отметим наконец, что аксонометрическая и вторичная проекции прямой совпадают тогда и только тогда, когда прямая $\overline{a}$ в пространстве лежит в плоскости $\overline{O}\overline{x}\overline{y}$ (прямая (b, b_3) на рис.55).

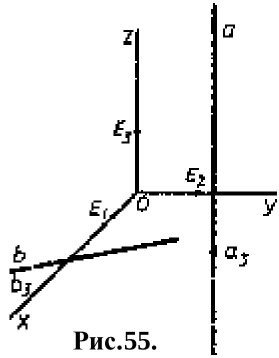


Рис.55.

Выясним взаимное расположение двух прямых (a, a_3) и (b, b_3) не параллельных оси $\overline{O}\overline{z}$. Эти прямые пересекаются тогда и только тогда, когда они имеют единственную общую точку, т.е. когда имеет место один из трех случаев, изображенных на рисунке 56. Прямые (a, a_3) и (b, b_3) параллельны тогда и только тогда, когда имеет место один из трех случаев, изображенных на рисунке 57.

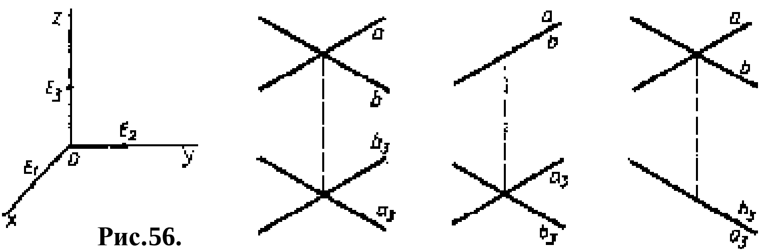


Рис.56.

Плоскость может быть задана тремя своими точками, не лежащими на одной прямой, или двумя прямыми (пересекающимися или параллельными), или прямой и точкой, не лежащей на этой прямой. Соответственно каждому из этих способов задания плоскости на плоскости изображений σ должны быть заданы ак-

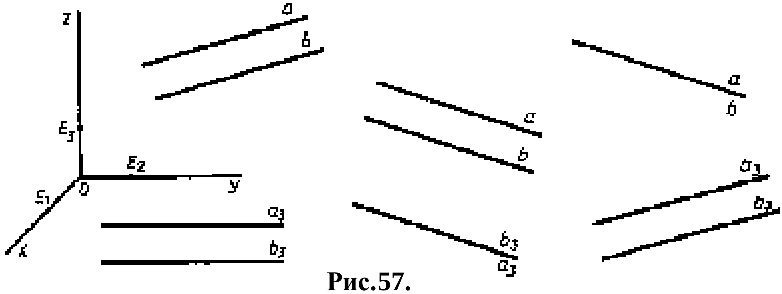


Рис.57.

сонометрические и вторичные проекции элементов, с помощью которых дана плоскость.

Задача 5. Прямая (a, a_3) лежит в плоскости, заданной тремя точками (A, A_3), (B, B_3) и (C, C_3), не лежащими на одной прямой. По заданной прямой a построить её вторичную проекцию a_3.

<u>Решение</u>. Найдем сначала точки (M, M_3) и (N, N_3) в которых прямая (a, a_3) пересекает какие-нибудь две из прямых, соединяющих попарно точки (A, A_3), (B, B_3) и (C, C_3). Точки M и N определяются непосредственно из условий задачи (рис.58). Проведя через точки M и N прямые, параллельные оси Oz, строим точки M_3 и N_3, а затем и искомую прямую a_3, которая проходит через них.

Задача 6. Точка (X, X_3) лежит в плоскости, заданной тремя точками (A, A_3), (B, B_3) и (C, C_3), не лежащими на одной прямой. По заданной точке X_3 построить точку X.

<u>Решение</u>. Проведя (рис.59) прямую C_3X_3 найдем точку $L_3 = A_3B_3 \cap C_3X_3$. Через точку L_3 проводим прямую параллельную оси Oz найдем точку L и построим прямую CX. Проведя через точку X_3 прямую, параллельную оси Oz находим точку $X = LC \cap XX_3$.

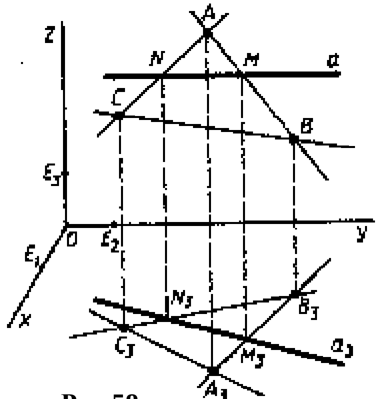


Рис.58.

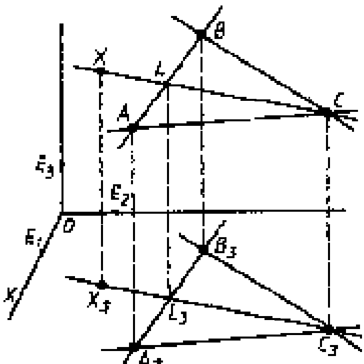


Рис.59.

Пусть прямая $\overline{a}$ пересекает координатную плоскость $\overline{Oxy}$ в точке $\overline{A}_0$. Аксонометрическая проекция A_0 этой точки называется *следом прямой* $\overline{a}$ на плоскости $\overline{Oxy}$. Легко видеть, что *следом данной прямой* $\overline{a}$ *является точка пересечения аксонометрической и вторичной проекций этой прямой*. В самом деле, пусть $\overline{a}(a, a_3)$ - данная прямая, а A_0 - точка пересечения прямых a и a_3. Точка $\overline{A}_0(A_0, A_0)$ лежит в плоскости $\overline{Oxy}$, так как её аксонометрическая и вторичная проекции совпадают. С другой стороны, $A_0 \in a$ и $A_0 \in a_3$, поэтому $\overline{A}_0 \in \overline{a}$. Таким образом, $\overline{A}_0$ - общая точка плоскости $\overline{Oxy}$ и прямой $\overline{a}$, т.е. A_0 - след $\overline{a}$.

Задача 7. Построить след данной прямой, проходящей через точки (M, M_3) и (N, N_3).

<u>Решение</u>. Прямая MN является аксонометрической проекцией данной прямой, а M_3N_3 - её вторичной проекцией, поэтому согласно предыдущему $A_0 = MN \cap M_3N_3$ - искомая точка.

Если прямые MN и M_3N_3 параллельны или совпадают, то задача не имеет решений, так как в первом случае данная прямая в пространстве параллельна плоскости $\overline{Oxy}$, а во втором случае она лежит в этой плоскости. Если точки M_3 и N_3 совпадают, то точка M_3 и является искомой точкой.

Пусть плоскость $\overline{\pi}$ пересекает координатную плоскость $\overline{O}\overline{xy}$ по прямой $\overline{p}_0$. Аксонометрическая проекция p_0 этой прямой называется *следом плоскости* $\overline{\pi}$ на плоскости $\overline{O}\overline{xy}$ или просто следом плоскости $\overline{\pi}$. Нетрудно видеть, что если прямая лежит в плоскости, то ее след лежит на следе плоскости. Это очевидное утверждение часто используют при решении задач.

Задача 8. Построить след плоскости, заданный тремя точками (A, A_3), (B, B_3) и (C, C_3), не лежащими на одной прямой (рис. 60).

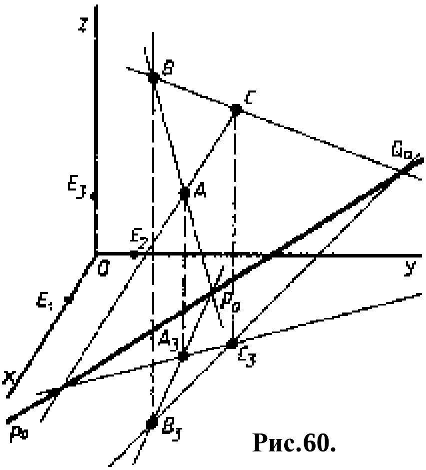


Рис.60.

Решение. Для решения задачи воспользуемся предыдущим утверждением. Если p_0 - искомый след на плоскости $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$, то следы прямых $\overline{A}\overline{B}$, $\overline{B}\overline{C}$ и $\overline{A}\overline{C}$ лежат на этой прямой. Поэтому, построив например, следы P_0 и Q_0 прямых $\overline{A}\overline{B}$ и $\overline{B}\overline{C}$ (задача 7), находим прямую p_0 (рис.60). Если эти прямые не имеют следов, то плоскость $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ параллельна плоскости $\overline{O}\overline{xy}$, поэтому она не имеет следа на плоскости $\overline{O}\overline{xy}$.

Если плоскость $\overline{\pi}$ *пересекает ось* $\overline{O}\overline{z}$, *то она может быть задана следом* p_0 *и аксонометрической проекцией* P *точки пересечения этой плоскости с осью* $\overline{O}\overline{z}$ (рис.61, а). Этот способ задания плоскости часто применяется в аксонометрии. Заметим, что если плоскость $\overline{\pi}$ параллельна прямой $\overline{O}\overline{z}$ (или содержит эту ось), то она может быть задана одним следом p_0. В этом случае вторичные проекции

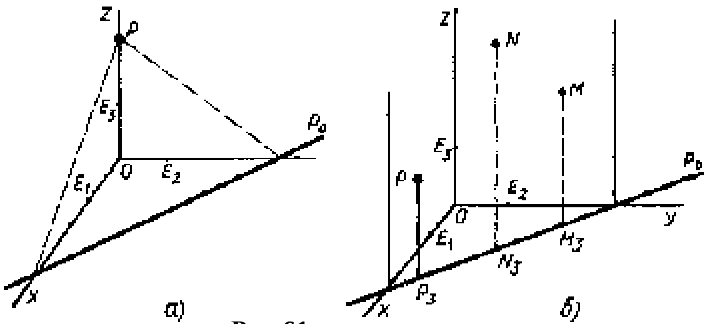


Рис.61.

всех точек плоскости лежат на прямой p_0 (рис.61, б).

Задача 9. Дана аксонометрическая проекция M точки $\overline{M}$, лежащей в плоскости, заданной следом p_0 и точкой $\overline{P}(P,O)$ (рис.62). Построить вторичную проекцию M_3 точки $\overline{M}$.

<u>Решение</u>. Прямая $\overline{MP}$ лежит в данной плоскости, поэтому ее след X_0 лежит на прямой p_0 (рис.62, а). Так как PM - аксонометрическая проекция этой прямой, то $X_0 = p_0 \mathbf{I} PM$. Таким образом, прямая OX_0 - вторичная проекция прямой $\overline{MP}$, поэтому $M_3 = OX_0 \mathbf{I} MM_3$, где $MM_3 \| Oz$.

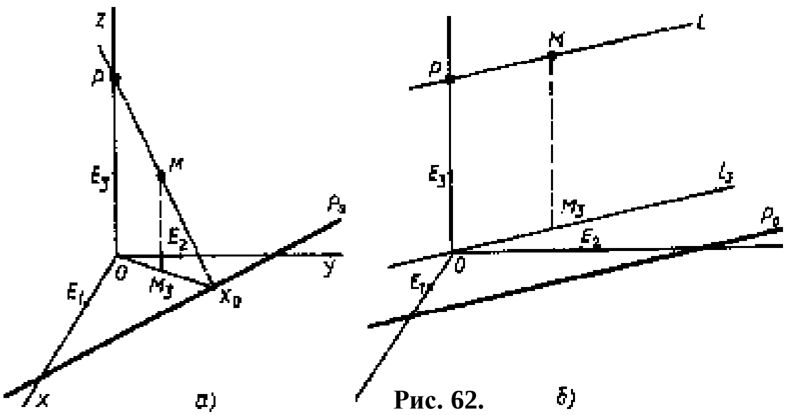


Рис. 62.

Если прямая MP параллельна прямой p_0, то это означает, что прямая $\overline{MP}$ параллельна плоскости $\overline{O}\overline{xy}$, поэтому не имеет следа на этой плоскости (рис.62, б). В этом случае вторичная проекция l_3 прямой $\overline{MP}$ также параллельна прямой p_0, поэтому для решения задачи через точку O проводим прямую l_3 параллельную прямой p_0, а через M - прямую, параллельную Oz. Точка пересечения этих прямых и есть искомая точка M_3 (рис.62, б).