И. Я. БАКЕЛЬМАН

ВЫСШАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Утверждено Министерством просвещения РСФСР в качестве учебного пособия для педагогических институтов

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1967

Бакельман И. Я.

Б19 Высшая геометрия. (Учеб. пособие для пед. ин-тов). М., «Просвещение», 1967.

368 с. с илл. 100 тыс. экз. 74 к.

В книге изложены вопросы аксиоматики геометрии, афинная и проективная геометрия, элементы дифференциальной геометрии и необходимые сведения из топологии.

Краткий и четкий язык изложения, достаточное число иллюстраций делают эту книгу полезным и доступным пособием для студентов как очных, так и заочных педагогических институтов.

$\frac{2-2-3}{15-67}$ 513

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник «Высшая геометрия» написан в соответствии с программой курса высшей геометрии для педагогических институтов. Согласно программе основу этого курса составляет материал трех более специализированных курсов: оснований геометрии, проективной геометрии и дифференциальной геометрии, которые ранее читались изолированно друг от друга и связи между которыми прослеживались весьма незначительно. Это приводило к тому, что центральные идеи одних геометрических курсов не находили должной поддержки и освещения в других, имелась перегрузка курсов оснований геометрии и проективной геометрии частными второстепенными вопросами, нередко довольно громоздкими в техническом отношении. В результате сам предмет геометрии дробился, и получалась излишняя специализированность отдельных геометрических курсов.

С другой стороны, вопросы взаимосвязи теоретико-групповых принципов обоснования различных геометрий и их построение аксиоматическим методом, а также вопросы, связанные с понятиями кривых и поверхностей и их основных характеристик, ранее не находили должного освещения и проходились в отрыве от основных проблем курсов оснований геометрии и проективной геометрии. Не требует специальных разъяснений, что именно ясное понимание содержания указанных вопросов дает целостное представление о предмете геометрии и ее проблемах.

Отмеченные выше обстоятельства оказали существенное влияние на основные принципы нашего построения курса высшей геометрии, которые кратко состоят в следующем. Сначала проводится аксиоматическое построение различных геометрий аксиоматическим методом (в гл. I геометрии Евклида и Лобачевского, в гл. II аффинной геометрии). Параллельно развивается точка зрения, что различные геометрии являются теориями инвариантов различных групп преобразований евклидова пространства (гл. I, II, III). После этого устанавливаются взаимосвязи между обоими подходами, которые кладутся в основание геометрических теорий (гл. I, II, III).

В главах IV—VII с помощью аппарата математического анализа и начальных понятий топологии строится учение о кривых и поверхностях и рассматриваются приложения теории кривых и поверхностей к вопросам оснований геометрии, проективной геометрии и строению замкнутых поверхностей.

Основным объектом изучения является евклидово пространство как наиболее важное по своему положению в геометрии, так и по многочисленным приложениям к другим разделам математики.

Остановимся на кратком изложении содержания книги.

В главе I аксиоматическим путем строятся геометрии Евклида и Лобачевского и исследуются требования, предъявляемые к системе аксиом на примере системы аксиом геометрии Евклида. Вопрос о независимости аксиомы параллельности от прочих аксиом и интерпретация геометрии Лобачевского на евклидовой плоскости рассматриваются в конце главы III. В первой главе развивается теоретико-групповая концепция Ф. Клейна о том, что геометрия есть теория инвариантов определенной группы преобразований пространства. На основе этой точки зрения устанавливается, что евклидова геометрия есть теория инвариантов группы движений (ортогональных преобразований). Движениями называют преобразования (взаимно однозначные отображения пространства), которые сохраняют конгруэнтность отрезков.

В главе II изучаются аффинные преобразования евклидовой плоскости. Эти преобразования возникают как естественные обобщения движений, если сохранить за преобразованием свойство переводить прямые в прямые и отказаться от требования сохранения конгруэнтности отрезков. На базе построенной теории аффинных преобразований формулируются понятия аффинной геометрии и аффинной эквивалентности (равенства) фигур. В конце главы II к понятию аффинной геометрии даются два других подхода: а) с помощью аксиоматики, в духе изложенной в главе I аксиоматики геометрии Евклида, б) с помощью понятия линейного пространства.

Взаимосвязь между различными подходами к аффинной геометрии позволяет с помощью скалярного произведения описать взаимное отношение аффинной и евклидовой геометрий.

В главе III изучаются проективные преобразования. Эти преобразования евклидова пространства переводят прямые в прямые. Но для того чтобы сохранить взаимную однозначность таких преобразований, приходится пополнять пространство новыми, так называемыми бесконечно удаленными, элементами (бесконечно удаленные точки, бесконечно удаленные прямые, бесконечно удаленная плоскость). Таким образом, от евклидова пространства (плоскости) мы приходим к понятию проективного пространства (плоскости). В главе III подробно исследуются способы введения и свойства проективных систем координат на проективной прямой и проективной плоскости. Большое внимание уделяется изучению понятия и свойствам проективных преобразований проективной прямой и проективной плоскости. Изучается принцип двойственности и проективная классификация кривых второго порядка.

С помощью группы проективных преобразований плоскости и цепи ее подгрупп устанавливаются связи между проективной, аффинной, евклидовой геометриями и геометрией Лобачевского. Таким образом, различные обобщения евклидова пространства, возникающие как с точки зрения аксиоматического, так и с точки зрения теории преобразований, переводящих прямые в прямые, увязываются в единую схему.

В главах IV и V строятся основы теории кривых и поверхностей в евклидовом пространстве. Основное внимание здесь уделяется понятиям кривых и поверхностей. Важную роль играет система числовых и геометрических характеристик кривых и поверхностей, позволяющая описать их строение в пространстве.

Глава VI посвящена вопросам внутренней геометрии поверхности. Помимо большого самостоятельного интереса этой теории, важным является то обстоятельство, что она дает единый подход к изучению геометрий Евклида и Лобачевского. Тем самым вопросы обоснования элементарной геометрии включаются в более общую схему внутренней геометрии поверхности.

Наконец, в главе VII строится топологическая классификация замкнутых поверхностей с помощью эйлеровой характеристики поверхности. Эта глава существенно расширяет наглядные представления о возможных пространственных формах поверхностей.

Во время работы над написанием этого учебника я использовал многократный опыт чтения курса высшей геометрии в Ленинградском педагогическом институте имени А. И. Герцена. Большое влияние на общий план главы I и некоторых параграфов главы III оказала книга Н. В. Ефимова «Высшая геометрия». К этой книге мы многократно отсылаем читателя за подробными доказательствами многих теорем главы I, которые не помещены в книге для того, чтобы не усложнять ее второстепенным материалом. На изложение ряда параграфов главы VI по внутренней геометрии заметное влияние оказала книга А. В. Погорелова «Лекции по дифференциальной геометрии».

При изучении курса высшей геометрии полезно обращаться к следующим книгам:

Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, изд. 4, М., Физматгиз, 1961.

А. В. Погорелов, Лекции по основаниям геометрии, изд. 2, Харьков, изд-во Харьковского ун-та, 1964.

А. В. Погорелов, Лекции по дифференциальной геометрии, изд. 3, Харьков, изд-во Харьковского ун-та, 1961.

В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович, Очерк основных идей топологии, «Математическое просвещение», №№ 2, 3, 4, 6 (1957—1960).

Г. Б. Гуревич, Проективная геометрия, М., Физматгиз, 1960.

И. М. Яглом, В. Г. Ашкинузе, Идеи и методы аффинной и проективной геометрии (I часть), М., Учпедгиз, 1962.

К главам I, IV, V, VI даны упражнения и задачи, а к материалу главы I даны примерные темы студенческих докладов, которые целесообразно ставить на семинарских или практических занятиях. К материалу глав II и III упражнения и задачи можно легко найти в задачниках по линейной алгебре и указанных выше книгах Г. Б. Гуревича и И. М. Яглома, В. Г. Ашкинузе.

Автор приносит искреннюю признательность В. Г. Болтянскому, А. Л. Вернеру и И. М. Яглому, внимательно прочитавшим рукопись и сделавшим ряд полезных замечаний, а также В. В. Гольдбергу за тщательно проведенное редактирование рукописи.

И. Я. Бакельман

ГЛАВА I. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИЙ ЕВКЛИДА И ЛОБАЧЕВСКОГО

§ 1. Аксиоматический метод

1. Построение геометрии обычно проводится на основе аксиоматического метода, содержание которого в кратких чертах таково. Вводятся некоторые объекты, которые связаны между собой одним или несколькими отношениями. Эти объекты и отношения называются *основными*. Основные объекты и отношения должны удовлетворять требованиям аксиом, в остальном их природа безразлична. *Аксиомы* представляют собой утверждения, которые принимаются без доказательства. Любое утверждение, которое в конечном итоге может быть получено логическим выводом из аксиом, называется *теоремой*. Совокупность понятий и теорем, базирующихся на данной системе аксиом, принято называть *теорией*, построенной на этой системе аксиом. Метод построения таких теорий называют *аксиоматическим*.

Рассмотрим в общих чертах, как применяется аксиоматический метод к построению геометрии Евклида и геометрии Лобачевского. Прежде всего вводятся три различных совокупности основных объектов:

Объекты первой совокупности называются «т о ч к а м и».

Объекты второй совокупности — «п р я м ы м и».

Объекты третьей совокупности — «п л о с к о с т я м и».

Множество всех точек, прямых и плоскостей называется *пространством*.

Точки, прямые и плоскости связаны между собой рядом основных отношений, которые описываются словами «л е ж а т», «м е ж д у», «к о н г р у э н т н ы». Эти отношения должны удовлетворять требованиям аксиом, формулировки которых будут даны ниже в §§ 4, 5, 7, 11, 15 главы I. Все аксиомы удобно разделить на пять групп:

Группа I — аксиомы связи.
Группа II — аксиомы порядка.
Группа III — аксиомы конгруэнтности.
Группа IV — аксиомы непрерывности.
Группа V — аксиомы параллельности.

Отметим, что для геометрии Евклида и геометрии Лобачевского аксиомы первых четырех групп совпадают, а V группа, представляющая собой одну аксиому параллельности, состоит из противоположных утверждений.

Таким образом, *геометрии Евклида и Лобачевского суть теории*, построенные на системе аксиом групп I—V. Подчеркнем, что для построения этих геометрий нам безразличен конкретный наглядный смысл основных объектов и отношений, важно лишь, чтобы они удовлетворяли требованиям аксиом групп I—V.

2. Аксиоматический метод построения геометрии носит весьма абстрактный характер. Это прежде всего проявляется в большом произволе выбора основных объектов и отношений.

Тем не менее сами термины «точка», «прямая», «плоскость», которые служат для описания основных объектов геометрии, указывают на то, что источниками образования этих понятий были пространственные формы реальных тел. Так, понятие точки возникло в результате абстракции от размеров тела. Именно, если при изучении того или иного вопроса размеры тела не играют роли, то ими можно пренебречь — отсюда и возникает понятие точки. С этим явлением мы постоянно сталкиваемся в механике и физике, рассматривая в пространстве перемещение по достаточно большим траекториям тел малых размеров (например, движение планет вокруг Солнца или движение космических кораблей и спутников вокруг Земли). Каждый раз, изучая свойства траектории движения указанных тел, мы отвлекаемся от размеров этих тел и называем их материальными точками. Если абстрагироваться при этом еще и от физических свойств данного тела (масса, температура и т. п.), то мы и придем к рассматриваемому в геометрии понятию точки.

Понятие прямой возникает в результате абстракции от физических свойств предметов определенной пространственной формы типа туго натянутой нити, светового луча и т. п. При изучении формы таких предметов в пространстве на первое место выступает их значительная протяженность в одном направлении (длина) по сравнению с двумя другими (ширина и высота). Аналогично источником понятия плоскости служат пространственные формы предметов типа туго натянутого листа бумаги, поверхности стола и т. д.

В природе тела, пространственные формы которых привели к образованию основных геометрических объектов, находятся в определенных отношениях. Отвлекаясь от конкретной физической природы этих отношений и удерживая лишь отношения между пространственными формами тел, мы с их помощью формулируем систему взаимосвязей между основными объектами и тем самым приходим к основным отношениям и системе аксиом, которая лежит в основе построения геометрии.

Таким образом, система аксиом геометрии имеет о п ы т н о е происхождение.

§ 2. «Начала» Евклида

1. Возникновение геометрических представлений относится к весьма далеким временам. Первоначальное их оформление историки связывают с древнейшей культурой Вавилона и Египта. По дошедшим до нас материалам эти геометрические сведения представляли собой набор разрозненных правил, иллюстрируемых на частных числовых примерах. Геометрия носила грубо эмпирический характер, полностью отсутствовали доказательства отдельных теорем и тем более логические связи между различными геометрическими фактами.

С VII века до н. э. начинается так называемый греческий период развития геометрии. К этому времени, благодаря оживленным торговым отношениям, геометрические сведения из Египта проникают в Грецию, и здесь в новых условиях в руках греческих ученых и философов в сравнительно короткий срок геометрия претерпевает коренные изменения. В VI и V веках до н. э. были сформулированы многочисленные геометрические предложения, и примерно в это же время возникает понятие о доказательстве теорем. К концу III века до н. э. греки уже обладали обширным запасом геометрических фактов и владели разнообразными методами доказательств. Это, естественно, привело к попыткам систематизировать и расположить весь накопленный материал в строгом логическом порядке. Такие попытки делались многими греческими математиками, но до нашего времени их сочинения не дошли, так как, по-видимому, они были забыты после создания Евклидом его знаменитых «Начал».

Евклид жил примерно в 330—275 гг. до н. э. Созданные им «Начала» представляют полное и систематическое изложение основ геометрии.

2. «Начала» Евклида состоят из 13 книг. Не все книги посвящены непосредственно геометрии. Евклид много внимания уделяет вопросам арифметики: им посвящены пятая, седьмая, восьмая, девятая и десятая книги. Остальные восемь книг имеют чисто геометрическое содержание.

В первую книгу входят теоремы об условиях равенства треугольников, соотношения между сторонами и углами треугольников, теория параллельных линий и условия равновеликости треугольников и многоугольников.

Во второй книге рассматривается превращение многоугольника в равновеликий квадрат.

Третья книга посвящена изучению свойств окружности.

Четвертая — вписанным и описанным многоугольникам.

Шестая — подобным фигурам.

Наконец, в последних трех книгах излагаются основы стереометрии.

Из приведенного выше содержания «Начал» видно, что они содержат материал, относящийся к элементарной геометрии. Изложение в каждой из книг начинается с определения тех понятий, на которых основано последующее изложение. Остановимся более подробно на первой книге. Она начинается двадцатью тремя определениями. Приведем некоторые из них:

Определение 1. *Точка есть то, что не имеет частей.*

Определение 2. *Линия есть длина без ширины.*

Определение 3. *Границы линии суть точки.*

Определение 4. *Прямая есть такая линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам.*

Определение 5. *Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.*

. . . .

После определений Евклид переходит к формулировке постулатов и аксиом, т. е. утверждений, принимаемых без доказательства.

Постулаты

1. *Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию.*
2. *И чтобы каждую прямую можно было неопределенно продолжить.*
3. *И чтобы из любого центра можно было описать окружность любым радиусом.*
4. *И чтобы все прямые углы были равны.*
5. *И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.*

Аксиомы

1. *Равные порознь третьему равны между собой.*
2. *И если к равным прибавить равные, то получим равные.*
3. *И если от равных отнимем равные, то получим равные.*
4. *И если к неравным прибавим равные, то получим неравные.*
5. *И если удвоим равные, то получим равные.*
6. *И половины равных равны между собой.*
7. *И совмещающиеся равны.*
8. *И целое больше части.*
9. *И две прямые не могут заключать пространства.*

После аксиом Евклид излагает теоремы геометрии, располагая их в таком порядке, чтобы каждое новое предложение можно было доказать, опираясь лишь на предыдущие предложения, постулаты и аксиомы.

3. Перечисление определений и аксиом, которые достаточны для проведения логического доказательства всех следующих за ними теорем, принято называть *обоснованием геометрии.*

Естественно поставить вопрос, проведено ли Евклидом обоснование геометрии исчерпывающим образом. Тот факт, что «Начала» Евклида затмили все предыдущие сочинения по обоснованию геометрии и на протяжении многих столетий были образцом строгости изложения математических доказательств, свидетельствует о том, что Евклидом проблема обоснования геометрии была решена с большой точностью и мастерством.

Однако если подходить к «Началам» с точки зрения современной математики, то обнаруживается, что проведенное им обоснование геометрии во многом неудовлетворительно. Остановимся на этом более подробно.

Во-первых, формулировки определений строятся с помощью понятий «границы», «длины», «ширины» и т. п., которые сами подлежат определениям. Более внимательный анализ показывает, что ни одно из определений 1—5 никоим образом не используется при доказательстве каких-либо теорем. Эти определения органически никак не связаны с остальным материалом первой книги и без ущерба для дела могут быть опущены. В этих определениях делается довольно наивная попытка наглядно описать основные геометрические объекты. Здесь, кстати, явно подчеркивается опытное происхождение основных понятий геометрии.

Во-вторых, хотя приведенные постулаты и аксиомы существенны, но даже поверхностный анализ показывает, что список евклидовых аксиом слишком беден для построения геометрии.

Например, с помощью этих аксиом нельзя установить, что точка данной прямой лежит между двумя другими точками той же прямой, что две точки лежат на плоскости по одну или по разные стороны от данной прямой или что точка лежит внутри многоугольника и т. п. Фактически мы постоянно пользуемся этими фактами, и, если опираться только на постулаты и аксиомы Евклида, мы вынуждены будем подкреплять доказательства обращением к наглядным свойствам чертежа, что будет противоречить логическому пути построения геометрии.

Далее, равенство фигур (аксиома V) опирается на понятие движения. Между тем у Евклида этого понятия нет, а свойства движения в аксиомах не перечислены. Наконец, полностью отсутствуют аксиомы непрерывности.

Таким образом, убедительность логических построений у Евклида довольно часто подкрепляется привычками наших пространственных представлений. А это значит, что «Начала» не дают строго логического обоснования геометрии.

4. Различные дополнения к евклидовским «Началам» были сделаны уже учеными античного мира. Так, Архимед расширил список постулатов Евклида и дал в теории измерения длин, площадей и объемов существенное завершение изложения Евклида. После Архимеда попытки уточнить основные положения геометрии не прекращались. Однако на протяжении более чем двадцати веков никто не прибавил к обоснованию геометрии чего-либо принципиально нового. Уровень строгости евклидовых доказательств до XIX века считался вполне достаточным. Только в конце XIX века были сформулированы новые концепции логического обоснования геометрии и впервые была сформулирована полная система аксиом, из которых все теоремы геометрии выводятся без всяких подкрепляющих ссылок на чертеж.

Отметим, что необходимость пополнения списка евклидовых аксиом видело лишь небольшое число геометров. Подавляющее большинство сочинений имело целью уменьшить количество евклидовых постулатов. В этом выражалось естественное стремление получить минимальную систему аксиом для построения геометрии.

Легко было установить, что IV постулат излишен. Основное внимание было направлено на то, чтобы вывести V постулат из прочих аксиом Евклида. Это объяснялось тем, что формулировка V постулата значительно сложнее, чем у всех других постулатов и аксиом, и что он более походит на теорему, чем на аксиому.

Исследования, посвященные V постулату, начались почти одновременно с созданием «Начал», но полное решение этого вопроса было дано значительно позже — в первой половине XIX века — Н. И. Лобачевским, Я. Больяи и К. Гауссом.

§ 3. Проблема пятого постулата

1. Пятый постулат и аксиома о параллельных. При построении элементарной геометрии V постулат играет весьма существенную роль. Он лежит в основе важнейших разделов геометрии: теории параллельных линий, теории подобных фигур, тригонометрии и т. д.

Остановимся более подробно на связи V постулата и теории параллельных. Прежде всего, отметим, что теории параллельных предшествует целый ряд теорем, доказательство которых не опирается на V постулат. Это теорема о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника, три теоремы о равенстве треугольников, теорема о том, что каждый внешний угол треугольника больше любого из внутренних, с ним не смежных, теоремы о соотношении сторон и углов в треугольнике и ряд других. Более подробно об этом будет идти речь ниже в § 8 гл. I.

Две прямые, лежащие в одной плоскости, называются *параллельными,* если они не имеют общей точки. *Существование таких прямых устанавливается без использования V постулата.* Действительно, если прямая c перпендикулярна двум прямым a и b и лежит вместе с ними в одной плоскости (рис. 1), то прямые a и b параллельны.

Если бы это было не так и прямые a и b пересекались в некоторой точке C, то внешний угол треугольника ABC при вершине A

должен был бы быть больше внутреннего угла при вершине B. Но это невозможно, так как, согласно исходному предположению, оба эти угла прямые и, следовательно, равны между собой.

Дальше речь будет идти только о прямых и точках, лежащих в одной плоскости; это обстоятельство ниже специально оговариваться не будет.

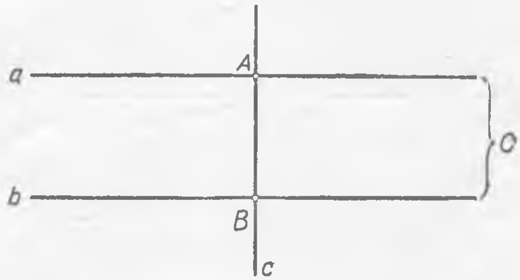


Рис. 1

Пусть a — любая прямая и A — произвольная точка, не лежащая на ней (рис. 2). Тогда через точку A проходит прямая a', параллельная прямой a. Действительно, если AB — прямая, перпендикулярная прямой a, то прямая a', проходящая через точку A перпендикулярно прямой AB, и есть прямая, параллельная a.

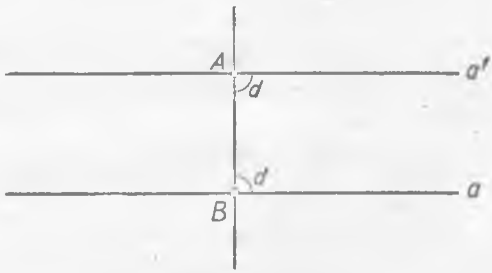


Рис. 2

После того как установлено, что через каждую точку плоскости, не лежащую на данной прямой a, проходит прямая, параллельная a, встает вопрос: *проходит ли через каждую точку плоскости одна или несколько таких прямых*?

Исходя из V постулата, можно установить, что через каждую точку плоскости проходит точно одна прямая, параллельная данной. Действительно, пусть A — произвольная точка, не лежащая на прямой a. Пусть AB — прямая, перпендикулярная a (рис. 3). Тогда прямая a', перпендикулярная к AB и проходящая через точку A, параллельна a. Всякая прямая b, проходящая через A

и отличная от a', вместе с прямой a составляет с прямой AB односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых. Поэтому, согласно V постулату, прямые a и b пересекаются.

Докажем теперь обратное утверждение: V *постулат может быть доказан как теорема, если в качестве аксиомы принять утверждение, что через каждую точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.*

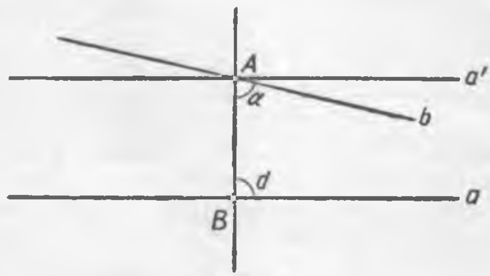


Рис. 3

Прежде всего отметим, что если справедлива аксиома о единственности прямой, параллельной данной, то при пересечении двух параллельных прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна двум прямым. Пусть для прямых a, b и c выполнены условия V постулата и пусть для пары внутренних односторонних углов α_1, β_1 выполнено условие

$$\alpha_1 + \beta_1 < 2d$$

(рис. 4). Через точку A проходит единственная прямая a', параллельная b. Пусть α_1' и β_1 — соответствующая этой прямой пара односторонних углов. Тогда

$$\alpha_1' + \beta_1 = 2d$$

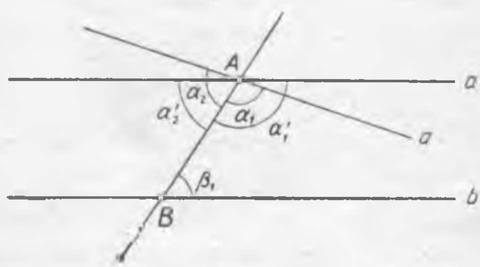


Рис. 4

и, следовательно,

$$\alpha_1' > \alpha_1.$$

Поэтому прямые a и b пересекаются. Далее, если α_2 и α_2' — соответственно смежные углы для углов α_1 и α_1' между отрезком AB и прямыми a и a', то

$$\alpha_2 > \alpha_2'.$$

Следовательно, прямые a и b пересекаются и притом с той стороны, где находятся углы α_1 и β_1.

Итак, V постулат эквивалентен аксиоме о единственности прямой, параллельной данной.

Приведем еще ряд предложений, эквивалентных пятому постулату:

1. *Две параллельные прямые при пересечении их третьей прямой образуют равные соответственные углы.*
2. *Сумма углов треугольника равна двум прямым.*
3. *Точки, лежащие по одну сторону от данной прямой на одном и том же расстоянии от нее, образуют прямую.*
4. *Существуют треугольники, площади которых больше любого наперед заданного числа.*
5. *Существуют подобные неравные треугольники.*

Любое из этих утверждений можно взять в качестве аксиомы, и тогда V постулат может быть доказан как следствие этой и прочих аксиом геометрии.

2. Теоремы Саккери, Ламберта и Лежандра об углах четырехугольников и треугольников. Выше уже говорилось, что проблеме V постулата были посвящены многочисленные исследования. Было предложено большое количество «доказательств» V постулата, и каждый раз внимательный анализ обнаруживал пробелы в предложенных построениях. Обычно авторы этих доказательств незаметно использовали в своих рассуждениях предложения, эквивалентные V постулату. Тем не менее эти исследования сыграли существенную роль в развитии теории параллельных и других вопросов оснований геометрии, поскольку в них прослеживалась система далеко идущих следствий, вытекающих из V постулата или предложения, ему противоположного. Ниже мы отмечаем ряд предложений, принадлежащих Саккери, Ламберту и Лежандру[1], которые оказали заметное влияние на развитие оснований геометрии.

В работе Саккери «Евклид, очищенный от всяких пятен, или опыт, устанавливающий самые первые принципы универсальной геометрии», вышедшей в 1733 г., делается попытка доказать V постулат методом от противного. В центре построений Саккери лежит четы-

---

[1] Д. Саккери (1667—1733) — итальянский математик; Г. Ламберт (1728—1777) — немецкий математик и физик; А. Лежандр (1752—1833) — выдающийся французский математик.

рехугольник $AA'B'B$ (рис. 5) с двумя прямыми углами при основании AB и с двумя равными боковыми сторонами AA' и BB'. Из симметрии фигуры $AA'B'B$ относительно перпендикуляра к середине основания вытекает, что углы при вершинах A' и B' равны. Саккери устанавливает следующую теорему.

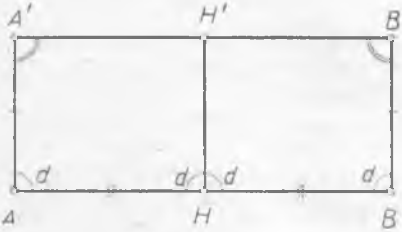


Рис. 5

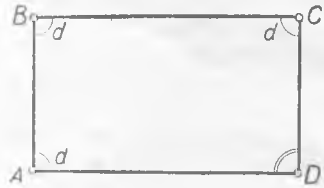


Рис. 6

Теорема 1. *Если угол A' тупой, то это противоречит аксиомам геометрии, если же угол A' прямой, то это утверждение эквивалентно V постулату*[1].

Далее Саккери, допуская, что угол A' острый, после цепи ряда верных рассуждений, аппелируя к нашему наглядному представлению, ошибочно заключает, что предложение о том, что угол A' острый, противоречит остальным аксиомам геометрии.

Таким образом, утверждение, что в четырехугольнике Саккери $AA'B'B$ угол A' острый, эквивалентно предложению, противоположному V постулату.

В сочинении Ламберта «Теория параллельных линий» (1766 г.) в основу построений положен четырехугольник $ABCD$ (рис. 6) с тремя прямыми углами A, B, C. Относительно четвертого угла могут быть сделаны три допущения: что этот угол тупой, прямой или острый.

Ламбертом установлена

Теорема 2. *Гипотеза о том, что угол D тупой, противоречит остальным аксиомам геометрии, гипотеза о том, что угол D прямой, эквивалентна V постулату.*

Из гипотезы острого угла Ламберт развил целую систему далеко идущих следствий, многие из которых противоречили нашему наглядному представлению о свойствах прямых. В отличие от Саккери, Ламберт не сделал ошибки, благодаря которой можно было бы отвергнуть V постулат. Наоборот, в своем сочинении он писал: «Доказательства евклидова постулата могут быть доведены столь далеко, что остается, по-видимому, ничтожная мелочь. Но при тщательном анализе оказывается, что в этой кажущейся мелочи и за-

---

[1] При этом предполагается, что V постулат не включен в список аксиом.

ключается вся суть вопроса; обыкновенно она содержит либо доказываемое предложение, либо равносильный ему постулат».

В работах Лежандра имеется несколько попыток доказательства V постулата. Работы Лежандра представляют интерес, так как в них выясняется связь между V постулатом и предложением о сумме углов треугольника. Лежандр вводит три взаимно исключающие друг друга гипотезы:

1. Сумма углов треугольника больше двух прямых.
2. Сумма углов треугольника равна двум прямым.
3. Сумма углов треугольника меньше двух прямых.

Им доказаны следующие теоремы[1]:

Теорема 3. *Если сумма углов треугольника больше двух прямых, то это противоречит аксиомам геометрии.*

Теорема 4. *Если для всех треугольников сумма углов равна двум прямым, то верен V постулат, и обратно.*

Теорема 5. *Если сумма углов какого-нибудь одного треугольника равна двум прямым, то и для всех треугольников сумма углов равна двум прямым.*

Таким образом, утверждение о том, что сумма углов какого-либо одного треугольника меньше двух прямых, эквивалентно предложению, противоположному V постулату.

3. **Работы Н. И. Лобачевского по основаниям геометрии.** К началу XIX века многочисленные попытки обосновать теорию параллельных и тем самым решить проблему V постулата оказались тщетными. Но в 20-х годах XIX века эта труднейшая многовековая проблема геометрии была решена в выдающихся работах профессора Казанского университета Н. И. Лобачевского (1793—1856)[2]. В своем докладе физико-математическому факультету Казанского университета в 1826 г. и в сочинениях, публиковавшихся начиная с 1829 г., Лобачевский отчетливо формулирует положение, что V постулат не может быть выведен из остальных аксиом геометрии Евклида, и строит новую геометрическую систему, которую он назвал воображаемой геометрией. В основу этой геометрии он положил основные посылки геометрии Евклида, кроме аксиомы о параллельных, заменив ее противоположным утверждением. Воображаемая геометрия была развита Лобачевским до тех же пределов, что и евклидова геометрия. При этом Лобачевский не встретил в ней никаких логических противоречий. Более того, он провел тщательный алгебраический анализ основных уравнений новой гео-

---

[1] Подробное доказательство этих теорем см.: Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, гл. I, § 8.

[2] Подробные сведения о жизни и деятельности Н. И. Лобачевского см. в книге: В. Ф. Каган, Лобачевский (изд. АН СССР. М.—Л., 1944)

метрии и тем дал вполне строгое обоснование построенной им геометрической системы, отвечающее требованиям того времени.

Доказательство непротиворечивости этой новой геометрии на современном уровне строгости было дано лишь в конце XIX века после установления общих принципов логического обоснования геометрии.

Математический мир начала XIX века не был подготовлен к тому, чтобы правильно понять и оценить новые глубокие идеи, заложенные в работах Лобачевского. Только очень немногие геометры могли должным образом понять и оценить работы Лобачевского. Среди них в первую очередь следует отметить К. Гаусса и Я. Больяи[1], которые занимались теорией параллельных независимо друг от друга и независимо от Лобачевского.

Гаусс не публиковал своих результатов по теории параллельных. Оставшиеся после него заметки свидетельствуют о том, что ему был ясен общий план новой геометрии и известны некоторые элементарные теоремы. Гаусс не публиковал даже своих взглядов на основы геометрии, боясь остаться непонятым. Я. Больяи издал свою работу через три года после выхода в свет первой работы Лобачевского (ничего не зная о работах Лобачевского). В ней в менее развитой форме излагается та же теория, которая была построена Лобачевским. Как и Лобачевский, Больяи не получил признания.

Значение работ Лобачевского выяснилось лишь после его смерти. Они оказали исключительное влияние на дальнейшее развитие математики. До Лобачевского евклидова геометрия считалась единственно возможным учением о пространстве. Открытие неевклидовой геометрии уничтожило эту точку зрения. Тем самым было положено начало далеко идущим взглядам на геометрию и предмет ее исследования, что привело к созданию современной концепции абстрактного пространства с его богатейшими разнообразными приложениями как внутри самой математики, так и в смежных с ней разделах науки.

§ 4. Аксиомы связи

Начиная с этого параграфа мы переходим к систематическому построению геометрий Евклида и Лобачевского аксиоматическим методом, общие контуры которого были намечены в § 1. В соответствии с этим мы прежде всего рассмотрим аксиомы связи, которые описывают отношение «принадлежности», или «инцидентности», между основными объектами: точками, прямыми и плоскостями. Кроме термина «принадлежит», для описания

---

[1] К. Ф. Гаусс (1777—1855) — крупнейший немецкий математик; Я. Больяи (1802—1860) — известный венгерский математик.

рассматриваемого нами отношения мы будем применять другие равносильные термины «л е ж и т», «п р о х о д и т» и т. п.

Приведем формулировку аксиом связи.

I. 1. *На каждой прямой лежат по крайней мере две точки.*

I. 2. *Через каждые две точки проходит всегда одна и только одна прямая.*

I. 3. *Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

I. 4. *Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна.*

I. 5. *На каждой плоскости лежит по крайней мере одна точка.*

I. 6. *Если две точки некоторой прямой а принадлежат плоскости α, то и сама прямая а принадлежит плоскости α*[1].

I. 7. *Если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют еще и другую общую точку.*

I. 8. *Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*

З а м е ч а н и я к а к с и о м а м I.1—8:

1. Из аксиомы I.3 следует, что в пространстве существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой. Следовательно, множество точек, а на основании аксиом I. 2 и I. 4 также множества прямых и плоскостей пространства не пусты.

2. Из аксиомы I.8 вытекает, что в пространстве имеется более одной плоскости, а из аксиомы I.3, что в пространстве имеется более одной прямой.

3. Если строить геометрию на плоскости (планиметрию), то для нее достаточно использовать лишь аксиомы I.1—3.

4. Аксиома I.8 отражает тот факт, что пространство, которое мы собираемся изучать, трехмерно.

Отметим ряд теорем, вытекающих из аксиом связи.

Т е о р е м а 1. *Через точку A и прямую a, не проходящую через эту точку, проходит единственная плоскость α.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По аксиоме I. 1 на прямой a есть две точки B и C. Точки A, B, C не лежат на одной прямой, поэтому по аксиоме I. 4 через них проходит единственная плоскость α. Из аксиомы I. 6 вытекает, что прямая a лежит в плоскости α. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Если две различные прямые a и b имеют общую точку A, то через них проходит единственная плоскость.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из аксиомы I.1 следует, что на прямых a и b, помимо точки A, лежат соответственно точки M и N.

---

[1] Ниже мы постоянно точки будем обозначать большими латинскими буквами, прямые — малыми латинскими буквами и, наконец, плоскости — малыми греческими буквами.

Точки M и N различны и три точки A, M, N не лежат на одной прямой; в противном случае по аксиоме I.2 прямые a и b совпадали бы. Через точки A, M, N по аксиоме I. 4 проходит единственная плоскость α. По аксиоме I. 6 прямые a и b лежат в плоскости α. Теорема доказана.

Теорема 3. *На каждой плоскости существуют по крайней мере три точки.*

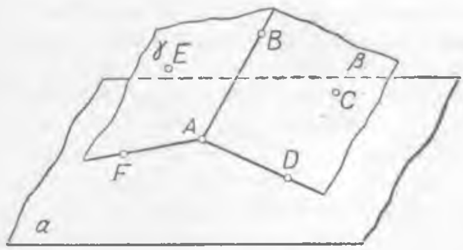


Рис. 7

Доказательство. Пусть α — любая плоскость пространства. По аксиоме I.5 на ней лежит по крайней мере одна точка A (см. рис. 7). По аксиоме I.8 в пространстве существует точка B, не лежащая на плоскости α. По аксиоме I.3 есть точка C, не лежащая на прямой AB. Если C лежит в плоскости α, то первая часть теоремы (существование второй точки в плоскости α) доказана. Пусть C не лежит в α. Из аксиомы I.4 вытекает, что существует единственная плоскость, проходящая через точки A, B, C. Обозначим эту плоскость через β. По построению плоскости α и β различны и имеют общую точку A. Из аксиомы I.7 вытекает, что плоскости α и β имеют тогда еще одну общую точку D. Итак, на плоскости α имеются уже две точки A и D. По аксиоме I.8 существует точка E, не лежащая на плоскости β. Если E принадлежит плоскости α, то теорема доказана. Будем считать, что E не принадлежит плоскости α. Через точки A, B, E по аксиоме I.4 проходит единственная плоскость γ. Плоскость γ отлична и от плоскости β, и от плоскости α и имеет с плоскостью α общую точку A. Из аксиомы I.7 тогда следует, что плоскости α и γ имеют еще одну общую точку F. Так как плоскости β и γ различны, то F не может лежать на прямой AD. Отсюда следует, что на плоскости α есть три точки A, D, F, которые к тому же не лежат на одной прямой.

Теорема доказана.

Если рассматривать системы основных объектов, которые связаны между собой отношением принадлежности, и эта связь заключена в сформулированных выше аксиомах I.1—8, то можно найти много разнообразных систем объектов, имеющих конкретную природу, которые удовлетворяют этим аксиомам. Простейший пример такой системы строится так: рассмотрим четыре предмета одинаковой природы, например четыре куска мела. Каждый из кусков мела примем за точку, любую пару кусков мела — за прямую и, наконец, любую тройку кусков мела — за плоскость. Это и есть основные объекты нашей системы.

Мы будем говорить, что точка принадлежит прямой или плоскости, если соответствующий кусок мела входит соответственно в пару или тройку кусков мела. Аналогично определяется принадлежность прямой по отношению к плоскости.

Легко проверить, что в построенной нами системе объектов выполняются все аксиомы I.1—8.

Все следствия, которые можно извлечь из аксиом связи, должны быть выполнены для построенной нами системы объектов, состоящей из четырех точек, шести прямых и четырех плоскостей. При этом каждая прямая имеет только две, а каждая плоскость имеет только три точки. Поэтому ясно, что из аксиом связи можно получить чрезвычайно мало следствий, и для построения содержательной геометрической теории нужно ввести дополнительно еще целый ряд отношений между основными объектами. В следующем параграфе будут введены аксиомы порядка, которые будут описывать взаимное расположение точек на прямой и с помощью которых будут установлены теоремы разбиения, играющие важную роль в геометрии.

§ 5. Аксиомы порядка

Как уже говорилось, аксиомы порядка описывают взаимное расположение точек одной прямой. Для описания этого отношения применяется термин «между». Переходим к формулировке аксиом.

II. 1. *Если относительно трех точек A, B, C известно, что они связаны отношением «между», то точки A, B, C суть различные точки одной прямой. При этом если точка B лежит между точками A и C, то она лежит также между точками C и A.*

Если запись $\{A, B, C\}$ означает, что B лежит между A и C, то тогда

$$\{A, B, C,\} = \{C, B, A.\}$$

II. 2. *Каковы бы ни были точки A и C на прямой AC, существует точка B такая, что C лежит между A и B.*

II. 3. *Среди любых трех точек, лежащих на одной прямой, не более чем одна лежит между двумя другими.*

Сформулированные выше аксиомы порядка описывают отношение «между» для точек, расположенных на одной прямой. Поэтому они называются часто линейными аксиомами порядка. Из линейных аксиом порядка не следует, что для любых трех точек одной прямой хотя бы одна лежит между двумя другими.

Будем говорить, что пара точек A, B определяет *отрезок* AB. Точки A и B будем называть его *концами*. Все точки, лежащие между A и B, будем называть *внутренними* точками отрезка AB, все прочие точки прямой AB будем называть *внешними* точками отрезка AB.

Из аксиомы II. 2 вытекает, что у каждого отрезка есть внешние точки. Из линейных аксиом порядка нельзя вывести, что у любого отрезка есть внутренние точки.

Как будет видно ниже, важную роль в построении геометрии играет следующая аксиома.

II. 4. *Пусть на плоскости даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой* (см. рис. 8), *и пусть дана прямая a, не проходящая ни через одну из точек A, B, C (предполагается, что прямая a лежит в плоскости, проходящей через точки A, B, C). Тогда если прямая a пересекает отрезок AB во внутренней точке D, то прямая a проходит через внутреннюю точку хотя бы одного из двух отрезков AC или BC.*

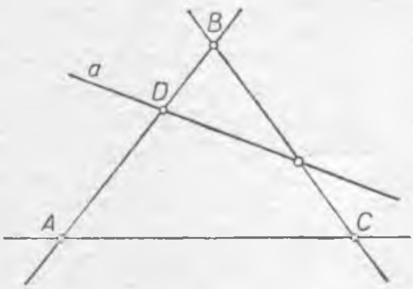


Рис. 8

Аксиома II. 4 была введена впервые венгерским математиком Пашем, поэтому аксиому II. 4 мы часто будем называть аксиомой Паша.

Будем говорить, что три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, определяют *треугольник* ABC. Точки A, B, C называют *вершинами* треугольника, а отрезки AB, BC, AC — его *сторонами*.

С помощью только что введенных понятий аксиому Паша можно сформулировать следующим образом.

Если прямая a расположена в плоскости треугольника ABC, не проходит через точки A, B, C и пересекает одну из сторон треугольника во внутренней точке, то прямая a пересекает по крайней мере одну из двух других сторон треугольника ABC также во внутренней точке.

Сформулируем ряд теорем, которые являются следствиями аксиом связи и порядка.

Теорема 1. *На каждом отрезке есть по крайней мере одна внутренняя точка.*

Теорема 2. *Среди трех точек одной прямой одна всегда лежит между двумя другими.*

Эта теорема является дополнением к аксиоме II. 3. Вместе с аксиомой II. 3 отсюда вытекает, что *для любых трех точек одной прямой всегда одна и только одна лежит между двумя другими.*

Т е о р е м а 3 (д о п о л н е н и е к а к с и о м е П а ш а). *Если для треугольника ABC и прямой a выполнены условия аксиомы Паша, то прямая a может пересекать только один из отрезков AC или BC.*

Т е о р е м а 4. *На каждом отрезке имеется бесконечное множество внутренних точек.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этих теорем проводится с помощью ряда единообразных построений, основанных на аксиоме Паша. Мы приведем здесь лишь доказательство теоремы 1, которое дает достаточное представление о характере соображений, лежащих в основе доказательств теорем 1—4. Доказательство остальных теорем подробно проведено в книге Н. В. Ефимова «Высшая геометрия», к которой мы и отсылаем читателя.

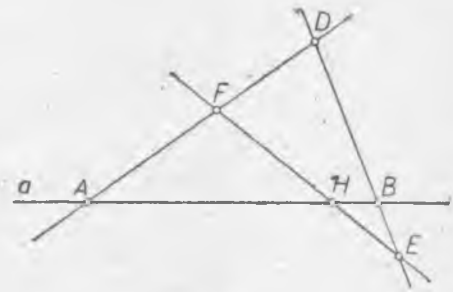


Рис. 9

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. На произвольной прямой a возьмем отрезок AB (рис. 9). Из аксиомы I.3 вытекает, что существует точка F, не лежащая на прямой a. Через точки A, F согласно аксиоме I.2 проходит единственная прямая AF. Прямые a и AF, очевидно, различны. Из аксиомы II. 2 следует, что на прямой AF есть точка D такая, что точка F лежит между A и D. На прямой DB согласно аксиоме II. 2 существует точка E такая, что B лежит между D и E.

Применим к прямой FE и треугольнику ADB аксиому Паша. Тогда прямая FE пересекает либо отрезок AB, либо отрезок DB во внутренней точке. Прямая FE не может пересекать отрезка DB, так как тогда, пользуясь аксиомой I.2 , легко получим, что прямые DE, DF, AB совпадают и, следовательно, точки A, B, F лежат на одной прямой, что невозможно. Итак, прямая FE пересекает отрезок AB во внутренней точке H.

Теорема доказана.

Т е о р е м ы р а з б и е н и я

В этой части параграфа мы будем придерживаться обзорного порядка изложения. Нам важно четко сформулировать основные понятия и теоремы. Подробное изложение доказательств теорем, которые мы здесь приводим, читатель может найти в книге Н. В. Ефимова «Высшая геометрия».

Будем говорить, что на прямой a две точки A и B лежат по одну сторону от фиксированной точки O (рис. 10), если выполнены соотношения

$$\{A,\ B,\ O\}$$

или

$$\{B,\ A,\ O\};$$

Рис. 10

будем говорить, что точки A и C лежат по разные стороны от точки O, если выполнено соотношение

$$\{A,\ O,\ C\}$$

(напомним, что запись $\{A, O, C\}$ означает, что точка O лежит между точками A и C).

Теорема 1. *Пусть a — произвольная прямая и O — произвольно фиксированная на ней точка. Тогда множество точек, лежащих на прямой a, за исключением точки O, можно разбить на два класса так, что точки, лежащие в одном классе, лежат по одну сторону от точки O, а точки, принадлежащие разным классам, лежат по разные стороны от точки O.*

Наметим схему доказательства теоремы 1. На прямой a берем точку A, отличную от O (такая точка найдется в силу аксиомы I. 1). В первый класс относим точку A и все точки, лежащие по ту же сторону от точки O, что и точка A. Во второй класс относим все прочие точки прямой a, исключая точку O. Первый класс не пуст, так как в нем имеется точка A. Из аксиомы II. 2 вытекает, что существует точка B такая, что O лежит между A и B. Легко видеть, что точка B принадлежит второму классу.

Доказательство теоремы теперь сводится к проверке следующих фактов:

1. Если точки M и N принадлежат первому классу, то точки M и N лежат по одну сторону от точки O.

2. Если точки M' и N' принадлежат второму классу, то они также лежат по одну сторону от точки O.

3. Если точки M'' и N'' принадлежат разным классам, то они лежат по разные стороны от точки O.

Пусть теперь на прямой a фиксирована точка O; тогда на прямой a определены два класса точек, о которых шла речь в теореме 1. Мы будем говорить, что каждый из классов определяет некоторую *полупрямую*, или *луч, с началом в точке* O. Из теоремы 1 вытекает, что всякая точка O прямой a разбивает ее на два луча с началом в точке O.

Установим теперь отношение порядка на прямой a. Для этого сначала введем порядок для точек каждой из двух полупрямых с общим началом в точке O. Если точки A и B принадлежат одной полупрямой, то мы будем говорить, что «A предшествует B», или «B следует за A» и записывать это в виде:

$$A \prec B,$$

если выполняется соотношение $\{B,\ A,\ O\}$.

Имеет место

Т е о р е м а 2. *Отношение предшествования, введенное выше для точек обеих полупрямых прямой a с общим началом в точке O, обладает следующими свойствами:*

1) *оно установлено для любых двух точек каждой из полупрямых, т. е. любые две точки одной полупрямой связаны этим отношением;*

2) *отношение предшествования не определяется для одной и той же точки;*

3) *если $A \prec B$, то B не $\prec A$ (отношение предшествования не симметрично);*

4) *если $A \prec B$ и $B \prec C$, то $A \prec C$ (отношение предшествования транзитивно).*

Введем теперь отношение предшествования для всех точек прямой a. Для этого условимся одну из полупрямых считать первой и обозначать I, а другую — второй и обозначать II. Отношение предшествования для точек всей прямой a будем обозначать знаком $-\!\!\!\prec$

Мы будем считать, что

$$A \;-\!\!\!\prec\; B \;\left|\begin{array}{l}
\text{1. Если } A \text{ и } B \text{ принадлежат I и } B \prec A.\\
\text{2. Если } A \text{ принадлежит I, а } B \text{ совпадает с точкой } O.\\
\text{3. Если } A \text{ совпадает с точкой } O, \text{ а } B \text{ принадлежит II.}\\
\text{4. Если } A \text{ принадлежит I, а } B \text{ принадлежит II.}\\
\text{5. Если } A \prec B \text{ и обе точки } A \text{ и } B \text{ принадлежат II.}
\end{array}\right.$$

Имеет место

Т е о р е м а 3. *Отношение предшествования, введенное выше для точек всей прямой a, обладает свойствами 1—4, сформулированными в теореме 2.*

Отношение предшествования можно вводить лишь двумя различными способами, отличающимися друг от друга лишь нумерацией полупрямых I и II. Если отношение предшествования на прямой a построить с помощью полупрямых, имеющих начало в точке O_1, отличной от O, то оно совпадает с одним из тех, которые были построены выше.

Мы будем говорить, что *на прямой введено направление,* если для точек этой прямой введено определенное отношение предшествования. Из теоремы 3 вытекает, *что на прямой можно ввести только два противоположных направления,* а именно, если в направлении, построенном по теореме 3, точка A предшествует точке B, то в другом направлении B предшествует A.

Разбиение плоскости прямой

Пусть на плоскости α дана прямая a. Будем говорить, что *точки A и B* (рис. 11) *лежат по одну сторону от прямой a,* если среди внутренних точек отрезка AB нет точек прямой a. Далее будем говорить, что *точки A и C лежат по разные стороны от прямой a,* если прямая a пересекает отрезок AC во внутренней точке (рис. 12).

Теорема 4. *Всякая прямая a, лежащая на плоскости α, разбивает точки этой плоскости, не лежащие на прямой a, на два класса. Точки, принадлежащие одному классу, лежат по одну сторону от прямой a, а точки, принадлежащие разным классам, лежат по разные стороны от прямой a.*

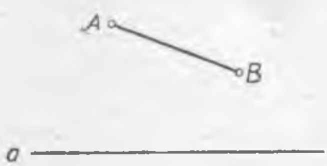


Рис. 11

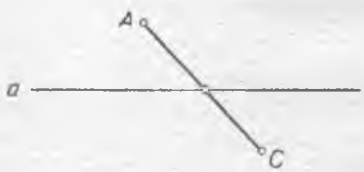


Рис. 12

Доказательство. Пусть точка A не лежит на прямой a. В первый класс отнесем все точки плоскости α, не принадлежащие прямой a и расположенные по ту же сторону прямой a, что и точка

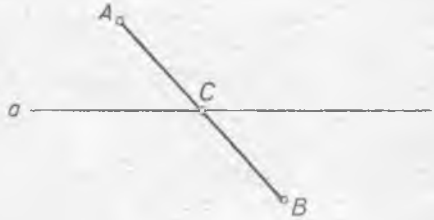


Рис. 13

A. Точку A также относим к первому классу. Ко второму классу относим все прочие точки плоскости α, не лежащие на прямой a. Первый класс, очевидно, не пуст. Возьмем на прямой a какую-нибудь точку C (такая точка найдется по аксиоме I.1). По аксиоме II. 2 на прямой AC есть точка B такая, что C лежит между A и B

(рис. 13). Точка B, очевидно, принадлежит второму классу. Итак, второй класс не пуст.

Для доказательства теоремы достаточно проверить выполнение следующих утверждений:

1. Если точки M и N принадлежат одному классу, то среди внутренних точек отрезка MN нет точек прямой a.

2. Если точки P и Q принадлежат разным классам, то прямая a пересекает отрезок PQ во внутренней точке.

Мы ограничимся лишь рассмотрением случая, когда точки A, M, N или A, P, Q не лежат на одной прямой.

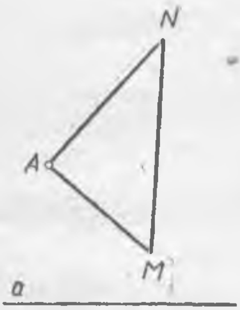


Рис. 14

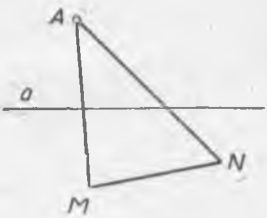


Рис. 15

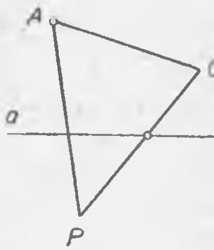


Рис. 16

Если точки M и N принадлежат первому классу (рис. 14), то, применяя аксиому Паша к прямой a и треугольнику AMN, убеждаемся, что прямая a не может пересечь отрезок MN во внутренней точке.

Точно так же, если M и N принадлежат второму классу (рис. 15), то в силу дополнения аксиоме Паша прямая a не может пересечь отрезок MN во внутренней точке.

Наконец, если точки P и Q принадлежат разным классам, то снова, опираясь на аксиому Паша, убеждаемся, что прямая a пересекает отрезок PQ во внутренней точке (рис. 16). Теорема доказана.

Из теоремы 4 вытекает, что всякая прямая на плоскости разбивает ее точки, не принадлежащие прямой, на два класса. Мы будем говорить, что каждый такой класс точек определяет *полуплоскость*. Прямую, разбивающую плоскость на две полуплоскости, будем называть *границей* обеих полуплоскостей.

Аналогично определяются понятия о расположении в пространстве двух точек по одну или по разные стороны от данной плоскости, после чего устанавливается теорема о разбиении плоскостью множества точек пространства на два класса, являющаяся естественным обобщением теоремы 4.

§ 6. Угол, ломаная, многоугольник. Теорема Жордана

Пусть на плоскости α даны две полупрямые k и l с общим началом в точке O, причем k и l вместе не образуют одной прямой. Фигуру, образованную полупрямыми k и l вместе с точкой O, будем называть *углом* и обозначать $\measuredangle k, l$. Полупрямые k и l называются *сторонами угла*, а точка O — его *вершиной*.

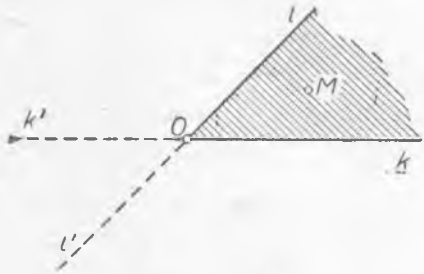


Рис. 17

Дополним каждую из полупрямых k и l соответственно полупрямыми k' и l' до целых прямых (рис. 17). Точку M будем называть *внутренней* точкой $\measuredangle k, l$, если по отношению к прямой kk' она лежит с той же стороны, что и точки полупрямой l, а по отношению к прямой ll' — по ту же сторону, что и точки полупрямой k. Совокупность всех *внутренних* точек угла образует *внутреннюю область* угла. Все точки плоскости α, которые не лежат ни на сторонах угла, ни внутри него, образуют *внешнюю область* угла.

Пусть в пространстве имеется n точек A_1, A_2, ..., A_n. Рассмотрим отрезки A_1A_2, A_2A_3, ... , $A_{n-1}A_n$. Совокупность этих отрезков называется *ломаной*; точки A_1, A_2, ..., A_n называются ее *вершинами*, а отрезки A_1A_2, A_2A_3,..., $A_{n-1}A_n$ — *звеньями*.

Если точки A_1 и A_n совпадают, то ломаная называется *замкнутой*. Ломаная называется *плоской*, если все ее звенья лежат в одной плоскости. Плоская замкнутая ломаная называется *многоугольником*.

В геометрии важную роль играют так называемые простые многоугольники. Многоугольник называется *простым*, если

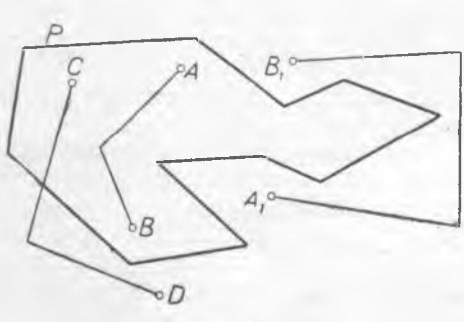


Рис. 18

1) из каждой его вершины исходят только две стороны,

2) никакие два звена, кроме соседних, не имеют ни общих концов, ни общих внутренних точек, а всякие два соседних звена имеют единственную общую точку. (Важно заметить, что поскольку точки A_1 и A_n совпадают, то звенья A_1A_2 и $A_{n-1}A_n$ считаются соседними.)

Пусть на плоскости α дан простой многоугольник P (рис. 18). Мы будем говорить, что точки A и B лежат по одну сторону от многоугольника P, если существует плоская ломаная L с концами в точках A и B, не имеющая общих точек с P. Мы будем говорить, что точки C и D лежат по разные стороны от многоугольника P, если любая ломаная с концами в точках C и D имеет хотя бы одну общую точку с P (само собой разумеется, что точки A, B, C, D не принадлежат многоугольнику P, а ломаные с концами в точках A, B или C, D лежат в плоскости α).

Теорема Жордана. *Всякий простой многоугольник, лежащий на плоскости α, разбивает точки плоскости α, не принадлежащие P, на два класса так, что точки из одного класса лежат по одну сторону от P, а точки из разных классов лежат по разные стороны от P.*

Будем говорить, что каждый класс точек, определяемый многоугольником P, задает область на плоскости. Теорема Жордана состоит в том, что всякий простой многоугольник разбивает плоскость на две области. Этим фактом постоянно пользуются в элементарной геометрии, принимая его за наглядно очевидный. На самом деле теорема Жордана имеет весьма сложное доказательство. Читатель может ознакомиться с ним, например, по книгам Д. Гильберта «Основания геометрии» (М. — Л., Гостехиздат, 1948), А. Д. Александрова «Выпуклые многогранники» (М. — Л., Гостехиздат, 1950).

Можно установить, *что одна из областей, на которые простой многоугольник P разбивает плоскость, не содержит целиком ни одной прямой плоскости α. Эта область называется* ***внутренней областью*** *многоугольника P. Другая область называется* ***внешней областью*** *многоугольника P. Она, напротив, содержит в себе целиком некоторые прямые, принадлежащие плоскости α.*

§ 7. Аксиомы конгруэнтности

Отношение конгруэнтности отрезков и отношение конгруэнтности углов будем обозначать знаком $\equiv$. Это отношение удовлетворяет следующим аксиомам:

III. 1. *Пусть a — произвольная прямая и A — некоторая точка этой прямой. Пусть, далее, CD — произвольный отрезок. Тогда по каждую сторону от точки A на прямой a существуют единственные точки B_1 и B_2 такие, что*

$$AB_1 \equiv CD, \qquad AB_2 \equiv CD$$

(рис. 19). *При этом отношение конгруэнтности не зависит от того, в каком порядке записываются концы отрезка, т. е.*

$$AB \equiv BA.$$

Рис. 19

Аксиома III. 1 утверждает, что от любой точки A произвольной прямой a по каждую сторону от точки A можно отложить отрезок, конгруэнтный данному, и притом только один.

III. 2. *Отношение конгруэнтности отрезков удовлетворяет требованиям рефлексивности, симметрии и транзитивности, т. е.*

а) $AB \equiv AB$ *(рефлексивность),*
б) *если* $AB \equiv CD$, *то* $CD \equiv AB$ *(симметрия),*
в) *если* $AB \equiv CD$, $CD \equiv EF$, *то* $AB \equiv EF$ *(транзитивность).*

III. 3. *Пусть на двух прямых a и a' имеются соответственно точки A, B, C и A', B', C'. Тогда если две пары соответствующих отрезков конгруэнтны, то и третья пара состоит из конгруэнтных отрезков. Предполагается, что отрезки AB и BC, а также $A'B'$ и $B'C'$ общих внутренних точек не имеют* (см. рис. 20).

Рис. 20

Утверждение аксиомы III. 3 можно записать в одной из следующих форм:

из $\begin{matrix} AB \equiv A'B', \\ BC \equiv B'C' \end{matrix}$ следует $AC \equiv A'C'$,

или

из $\begin{matrix} AB \equiv A'B', \\ AC \equiv A'C' \end{matrix}$ следует $BC \equiv B'C'$.

Первое соотношение аксиоматизирует без привлечения понятия суммы отрезка утверждение, что при сложении двух пар конгруэнтных между собой отрезков снова получаются конгруэнтные отрезки. Второе соотношение аксиоматизирует без привлечения понятия разности отрезков аналогичное утверждение для разности отрезков.

III. 4. *Пусть даны* $\measuredangle\, k, l$ *и полупрямая a с началом в точке O* (рис. 21). *Тогда существуют полупрямые b' и b'' с началом в точке O, расположенные по разные стороны от полупрямой a*[1] *и такие, что*

$$\measuredangle\, k, l \equiv \measuredangle\, a, b',$$
$$\measuredangle\, k, l \equiv \measuredangle\, a, b''.$$

---

[1] Под словами «точки A и B лежат по разные стороны от полупрямой a» понимается следующее: полупрямая a дополняется до целой прямой a; тогда отношение «точки A и B лежат по разные стороны от прямой a» определено. Оно и принимается за отношение «точки A и B лежат по разные стороны от полупрямой a».

Такие полупрямые b' и b'' в каждой из полуплоскостей, определяемых полупрямой a, единственны.

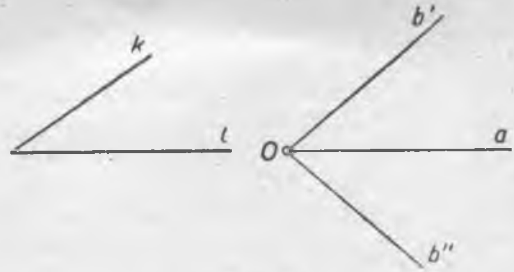


Рис. 21

Аксиому III. 4 можно наглядно сформулировать так: от каждой полупрямой в каждой полуплоскости можно отложить угол, конгруэнтный данному, и притом только один.

III. 5. *Отношение конгруэнтности углов обладает следующими свойствами:*

а) $\sphericalangle k, l \equiv \sphericalangle l, k$,

б) $\sphericalangle k, l \equiv \sphericalangle k, l$ *(рефлексивность)*,

в) *если* $\sphericalangle k, l \equiv \sphericalangle m, n$, *то* $\sphericalangle m, n \equiv \sphericalangle k, l$ *(симметрия)*,

г) *если* $\sphericalangle k, l \equiv \sphericalangle m, n$ *и* $\sphericalangle m, n \equiv \sphericalangle p, q$, *то* $\sphericalangle k, l \equiv \sphericalangle p, q$ *(транзитивность)*.

III. 6. *Пусть даны два треугольника* ABC *и* $A'B'C'$, *пусть в них*

$$BA \equiv B'A',$$
$$AC \equiv A'C',$$
$$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$$

(рис. 22). *Тогда*

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$$

и

$$\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'.$$

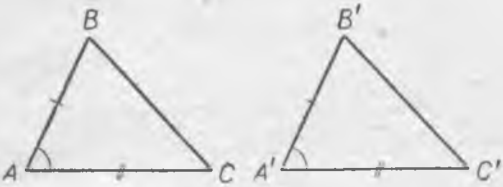


Рис. 22

§ 8. Следствия из аксиом связи, порядка и конгруэнтности

В этом параграфе рассматриваются факты, которые обычно составляют содержание школьного курса геометрии. Они охватывают начало курса геометрии до теории параллельных. Большинство теорем будет приведено без доказательств, которые читатель либо легко восстановит сам, либо найдет в книге Н. В. Ефимова «Высшая геометрия».

1. Признаки конгруэнтности треугольников. Два треугольника ABC и $A'B'C'$ называются *конгруэнтными*, если все соответствующие стороны и все соответствующие углы этих треугольников конгруэнтны.

Теорема 1 (первый признак конгруэнтности треугольников). *Если в треугольниках ABC и $A'B'C'$ конгруэнтны два соответствующих угла и, кроме того, попарно конгруэнтны стороны, заключающие этот угол, то треугольники ABC и $A'B'C'$ конгруэнтны.*

Доказательство. Допустим, что в треугольниках ABC и $A'B'C'$

$$BA \equiv B'A',\ AC \equiv A'C',\ \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$$

(рис. 23). Докажем, что треугольник $A'B'C'$ конгруэнтен треугольнику ABC. По аксиоме III. 6

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C',\quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B',$$

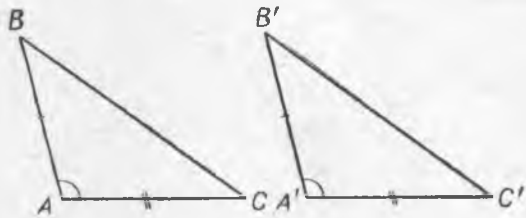


Рис. 23

и для завершения доказательства теоремы нам осталось установить, что

$$BC \equiv B'C'.$$

Допустим, что это не так. Тогда на прямой $B'C'$ от точки B' отложим отрезок $B'C''$, конгруэнтный BC, так, чтобы точки C' и C'' лежали бы по одну сторону от $A'B'$. Точки C' и C'', очевидно, не совпадают (рис. 24). По условиям теоремы и способу построения треугольники ABC и $A'B'C'$ таковы, что

$$AB \equiv A'B',\quad BC \equiv B'C'',$$
$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C''.$$

Отсюда на основании аксиомы III. 6 имеем:

$$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'',$$

а по условию

$$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'.$$

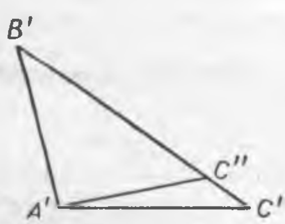


Рис. 24

Полупрямые $A'C'$ и $A'C''$ лежат по одну сторону от прямой $A'B'$, имеют общее начало — точку A' и составляют конгруэнтные углы с полупрямой $A'B'$, что невозможно по аксиоме III. 4. Полученное противоречие показывает, что допущение о неконгруэнтности отрезков BC и $B'C'$ неверно и, следовательно,

$$\triangle\ ABC \equiv \triangle\ A'B'C'.$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 2 (в т о р о й п р и з н а к к о н г р у э н т н о с т и т р е у г о л ь н и к о в). *Если у двух треугольников ABC и $A'B'C'$ конгруэнтна какая-нибудь пара соответствующих сторон и углы, прилегающие к этим сторонам, также попарно конгруэнтны, то треугольники ABC и $A'B'C'$ конгруэнтны.*

Другими словами, *если*

$$AB \equiv A'B',$$
$$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C', \quad \sphericalangle CBA \equiv \sphericalangle C'B'A',$$

то треугольники ABC и $A'B'C'$ конгруэнтны.

Т е о р е м а 3. *Пусть даны две точки O и O' (точка O может и совпадать с точкой O'), из которых соответственно исходят полупрямые l, m, n и l', m', n', причем если m лежит внутри угла между l и n, то и m' лежит внутри угла между l' и n'. Тогда если две пары соответствующих углов конгруэнтны, то и третьи пары конгруэнтны. Например* (рис. 25), *если*

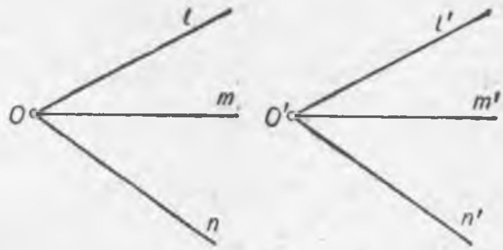


Рис. 25

$$\sphericalangle l,\ m \equiv \sphericalangle l',\ m',$$
$$\sphericalangle m,\ n, \equiv \sphericalangle m',\ n',$$

то

$$\sphericalangle l,\ n \equiv \sphericalangle l',\ n',$$

или если

$$\sphericalangle l,\ n \equiv \sphericalangle l',\ n',$$
$$\sphericalangle m,\ n \equiv \sphericalangle m',\ n',$$

то

$$\sphericalangle l,\ m \equiv \sphericalangle l',\ m'.$$

Теорему 3 наглядно можно интерпретировать так: при сложении и вычитании конгруэнтных углов мы вновь получаем конгруэнтные углы; при этом не вводится понятия суммы и разности углов.

Т е о р е м а 4. *Углы при основании равнобедренного треугольника конгруэнтны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ABC — равнобедренный треугольник и в нем

$$AB \equiv BC.$$

Рассмотрим треугольник ABC два раза как два различных треугольника ABC и ACB, считая, что стороне AB первого соответствует сторона BC второго и стороне BC первого треугольника соответствует сторона AB второго. При этом соответствии сторона AC

отвечает сама себе, угол ACB отвечает углу CAB, угол CAB — углу ACB и, наконец, угол ABC отвечает сам себе. Из теоремы 1 вытекает, что треугольники ACB и ABC конгруэнтны, и потому

$$\angle ACB \equiv \angle CAB.$$

Теорема доказана.

Теорема 5 (третий признак конгруэнтности треугольников). *Если в треугольниках ABC и $A'B'C'$ все три пары соответствующих сторон конгруэнтны, то треугольники ABC и $A'B'C'$ также конгруэнтны.*

Эта теорема доказывается так же, как и в школьном курсе геометрии, с помощью теорем 3 и 4.

2. Смежные и вертикальные углы. Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а две другие стороны составляют вместе одну прямую.

Угол, конгруэнтный своему смежному, называется *прямым*.

Два угла называются *вертикальными*, если их соответствующие стороны попарно образуют прямые.

Теорема 6. *Прямой угол существует, т. е. существует угол, конгруэнтный своему смежному.*

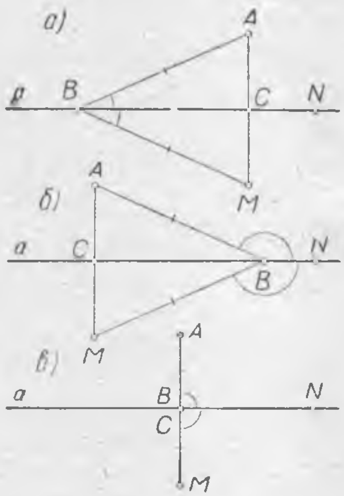


Рис. 26

Доказательство. Пусть a — некоторая прямая и A — точка, не лежащая на ней (рис. 26)[1]. На прямой a возьмем произвольную точку B и проведем полупрямую BM, составляющую с полупрямой BN (N — точка прямой a) угол, конгруэнтный углу NBA, и расположенную по другую сторону от прямой a, чем точка A. При этом точка M выбирается так, что $AB = BM$. На основании теоремы разбиения прямая a пересекает прямую AM в некоторой точке C.

По первому признаку конгруэнтности треугольники ABC и BMC конгруэнтны и, следовательно, углы ACB и MCB конгруэнтны. Так как эти углы смежные, то каждый из них является прямым.

Теорема доказана.

Теорема 7. *Если два угла конгруэнтны, то и смежные углы также конгруэнтны.*

---

[1] В доказательстве теоремы рассмотрен случай, которому соответствует рис. 26, *а*). Доказательство теоремы для двух других случаев (рис. 26, *б*) и *в*)) читатель легко проведет сам.

Т е о р е м а 8. *Вертикальные углы конгруэнтны между собой.*

Т е о р е м а 9. *Все прямые углы между собой конгруэнтны.*

Т е о р е м а 10. *Для каждого отрезка AB существует единственная внутренняя точка O такая, что*

$$AO = OB.$$

Точка O называется *серединой отрезка* AB.

Теорему 10 в другой редакции можно сформулировать так: каждый отрезок можно разделить пополам и притом единственным образом.

Т е о р е м а 11. *В каждом равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине есть медиана и высота.*

Т е о р е м а 12. *Каждый угол можно разделить пополам и притом единственным образом.*

Т е о р е м а 13. *Через каждую точку плоскости проходит одна и только одна прямая, перпендикулярная данной прямой.*

3. Сравнение между собой отрезков и углов. Пусть даны два отрезка AB и CD. Если внутри отрезка AB существует точка E такая, что $AE = CD$, то будем говорить, что отрезок AB больше отрезка CD, и записывать это так: $AB > CD$.

Мы также будем говорить в этом случае, что отрезок CD меньше отрезка AB, и пользоваться записью: $CD < AB$.

Непосредственно из аксиом порядка и конгруэнтности вытекают следующие теоремы.

Т е о р е м а 14. *Для любых двух отрезков AB и CD всегда выполнено одно и только одно из трех соотношений:*

$$AB < CD,$$
$$AB = CD,$$
$$AB > CD.$$

Т е о р е м а 15. *Отношение «больше» обладает свойством транзитивности, но ни рефлексивностью, ни симметрией не обладает.*

После того как введено отношение $<$ между отрезками и доказаны его основные свойства (теоремы 14 и 15), точно так же вводится отношение $<$ для углов и устанавливаются теоремы о свойствах этого отношения, аналогичные теоремам 14 и 15. Далее справедливы

Т е о р е м а 16. *Во всяком треугольнике внешний угол больше любого внутреннего, с ним не смежного.*

Т е о р е м а 17. *Во всяком треугольнике по крайней мере два угла острые.*

Т е о р е м а 18. *В треугольнике бóльшая сторона лежит против бóльшего угла и, обратно, бóльший угол лежит против бóльшей стороны.*

Т е о р е м а 19. *Перпендикуляр короче наклонной.*

Т е о р е м а 20. *Каждая сторона треугольника меньше суммы и больше разности двух других его сторон.*

Из последней теоремы непосредственно вытекает

Теорема 21. *Отрезок прямой короче ломаной, соединяющей его концы.*

§ 9. Группа преобразований множества

1. Преобразования множества. Пусть M — произвольное множество; элементы его будем обозначать буквами $x, y, z, \ldots$. Если каждому элементу x множества M поставлен в соответствие некоторый вполне определенный элемент $x' = f(x)$ этого же множества M, то мы будем говорить, что определено *отображение* f множества M в себя. Элемент x' обычно называют *образом* элемента x при отображении f, а x — *прообразом* элемента $x' = f(x)$. Множество M называют *областью определения отображения* f, а совокупность всех образов $x' = f(x)$, где $x \in M$, — *областью значений отображения* f и обозначают $f(M)$.

Очевидно, $f(M) \subseteq M$. Если $f(M) = M$, то говорят, что f есть *отображение множества* M *на себя.*

Отображение f множества M на себя называется *взаимно однозначным*, если разным x_1 и x_2 отвечают всегда разные элементы $x'_1 = f(x_1)$ и $x_2' = f(x_2)$. В дальнейшем взаимно однозначные отображения множества M на себя будем называть *преобразованиями* множества M.

Пусть f — преобразование множества M. Так как для всякого $x' \in M$ относительно преобразования f есть только единственный прообраз x, то, относя каждому элементу $x' \in M$ его прообраз при преобразовании f, получим некоторое отображение

$$x = \varphi(x')$$

множества M на себя. Легко видеть, что φ — взаимно однозначное отображение M на себя, т. е. φ является преобразованием M. Преобразование φ называется *обратным* к преобразованию f и обозначается

$$x = f^{-1}(x').$$

Пусть

$$x' = f_1(x)$$

и

$$x' = f_2(x)$$

— два преобразования множества M. Каждому элементу $x \in M$ сопоставим элемент x' такой, что x' есть образ элемента $f_1(x)$ относительно преобразования f_2. Другими словами, действуем на x сначала преобразованием f_1, а к элементу $f_1(x)$ применяем затем преобразование f_2. В результате получаем некоторое преобразование множества M:

$$x' = f_2(f_1(x)).$$

Оно называется *произведением* преобразований f_1 и f_2 и обозначается

$$f_2 f_1;$$

в применении к любому элементу $x \in M$ имеем:

$$(f_2 f_1)(x) = f_2(f_1(x)).$$

Произведение преобразований, вообще говоря, зависит от того, в каком порядке они производятся, т. е. не при всяком $x \in M$ равенство

$$f_2(f_1(x)) = f_1(f_2(x))$$

может быть верным. Поэтому мы обращаем внимание, что для преобразования

$$x' = (f_2 f_1)(x)$$

вначале осуществляется преобразование f_1 над x, а затем к результату $f_2(x)$ применяется преобразование f_2.

Преобразование, оставляющее все элементы на своих местах, называется *тождественным* и обозначается e. Очевидно, что если

$$x' = f(x)$$

— некоторое взаимно однозначное преобразование множества M и

$$x' = f^{-1}(x)$$

— обратное ему преобразование, то

$$f(f^{-1}(x)) = x = e(x), \qquad f^{-1}(f(x)) = x = e(x),$$

и, следовательно,

$$f f^{-1} = f^{-1} f = e.$$

Таким образом, произведение данного преобразования и обратного к нему есть тождественное преобразование; при этом порядок, в котором производятся преобразования f и f^{-1}, безразличен.

2. Понятие группы. В этом пункте мы напоминаем читателю понятие группы и ряд простейших фактов, непосредственно вытекающих из определения группы.

Говорят, что в совокупности объектов G, природа которых безразлична, определена *операция*, если некоторым парам элементов $a, b \in G$, взятых в определенном порядке, поставлен в соответствие по определенному закону некоторый элемент $c \in G$. Обычно указанную операцию называют *умножением* и обозначают так:

$$c = a \cdot b,$$

элемент c называется *произведением* элементов a и b.

Множество G с введенной в нем по некоторому определенному закону операцией умножения называют ***группой****, если выполняются следующие условия (аксиомы группы):*

1. *Для каждой пары элементов $a, b \in G$ определено произведение*

$$c = a \cdot b \in G.$$

2. *Для любых трех элементов a, b, $c \in G$ всегда имеет место равенство*

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$

которое обычно называется законом ассоциативности для умножения.

3. *Существует такой элемент $e \in G$, что для любого $a \in G$ имеет место равенство*

$$a \cdot e = a.$$

Элемент e называется *единицей* группы.

4. *Для любого элемента $a \in G$ существует такой, зависящий от a элемент $x \in G$, что имеет место равенство:*

$$a \cdot x = e.$$

Элемент x называется *обратным* элементу a и обозначается a^{-1}.

Отметим простейшие факты, вытекающие непосредственно из определения группы.

а) *Если e — единица группы, то для любого $a \in G$ имеем:*

$$e \cdot a = a.$$

Действительно, из соотношения

$$e \cdot e = e = a \cdot a^{-1},$$

справедливого при любом $a \in G$, имеем: $e \cdot (a\ a^{-1}) = a \cdot a^{-1}$. Пусть a^* — обратный элемент для a^{-1}, тогда

$$a^{-1} \cdot a^* = e,$$

и потому, используя ассоциативность умножения, получим из соотношения

$$e \cdot (a \cdot a^{-1}) = a \cdot a^{-1}$$

равенство

$$(e \cdot a) \cdot (a^{-1}\ a^*) = a \cdot (a^{-1} \cdot a^*).$$

Отсюда

$$(e \cdot a) \cdot e = a \cdot e,$$

и, так как e — единица группы, получаем:

$$e \cdot a = a.$$

Таким образом, если e — единица группы, то она одновременно и «правая», и «левая» единица.

б) *В каждой группе есть только одна единица.*

Действительно, если в группе G имелось бы две единицы, e и e_1, то, используя утверждение а), мы бы имели, что

$$e_1 = e \cdot e_1 = e,$$

т. е.

$$e_1 = e.$$

в) *Если $a \cdot x = e$, то $x \cdot a = e$.* Благодаря этому свойству нет надобности различать «правый» и «левый» обратные элементы.

Итак, пусть

$$a \cdot x = e.$$

Положим

$$x \cdot a = y,$$

где $y \in G$ по определению группы. Отсюда

$$(x \cdot a) \cdot x = y \cdot x,$$

или

$$x \cdot (a \cdot x) = y \cdot x.$$

Так как

$$a \cdot x = e,$$

то

$$x = y \cdot x.$$

Пусть x^{-1} — элемент, обратный к элементу x:

$$x \cdot x^{-1} = e.$$

Тогда

$$x \cdot x^{-1} = (y \cdot x) \cdot x^{-1}.$$

Отсюда

$$e = y \cdot (x \cdot x^{-1}) = y \cdot e = y.$$

Итак,

$$y = e.$$

г) *Если $a \cdot x = e$ и $a \cdot y = e$, то $x = y$, т. е. обратный элемент для данного элемента a определяется однозначно.*

Действительно, если a^{-1} — элемент, обратный для a, то, используя свойство в), имеем:

$$a^{-1} = a^{-1} \cdot e = a^{-1} \cdot (a \cdot x) = (a^{-1} \cdot a) \cdot x = e \cdot x = x,$$

$$a^{-1} = a^{-1} \cdot e = a^{-1} \cdot (a \cdot y) = (a^{-1} \cdot a) \cdot y = e \cdot y = y.$$

Отсюда

$$x = y.$$

д) Из всех свойств группы, отмеченных выше, легко вытекает следующее предложение: *по данным элементам a и b всегда, и притом однозначно, находится элемент x, удовлетворяющий равенству $a \cdot x = b$, именно $x = a^{-1} \cdot b$, а также элемент y, удовлетворяющий* *равенству* $y \cdot a = b$, *именно* $y = b \cdot a^{-1}$. Таким образом, *в группе G всегда, и притом однозначно, определено действие, обратное групповому умножению.*

Множество H, состоящее из части элементов группы G, называется *подгруппой*, если оно относительно операции умножения, определенной в G, само является группой. Очевидно, во всякой подгруппе H группы G содержится единица группы, и наряду с каждым элементом a в подгруппу входит и обратный ему элемент a^{-1}.

Всякая группа имеет две *тривиальные* подгруппы: саму группу и группу, состоящую из одного элемента — единицы группы. Всякая подгруппа данной группы, отличная от этих двух тривиальных подгрупп, называется *собственной*.

3. Группа преобразований множества. Пусть M — некоторое множество. В п. 1 настоящего параграфа мы определили понятие преобразования множества M и ввели операцию умножения таких преобразований. Имеет место следующая важная

Теорема 1. *Совокупность преобразований множества M относительно операции умножения образует группу.*

Доказательство. Напомним, что под произведением $f_2 f_1$ двух преобразований f_1 и f_2 множества M, взятых в определенном порядке, мы понимали преобразование множества M, состоящее в последовательном выполнении над любым элементом x множества M сначала преобразования f_1, а затем преобразования f_2, т. е. если $x \in M$, то

$$(f_2 f_1)(x) = f_2(f_1(x)).$$

Как уже было отмечено в п. 1 настоящего параграфа, произведение двух преобразований множества M снова есть преобразование множества M. Поэтому доказательство теоремы 1 сводится к проверке аксиом 2, 3, 4, входящих в определение группы.

Для любых трех преобразований множества M имеем:

$$f_3(f_2 f_1) = (f_3 f_2) f_1.$$

Действительно, если

$$x' = f_1(x),$$
$$x' = f_2(x),$$
$$x' = f_3(x)$$

— данные преобразования, то $f_3(f_2 f_1)$ и $(f_3 f_2) f_1$ в конечном итоге определяют одно и то же преобразование

$$x' = f_3(f_2(f_1(x))).$$

Отсюда и вытекает, что

$$f_3(f_2 f_1) = (f_3 f_2) f_1.$$

Далее, если буквой e обозначить тождественное преобразование, то для любого преобразования f множества M имеем:

$$fe = f.$$

Действительно, для любого $x \in M$ имеем:

$$e(x) = x,$$

и потому если

$$x' = f(x)$$

— преобразование, обозначенное буквой f, то fe представляет собой преобразование

$$x' = f(e(x)) = f(x),$$

совпадающее с f.

Далее, для преобразования f множества M, как показано в п. 1 § 9, всегда есть обратное f^{-1}, для которого справедливо соотношение

$$ff^{-1} = e.$$

Итак, совокупность преобразований множества относительно операции умножения удовлетворяет всем аксиомам группы.

Теорема доказана.

Любую подгруппу группы всех преобразований множества M обычно также называют *группой преобразований множества* M. Для того чтобы некоторая совокупность преобразований множества M была группой, достаточно соблюдение следующих двух требований:

1. *Если f_1 и f_2 суть преобразования данной совокупности, то их произведение $f_2 f_1$ должно также входить в эту совокупность.*

2. *Если f — какое-нибудь преобразование из данной совокупности, то обратное ему преобразование f^{-1} также должно принадлежать этой совокупности.*

Действительно, как было показано в доказательстве теоремы 1, закон ассоциативности для произведения преобразований множества M всегда выполняется; далее из условий 1 и 2, которым удовлетворяет рассматриваемая совокупность преобразований, вытекает, что единица группы преобразований (тождественное преобразование) также входит в указанную совокупность.

Таким образом, совокупность преобразований данного множества, удовлетворяющая требованиям 1 и 2, образует группу.

4. Геометрия данной группы. Пусть даны множество произвольных элементов M и некоторая группа его преобразований G. Множество M называют *пространством*, его элементы — *точками*, а всякую совокупность точек — *фигурой*.

Фигуру Q_1 будем называть *эквивалентной или равной фигуре* Q_2 относительно группы G, если в группе G есть преобразование, переводящее фигуру Q_1 в фигуру Q_2.

Всякое отношение эквивалентности или равенства между фигурами должно удовлетворять требованиям *рефлексивности, симметрии и транзитивности*. Из условий, характеризующих группу преобразований (условия 1 и 2, сформулированные в конце п. 3), вытекает, что введенное отношение эквивалентности фигур обладает указанными свойствами.

Действительно, любая фигура Q эквивалентна самой себе, поскольку тождественное преобразование e пространства M входит в группу G. Далее, если фигура Q_1 эквивалентна фигуре Q_2, то Q_1 переводится в Q_2 некоторым преобразованием $f \in G$. Очевидно, что преобразование f^{-1} переводит фигуру Q_2 в фигуру Q_1. Следовательно, фигура Q_2 эквивалентна фигуре Q_1. Итак, отношение эквивалентности симметрично.

Пусть теперь фигура Q_1 эквивалентна фигуре Q_2, а фигура Q_2 эквивалентна фигуре Q_3. Обозначим через f_1 и f_2 преобразования из группы G, переводящие соответственно Q_1 в Q_2 и Q_2 в Q_3. Тогда преобразование $f = f_2 f_1$ переводит Q_1 в Q_3. Таким образом, фигуры Q_1 и Q_3 эквивалентны, и транзитивность отношения эквивалентности доказана.

Из свойств рефлексивности, симметрии и транзитивности отношения эквивалентности вытекает, что все фигуры пространства M разбиваются на попарно непересекающиеся классы эквивалентных фигур.

Известный немецкий математик Ф. Клейн (1849—1925) в конце XIX века предложил считать *геометрическими* лишь те числовые характеристики и свойства фигур пространства M, которые остаются неизменными относительно любых преобразований из группы G. Другими словами, геометрическими являются лишь те числовые характеристики и свойства фигур пространства M, которые одинаковы у всех эквивалентных между собой фигур. *Так как отношение эквивалентности фигур строится по фиксированной группе преобразования G пространства M, то, рассматривая различные группы преобразований пространства M, мы можем получить разные геометрии в этом пространстве.*

Числовые характеристики и свойства фигур, не изменяющиеся при некотором преобразовании f пространства M, называются *инвариантами преобразования f*. Согласно Клейну, *геометрией пространства M, построенной с помощью группы G преобразований этого пространства, называется система предложений об общих инвариантах всех преобразований группы G.*

Идея Клейна рассматривать различные геометрии как теории инвариантов соответствующих групп вскрыла глубокие связи между разнообразными геометрическими системами, которые были исследованы к восьмидесятым годам XIX века. Эта точка зрения была изложена Клейном в 1878 г. при вступлении на кафедру университета в г. Эрлангене в лекции «Сравнительное рассмотрение новейших геометрических исследований», которую теперь принято называть «Эрлангенской программой». Идеи Клейна оказали большое влияние на дальнейшее развитие геометрии в XIX и XX веках.

В главах I, II, III будут даны конкретные приложения теоретико-групповых методов Клейна в геометриях Евклида, Лобачевского, аффинной и проективной.

§ 10. Движения. Конгруэнтные фигуры

1. Движения. В пространстве, образованном точками, прямыми и плоскостями, удовлетворяющими аксиомам связи, порядка и конгруэнтности, будем рассматривать преобразования точек. Как было выяснено в п. 3 § 9, совокупность всех таких преобразований относительно операции умножения образует группу. Нас будет интересовать некоторая подгруппа этой группы, состоящая из преобразований, оставляющих инвариантной конгруэнтность отрезков.

Пусть f — преобразование пространства, переводящее точку A в точку A' и точку B в точку B'. Отрезки AB и $A'B'$ будем называть соответствующими.

Преобразование f точек пространства будем называть *движением*, если для любых точек A, B отрезок AB и соответствующий ему отрезок $A'B'$ конгруэнтны.

Т е о р е м а 1. *Совокупность движений пространства образует группу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно результатам п. 3 § 9, для доказательства теоремы достаточно установить, что произведение двух движений есть снова движение и преобразование, обратное движению, также является движением.

Пусть f_1 и f_2 — два движения и A и B — любые точки пространства. Преобразование f_1 переводит точки A и B в точки A' и B', а преобразование f_2 переводит точки A' и B' в точки A'' и B''. Если f — произведение движений f_1 и f_2, то отрезки AB и $A''B''$ — соответствующие.

Так как

$$AB \equiv A'B'$$

и

$$A'B' \equiv A''B'',$$

то из аксиомы III. 2 следует, что

$$AB \equiv A''B''.$$

Отсюда вытекает, что преобразование f — произведение движений f_1 и f_2 — является движением.

Пусть f — движение пространства. Так как f — преобразование пространства, то для него существует обратное преобразование f^{-1}, являющееся также взаимно однозначным отображением точек пространства. Если движение f переводило две любые точки A и B пространства в точки A' и B', то обратное преобразование переводит A' и B' в точки A и B.

Так как f есть движение, то

$$AB \equiv A'B'.$$

По аксиоме III. 2 отношение конгруэнтности отрезков симметрично. Поэтому

$$A'B' \equiv AB.$$

Отсюда вытекает, что преобразование f^{-1} является движением. Теорема доказана.

Фигуры, эквивалентные относительно группы движений, называются *конгруэнтными*. Другими словами, две фигуры конгруэнтны, если существует движение пространства, переводящее одну фигуру в другую. Классы эквивалентных фигур относительно группы движений называются *классами конгруэнтных фигур*.

Выше движения были определены как преобразования точек пространства, сохраняющие конгруэнтность отрезков. Поэтому из определения движения еще не вытекает непосредственно утверждение: если точки A, B, C,. . . расположены на одной прямой a, то образы этих точек A', B', C', . . . относительно любого движения также лежат на одной прямой. Этот вопрос требует специального рассмотрения, которое проводится в теореме 2.

Теорема 2. *При движении прямая переходит в прямую. Другими словами, свойство точек принадлежать прямой инвариантно относительно любого преобразования из группы движений.*

Доказательство теоремы есть простое следствие теоремы 20 п. 3 § 8. Действительно, если A, B, C — три точки прямой a, то одна из них лежит между двумя другими. Допустим для определенности, что B лежит между A и C. Таким образом, отрезок AC составлен из отрезков AB и BC. Если образы точек A, B, C при движении f—точки A, B, C—не лежат на одной прямой, то точки A', B', C' образуют треугольник, и по теореме 20 § 8 отрезок $A'C'$ меньше отрезка, составленного из отрезков $A'B'$ и $B'C'$. Так как

$$AB \equiv A'B' \quad \text{и} \quad BC \equiv B'C',$$

то

$$AC > A'C',$$

но это противоречит тому, что

$$AC \equiv A'C',$$

ибо отрезки AC и $A'C'$ — соответствующие при движении f.

Итак, образы точек прямой a при движении f расположены на некоторой прямой a'. Обозначим через M множество точек прямой a, а через M' — множество точек прямой a'. Докажем, что движение f переводит M на в с е M'. Если через $f(M)$ обозначить образ множества M при движении f, то, очевидно,

$$f(M) \subseteq M'.$$

Докажем, что

$$f(M) = M'.$$

Если бы это было не так, то нашлась бы точка X', принадлежащая множеству M' и не принадлежащая множеству $f(M)$. Пусть O и A — две любые точки прямой a и O' и A' — их образы. Очевидно, $O', A' \in f(M)$ и

$$OA \equiv O'A'.$$

Пусть, для определенности, точка X' лежит между точками O' и A'. В силу аксиом III. 1—3 на прямой a существует единственная точка X такая, что X лежит между O и A, и имеют место соотношения

$$OX \equiv O'X', \quad XA \equiv X'A'.$$

Отсюда следует, что образ точки X при движении f есть точка X'. Так как $X \in M$, то $X' \in f(M)$ и, следовательно, наше допущение, что образ множества M не покрывает все множество M', не верно, и, стало быть,

$$f(M) = M'.$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. *Пусть точки A, B и C движением переводятся в точки A', B', C', тогда угол между отрезками AB и BC конгруэнтен углу между отрезками $A'B'$ и $B'C'$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 2 вытекает, что отрезки AB, BC, AC движением переводятся соответственно в отрезки $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$. Так как при этом

$$\begin{aligned} AB &\equiv A'B', \\ BC &\equiv B'C', \\ AC &\equiv A'C', \end{aligned}$$

то из третьего признака конгруэнтности треугольников вытекает, что $\measuredangle\ ABC \equiv \measuredangle\ A'B'C'$.

Теорема доказана.

Из теоремы 3 вытекает, что углы, образованные полупрямыми с общим началом, при всяком движении переводятся в конгруэнтные углы.

Отметим без доказательства следующие теоремы.

Т е о р е м а 4. *При движении плоскость переходит в плоскость. Другими словами, свойство точек принадлежать плоскости инвариантно относительно любого движения.*

Т е о р е м а 5. *Пусть A, B, C, D — четыре точки некоторой фигуры Q (т. е. некоторого множества точек), не лежащие в одной плоскости; A' — произвольная точка пространства, a — некоторая прямая, проходящая через точку A', и α — какая-нибудь плоскость, проходящая через прямую a. Тогда существует движение, при ко-*

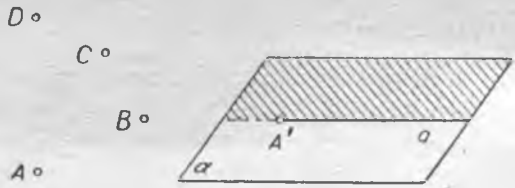


Рис. 27

тором точка A совмещается с A' (рис. 27), *точка B попадает на прямую a с любой заранее указанной стороны от точки A'; точка C попадает на плоскость α с любой заранее указанной стороны от прямой a, а точка D займет положение с любой заранее указанной стороны от плоскости α.*

Теорема 6. *Если три не лежащие на одной прямой точки A, B, C фигуры Q совпадают с соответствующими точками A', B', C' конгруэнтной фигуры Q', то возможны два случая: а) каждая точка фигуры Q совпадает с соответствующей точкой фигуры Q', б) каждая точка фигуры Q, лежащая в плоскости ABC, совпадает с соответствующей точкой фигуры Q', остальные же соответствующие точки этих фигур лежат по разные стороны от плоскости ABC и каждая точка фигуры Q' однозначно определена положением соответствующей точки фигуры Q (в последнем случае фигуры называются* ***симметричными*** *относительно плоскости, проходящей через точки A, B, C).*

В планиметрии теоремам 5 и 6 соответствуют следующие теоремы.

Теорема 5а. *Пусть A, B, C — три точки некоторой фигуры Q, не лежащие на одной прямой, A' — произвольная точка плоскости, и a — какая-нибудь прямая, проходящая через точку A. Тогда существует движение, совмещающее точку A с точкой A', переводящее точку B в точку прямой a, расположенную с заданной стороны от точки A', и переводящее точку C в точку полуплоскости, расположенной с заданной стороны от прямой a* (рис. 28).

Теорема 6а. *Если две различные точки A и B фигуры Q совпадают с соответствующими точками A' и B' конгруэнтной фигуры Q', то возможны два случая: а) каждая точка фигуры Q совпадает с соответствующей точкой фигуры Q', б) каждая точка фигуры Q', лежащая на прямой a, совпадает с соответствующей точкой фигуры Q', остальные же соответствующие точки этих фигур лежат по разные стороны от прямой a, и каждая точка фигуры Q' однозначно определена положением соответствующей точки фигуры Q (в последнем случае фигуры Q и Q' называются* ***симметричными*** *относительно прямой a).*

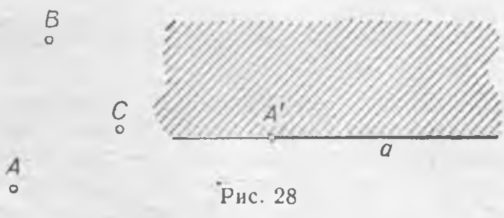


Рис. 28

Теоремы 5 и 5а характеризуют степень свободы перемещения фигур в пространстве и на плоскости с помощью движений, а теоремы 6 и 6а дают условия, определяющие положение фигуры; именно, в пространстве три точки фигуры определяют ее положение с точностью до симметрии относительно плоскости, проходящей через эти три точки, а в планиметрии две точки определяют положение фигуры с точностью до симметрии относительно прямой, проходящей через указанные две точки.

Отсюда, в частности, следует, что движение пространства полностью определено, если известны образы четырех каких-нибудь точек, не лежащих в одной плоскости, а в планиметрии движение полностью определено, если известны образы трех точек, не лежащих на одной прямой.

Эти утверждения есть непосредственные следствия теорем 6 и 6а, если в них в качестве фигуры Q взять соответственно все пространство или плоскость.

В нашем изложении в качестве основного отношения было взято отношение конгруэнтности, описываемое аксиомами III. 1—6, *и с помощью него как производное было построено понятие движения.*

Можно было бы, наоборот, движение вводить как основное понятие, определяя его как преобразование точек пространства, которое должно удовлетворять ряду аксиом.

Мы не будем здесь приводить полного списка этих аксиом; отметим только, что утверждения теорем 1—6 должны быть приняты за аксиомы.

§ 11. Аксиомы непрерывности. Измерение длин отрезков

С помощью аксиом связи, порядка и конгруэнтности было введено сравнение отрезков так, что для любых двух отрезков один либо больше другого, либо меньше его, либо конгруэнтен ему.

Однако этих аксиом недостаточно, чтобы решить *задачу об измерении отрезков,* которая заключается в том, чтобы выразить отношение любого отрезка к данной линейной единице с помощью определенного числа. Для решения этой задачи приходится привлекать новые аксиомы, которые обычно называют *аксиомами непрерывности*. Прежде чем формулировать эти аксиомы, введем некоторые понятия и обозначения.

Пусть $a = AB$ — некоторый отрезок. На некоторой прямой l отложим от точки M_0 отрезок M_0M_1, конгруэнтный AB, затем от точки M_1 отложим отрезок M_1M_2, конгруэнтный AB, так, что точка M_1 лежит между точками M_0 и M_2, далее от точки M_2 отложим отрезок M_2M_3, конгруэнтный AB, так, что точка M_2 лежит между M_1 и M_3, и т. д. Этот процесс будем продолжать до тех пор, пока мы не построим точку M_n, т. е. отрезок AB последовательно отложим от точки M_0 на прямой l в определенную сторону n раз. *Отре-*

зок M_0M_n *и все отрезки, конгруэнтные ему, будем обозначать* na *и говорить, что они получены умножением отрезка* a *на натуральное число* n.

Если отрезок b таков, что имеет место соотношение $nb \equiv a$ (n — натуральное число), то будем говорить, что *отрезок* b *получается умножением отрезка* a *на число* $\frac{1}{n}$, и обозначать его $\frac{1}{n}a$.

Если для отрезка a можно найти отрезок b такой, что $b \equiv \frac{1}{n}a$ (n — натуральное число), то определим отрезок $\frac{m}{n}a$ посредством равенства $\frac{m}{n}a \equiv mb$ (m — натуральное число).

Для того чтобы решить задачу об измерении отрезков, вводится аксиома IV.1, которую обычно называют *аксиомой Архимеда*[1]. Аксиома Архимеда, как мы увидим ниже, позволяет, если выбрана линейная единица, для каждого отрезка единственным образом определить некоторое положительное число, которое указывает, «сколько раз линейная единица укладывается в данном отрезке». Это число называют длиной отрезка. Для того чтобы решить обратную задачу — по заданному положительному числу найти отрезок, длина которого равна этому числу, — необходимо ввести еще одну аксиому IV.2. Эта аксиома представляет собой аналог известного принципа Кантора о стягивающихся промежутках. Поэтому аксиому IV.2 мы будем называть аксиомой Кантора[2].

Перейдем к формулировке аксиом непрерывности.

IV.1 (аксиома Архимеда). *Каковы бы ни были отрезки* a *и* b, *найдется натуральное число* n *такое, что*

$$nb > a.$$

IV.2 (аксиома Кантора). *Пусть на какой угодно прямой* a *дана бесконечная последовательность отрезков* A_1B_1, A_2B_2, ..., *из которых каждый последующий лежит внутри предыдущего; пусть, далее, каким бы ни был заранее данный отрезок, найдется номер* n, *для которого* A_nB_n *меньше этого отрезка. Тогда существует на прямой* a *точка* X, *принадлежащая всем этим отрезкам.*

Из условия аксиомы Кантора сразу следует, что существует только одна точка X, лежащая внутри всех отрезков A_nB_n. Действительно, если на прямой a имеется еще другая точка Y, лежащая внутри всех отрезков A_nB_n, то при любом n имеем

$$A_nB_n > XY,$$

что исключено условием аксиомы Кантора.

2. Длина отрезка. Основные теоремы о длине отрезка. Пусть каждому отрезку a пространства по некоторому определенному

---

[1] Архимед (287—212 до н. э.)— великий математик древней Греции.
[2] Г. Кантор (1845—1918) — крупный немецкий математик.

правилу отнесено вещественное число α. В таком случае мы будем говорить, что на множестве отрезков пространства определена вещественная функция отрезка

$$\alpha = f(a).$$

Вещественная функция отрезка $l(a)$ называется *длиной отрезка*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. *Для любого отрезка* a

$$l(a) > 0.$$

2. *Если* $a \equiv b$, *то*

$$l(a) = l(b).$$

3. *Если* B — *внутренняя точка отрезка* AC, *то*

$$l(AC) = l(AB) + l(BC).$$

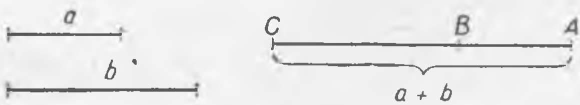


Рис. 29

Условие 3 удобно записать также в следующей эквивалентной форме. Пусть даны два отрезка a и b. Суммой этих отрезков назовем отрезок c, который получается на некоторой прямой откладыванием сначала отрезка AB, конгруэнтного отрезку a, а затем отрезка BC, конгруэнтного отрезку b, при этом точка B лежит между A и C (см. рис. 29). Для суммы отрезков a и b будем применять обозначение $a + b$. Очевидно, $a + b \equiv b + a$.

Условие 3 теперь принимает вид: если $c = a + b$, то

$$l(c) = l(a) + l(b).$$

Теорема 1 (основная теорема об обосновании процесса измерения длин отрезков). *На совокупности всех отрезков пространства можно построить функцию отрезка $l(a)$, удовлетворяющую условиям* 1, 2, 3; *при этом произвольно выбранному отрезку e можно приписать в качестве значения число единица. Другими словами, по заданной линейной единице — отрезку e — может быть построена длина отрезка.*

Доказательство. Пусть e — произвольный отрезок. Положим

$$l(e) = 1.$$

Согласно теореме 10 п. 2 § 8, каждый отрезок можно разделить пополам. Так как этот процесс можно неограниченно продолжить, то для любого натурального n определен отрезок

$$e_n = \frac{1}{2^n} e.$$

Поэтому для любой двоичной дроби $\frac{m}{2^n}$ определен отрезок $\frac{m}{2^n} e$, который мы будем называть **двоичным отрезком**. Для любого двоичного отрезка

$$a = \frac{m}{2^n} e$$

полагаем

$$l(a) = \frac{m}{2^n}.$$

Пусть теперь a — не двоичный отрезок, тогда по аксиоме Архимеда существует такое целое неотрицательное число m_0, что

$$m_0 e < a < (m_0 + 1)e.$$

Далее, применяя аксиому Архимеда к отрезкам $\frac{1}{2} e$ и a, получим существование целого неотрицательного числа m_1, такого, что

$$m_1 \frac{1}{2} e < a < (m_1 + 1) \frac{1}{2} e.$$

Применяя аксиому Архимеда к отрезкам $\frac{1}{2^2} e$ и a, получаем существование целого неотрицательного числа m_2 такого, что

$$\frac{m_2}{2^2} e < a < \frac{m_2 + 1}{2^2} e.$$

Продолжая этот процесс неограниченно, получим две последовательности чисел:

$$m_0, \ \frac{m_1}{2}, \ \frac{m_2}{2^2}, \ \ldots, \ \frac{m_n}{2^n}, \ \ldots$$

и

$$m_0 + 1, \ \frac{m_1 + 1}{2}, \ \frac{m_2 + 1}{2^2}, \ \ldots, \ \frac{m_n + 1}{2^n}, \ \ldots$$

таких, что при любом n имеем:

$$\frac{m_n}{2^n} e < a < \frac{m_n + 1}{2^n} e.$$

Докажем, что последовательность

$$m_0, \ \frac{m_1}{2}, \ \ldots, \ \frac{m_n}{2^n}, \ \ldots$$

возрастающая, а последовательность

$$m_0+1,\ \frac{m_1+1}{2},\ \frac{m_2+1}{2^2},\ \ldots,\ \frac{m_n+1}{2^n},\ \ldots$$

убывающая. Действительно, откладывая на отрезке a отрезок $\frac{1}{2^n}e$ m_n раз, получим точку A_n, а откладывая тот же отрезок $\frac{1}{2^n}e$ m_n+1 раз, получим точку B_n (см. рис. 30).

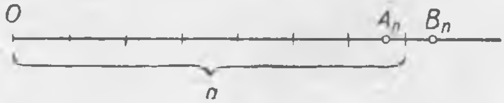


Рис. 30

Положим

$$OA=a,\ OA_n=\frac{m_n}{2^n}e,\ OB_n=\frac{m_n+1}{2^n}e.$$

Тогда

$$OA_n<OA<OB_n.$$

Произведем аналогичное построение, заменяя в нем отрезок $\frac{1}{2^n}e$

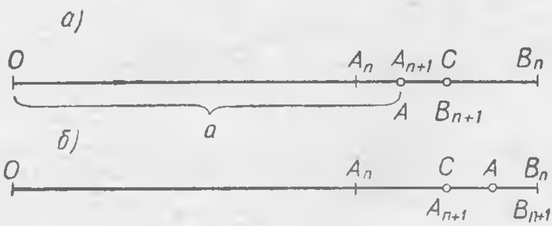


Рис. 31

отрезком $\frac{1}{2^{n+1}}e$ (см. рис. 31). Здесь точка A_{n+1} — конец отрезка $\frac{m_{n+1}}{2^{n+1}}e$, а C — середина отрезка A_nB_n.

Положим

$$OA_{n+1}=\frac{m_{n+1}}{2^{n+1}}e$$

и

$$OB_{n+1}=\frac{m_{n+1}+1}{2^{n+1}}e;$$

тогда положение точек A_{n+1} и B_{n+1} на рис. 31 зависит от расположения точки A внутри отрезка $A_n B_n$. Так как $OA \equiv a$ — по условию не двоичный отрезок, то точка A отлична от точек A_n, C, B_n, и потому могут представиться две возможности:

а) точка A лежит внутри отрезка $A_n C$,

б) точка A лежит внутри отрезка $C B_n$.

В случае а) имеем (см. рис. 31, *а*)):

$$OA_{n+1} \equiv OA_n, \; OB_{n+1} \equiv OA_n + \frac{1}{2^{n+1}} e,$$

поэтому

$$\frac{m_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{m_n}{2^n} \tag{1}$$

и

$$\frac{m_{n+1}+1}{2^{n+1}} = \frac{m_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{m_n}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{m_n+1}{2^n}. \tag{2}$$

В случае б) имеем (см. рис. 31, *б*)):

$$OA_{n+1} \equiv OA_n + \frac{1}{2^{n+1}} e; \; OB_{n+1} \equiv OB_n,$$

поэтому

$$\frac{m_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{m_n}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} > \frac{m_n}{2^n} \tag{3}$$

и

$$\frac{m_{n+1}+1}{2^{n+1}} = \frac{m_n+1}{2^n}. \tag{4}$$

Из неравенств (1), (3) вытекает, что последовательность $\left\{\frac{m_n}{2^n}\right\}$ возрастает, а из неравенств (2), (4), что последовательность $\left\{\frac{m_n+1}{2^n}\right\}$ убывает.

Так как разность между членами второй и первой последовательностей равна

$$\frac{m_n+1}{2^n} - \frac{m_n}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

и стремится к нулю при $n \to \infty$, то существует общий предел α обеих последовательностей:

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \frac{m_n}{2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{m_n+1}{2^n}.$$

Это число α и принимается за длину отрезка a:

$$l(a) = \alpha.$$

Таким образом, функция $l(a)$ определена для всех отрезков пространства.

Докажем теперь, что функция $l(a)$ удовлетворяет условиям 1, 2, 3, предъявляемым к длине отрезка.

Прежде всего отметим, что для любой пары конгруэнтных отрезков a и b процесс измерения, построенный выше с помощью аксиомы Архимеда, приводит к одинаковым последовательностям

$$m_0, \ \frac{m_1}{2}, \ \frac{m_2}{2^2}, \ \ldots, \ \frac{m_n}{2^n}, \ \ldots$$

и

$$m_0+1, \ \frac{m_1+1}{2}, \ \frac{m_2+1}{2^2}, \ \ldots, \ \frac{m_n+1}{2^n}, \ \ldots$$

для обоих отрезков. Отсюда

$$l(a)=l(b).$$

Поэтому условие 2 для функции $l(a)$ выполнено.

Докажем теперь, что для любого отрезка a

$$l(a)>0.$$

Допустим противное: пусть нашелся отрезок a_0 такой, что

$$l(a_0)=0.$$

Построим последовательности отрезков

$$\left\{\frac{m_n}{2^n}e\right\}, \quad \left\{\frac{m_n+1}{2^n}e\right\}$$

такие, что

$$\frac{m_n}{2^n}e \leqslant a_0 \leqslant \frac{m_n+1}{2^n}e.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m_n}{2^n}=l(a_0)=0.$$

Поскольку последовательность $\frac{m_n}{2^n}$ возрастающая, то очевидно, что ее предел может равняться нулю тогда и только тогда, когда все эти дроби равны нулю. Следовательно, при любом n имеем: $m_n=0$. А тогда из способа построения последовательности отрезков $\left\{\frac{m_n+1}{2^n}\right\}e$ вытекает, что при всех n имеем:

$$2^n a_0<e.$$

С другой стороны, из аксиомы Архимеда вытекает, что при всех достаточно больших n будем иметь:

$$2^n a_0>e.$$

Полученное противоречие показывает, что наше допущение неверно и, следовательно, для любого отрезка a

$$l(a) > 0.$$

Пусть теперь $c \equiv a + b$. Докажем, что

$$l(c) = l(a) + l(b).$$

Для каждого из отрезков a, b, $a + b$ строим последовательности отрезков с помощью процесса, описанного в первой части доказательства настоящей теоремы. Пусть

$$\frac{m_n}{2^n} e \leqslant a < \frac{m_n+1}{2^n} e, \quad \frac{p_n}{2^n} e \leqslant b \leqslant \frac{p_n+1}{2^n} e, \quad \frac{r_n}{2^n} e \leqslant a + b \leqslant \frac{r_n+1}{2^n} e$$

— указанные последовательности отрезков. Очевидно,

$$\frac{m_n}{2^n} e + \frac{p_n}{2^n} e \leqslant \frac{r_n}{2^n} e < \frac{r_n+1}{2^n} e \leqslant \frac{m_n+1}{2^n} e + \frac{p_n+1}{2^n} e.$$

Поэтому

$$\frac{m_n}{2^n} + \frac{p_n}{2^n} \leqslant \frac{r_n}{2^n} < \frac{r_n+1}{2^n} \leqslant \frac{m_n+1}{2^n} + \frac{p_n+1}{2^n}.$$

Переходя в последних неравенствах к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$l(a) + l(b) \leqslant l(c) = l(c) \leqslant l(a) + l(b).$$

Отсюда

$$l(c) = l(a) + l(b).$$

Теорема полностью доказана.

Л е м м а. *Всякая длина отрезка обладает свойством монотонности, т. е. если $a < b$, то $l(a) < l(b)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $a < b$, то по определению отношения «$<$» существует отрезок b' такой, что

$$b \equiv a + b'.$$

Тогда

$$l(b) = l(a) + l(b'),$$

и так как $l(b') > 0$, то

$$l(b) > l(a).$$

Лемма доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть даны две длины отрезка $l_1(a)$ и $l_2(a)$. Тогда существует постоянное положительное число k такое, что для всех отрезков a справедливо соотношение*

$$l_2(a) = kl_1(a).$$

Если же линейные единицы для длин $l_1(a)$ и $l_2(a)$ конгруэнтны, то число $k = 1$ и для любого отрезка a

$$l_1(a) = l_2(a).$$

Доказательство. Возьмем некоторый отрезок a_0 и пусть

$$l_1(a_0) = \lambda_0, \quad l_2(a_0) = \mu_0.$$

Положим

$$k = \frac{\mu_0}{\lambda_0},$$

тогда

$$l_2(a_0) = k\, l_1(a_0). \tag{*}$$

Докажем, что формула (*) справедлива для любого отрезка a, т. е.

$$l_2(a) = k\, l_1(a).$$

Пусть сначала a — двоичный отрезок, построенный по отрезку a_0:

$$a = \frac{m}{2^n} a_0,$$

где m и n — натуральные числа. Тогда

$$l_1(a) = l_1\left(\frac{m}{2^n} a_0\right) = l_1\Big(\underbrace{\frac{1}{2^n} a_0 + \ldots + \frac{1}{2^n} a_0}_{m}\Big) =$$

$$= \underbrace{l_1\left(\frac{1}{2^n} a_0\right) + \ldots + l_1\left(\frac{1}{2^n} a_0\right)}_{m} = m l_1\left(\frac{1}{2^n} a_0\right),$$

Аналогично

$$l_2(a) = m\, l_2\left(\frac{1}{2^n} a_0\right).$$

Найдем, чему равно число $l_1\left(\frac{1}{2^n} a_0\right)$. Имеем:

$$\lambda_0 = l_1(a_0) = l_1\Big(\underbrace{\frac{1}{2^n} a_0 + \ldots + \frac{1}{2^n} a_0}_{2^n}\Big) =$$

$$= \underbrace{l_1\left(\frac{1}{2^n} a_0\right) + \ldots + l_1\left(\frac{1}{2^n} a_0\right)}_{2^n} = 2^n l_1\left(\frac{1}{2^n} a_0\right).$$

Отсюда

$$l_1\left(\frac{1}{2^n}a_0\right)=\frac{\lambda_0}{2^n}.$$

Аналогично

$$l_2\left(\frac{1}{2^n}a_0\right)=\frac{\mu_0}{2^n}.$$

Следовательно,

$$l_2(a)=\frac{m\,\mu_0}{2^n},\ l_1(a)=\frac{m\,\lambda_0}{2^n}$$

и потому

$$l_2(a)=\frac{m\,\mu_0}{2^n}=k\frac{m\,\lambda_0}{2^n}=k\,l_1(a).$$

Итак, для двоичных отрезков a формула

$$l_2(a) = kl_1(a)$$

доказана.

Пусть теперь a — произвольный не двоичный (по отношению к a_0) отрезок. Применим к отрезку a процесс приближения двоичными отрезками, рассмотренный в доказательстве теоремы 1 с помощью аксиомы Архимеда. Тогда получим последовательности отрезков

$$\left\{\frac{m_n}{2^n}a_0\right\},\quad \left\{\frac{m_n+1}{2^n}a_0\right\}$$

такие, что

$$\frac{m_n}{2^n}a_0 < a < \frac{m_n+1}{2^n}a_0.$$

Последовательности чисел $\left\{\frac{m_n}{2^n}\right\}$ и $\left\{\frac{m_n+1}{2^n}\right\}$ будут обладать следующими свойствами: первая будет возрастать, вторая — убывать, а разность между членами второй и первой последовательностей с одинаковыми номерами будет стремиться к нулю. Поэтому обе последовательности имеют общий предел, который мы обозначим через α. Положим

$$a_n\equiv\frac{m_n}{2^n}a_0,\qquad a'_n\equiv\frac{m_n+1}{2^n}a_0.$$

Тогда

$$a_n<\alpha<a'_n,\quad n=1,2,3,\ \ldots.$$

Так как отрезки a_n и a'_n — двоичные по отношению к a_0, то

$$l_1(a_n)=\frac{m_n}{2^n}\lambda_0,\ l_2(a_n)=\frac{m_n}{2^n}k\,\lambda_0,$$

$$l_1(a'_n) = \frac{m_n+1}{2^n}\lambda_0;\ l_2(a'_n) = \frac{m_n+1}{2^n}\,k\,\lambda_0.$$

Отсюда

$$\frac{m_n}{2^n}\,\lambda_0 < l_1(a) < \frac{m_n+1}{2^n}\,\lambda_0.$$

$$\frac{m_n}{2^n}\,k\,\lambda_0 < l_2(a) < \frac{m_n+1}{2^n}\,k\,\lambda_0.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу, получим:

$$\alpha\,\lambda_0 \leqslant l_1(a) \leqslant \alpha\,\lambda_0,$$
$$\alpha\,k\,\lambda_0 \leqslant l_2(a) \leqslant \alpha\,k\,\lambda_0.$$

Следовательно,

$$l_1(a) = \alpha\,\lambda_0,\quad l_2(a) = k\alpha\,\lambda_0$$

и

$$l_2(a) = kl_1(a).$$

Теорема доказана.

3. Решение обратной задачи об измерении отрезков. В этом пункте будет рассмотрена обратная задача об измерении отрезков. Именно, если дана некоторая длина отрезка $l\ (a)$ и положительное число λ, то возникает вопрос, существует ли отрезок a_0 такой, что

$$l\ (a_0) = \lambda.$$

На этот вопрос отвечает

Теорема 3. *Если для множества основных объектов (точек, прямых и плоскостей) выполнены аксиомы первых трех групп и аксиома Кантора, то обратная задача всегда имеет решение. Другими словами, если $l\ (a)$ — функция отрезка, удовлетворяющая требованиям* 1, 2, 3, *предъявляемым к длине отрезка, и λ — произвольное положительное число, то существует отрезок a_0 такой, что*

$$l\ (a_0) = \lambda.$$

Доказательство. Пусть e — какой-нибудь отрезок. Положим

$$l\,(e) = \beta.$$

Для числа $\frac{\lambda}{\beta}$ существуют две последовательности двоичных дробей $\left\{\frac{p_n}{2^n}\right\}$ и $\left\{\frac{q_n}{2^n}\right\}$, обладающих следующими свойствами:

1) $\frac{p_n}{2^n} < \frac{\lambda}{\beta} < \frac{q_n}{2^n}$,

2) последовательность $\frac{p_n}{2^n}$ строго возрастает;

3) последовательность $\frac{q_n}{2^n}$ строго убывает,

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q_n}{2^n} = \frac{\lambda}{\beta}$.

Возьмем некоторую прямую a, фиксируем на ней точку O и по одну сторону от точки O для любого n отложим отрезки

$$OA_n \equiv \frac{p_n}{2^n} e, \quad OB_n \equiv \frac{q_n}{2^n} e$$

Рис. 32

(см. рис. 32). Очевидно, $OA_n < OB_n$. Из способа построения отрезков A_nB_n вытекает, что эти отрезки вложены друг в друга, и так как

$$l(A_nB_n) = \frac{q_n - p_n}{2^n} \to 0,$$

то внутри всех отрезков A_nB_n, очевидно, не может содержаться никакой отрезок CD. Поэтому из аксиомы Кантора и замечания к ней вытекает, что существует единственная точка C, лежащая одновременно внутри всех отрезков A_nB_n. Так как точка C лежит между A_n и B_n, то при всех n будем иметь:

$$OA_n < OC < OB_n. \qquad (\ast)$$

Из определения отрезков OA_n и OB_n вытекает, что неравенства $(\ast)$ можно записать так:

$$\frac{p_n}{2^n} e < OC < \frac{q_n}{2^n} e.$$

Используя лемму о монотонности длины отрезка, получим:

$$l\left(\frac{p_n}{2^n} e\right) < l(OC) < l\left(\frac{q_n}{2^n} e\right).$$

Как было доказано в теореме 2, для двоичных отрезков справедлива формула

$$l\left(\frac{m}{2^n} e\right) = \frac{m}{2^n} l(e).$$

Отсюда

$$\frac{p_n}{2^n} l(e) < l(OC) < \frac{q_n}{2^n} l(e).$$

Так как $l(e) = \beta$, то

$$\frac{p_n}{2^n} \beta < l(OC) < \frac{q_n}{2^n} \beta,$$

и, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$\frac{\lambda}{\beta}\beta \leqslant l(OC) \leqslant \frac{\lambda}{\beta}\beta.$$

Таким образом, полагая $a_0 = OC$, имеем:

$$l(a_0) = l(OC) = \lambda.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 3 вытекает важное следствие.

Следствие. *Любой отрезок можно разделить на произвольное число конгруэнтных частей.*

Действительно, если a — некоторый произвольный отрезок, $l(a)$ — его длина, измеренная с помощью какой-нибудь линейной единицы, и n — данное натуральное число, то существует отрезок $b = CD$, имеющий при той же линейной единице длину $l(b) = \frac{l(a)}{n}$. Отрезок b таков, что

$$nb = a.$$

Действительно, отложим отрезок CD от конца A отрезка $AB = a$ n раз по ту же сторону на прямой AB, где лежит точка B. Тогда если бы $n \cdot CD$ не был конгруэнтен отрезку AB, то было бы

$$n \cdot CD > AB$$

или

$$n \cdot CD < AB,$$

а тогда по лемме о монотонности было бы $l(a) \neq n\, l(b)$, что невозможно.

В процессе n-кратного откладывания отрезка CD получаем внутри отрезка AB точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, которые делят его на n равных частей.

Следствие доказано.

Отметим, что в школьном курсе геометрии деление отрезка на любое число конгруэнтных частей осуществлялось с помощью аксиомы Евклида о параллельных. Указанное нами построение свободно от привлечения аксиомы о параллельных, и, следовательно, результат, полученный в следствии, справедлив не только в геометрии Евклида, но и в геометрии Лобачевского.

4. Измерение углов. На множестве углов пространства прежде всего вводится угловая мера, которая представляет собой числовую функцию угла, удовлетворяющую условиям, аналогичным условиям 1, 2, 3 для длины отрезка. После этого для угловой меры устанавливаются теоремы, являющиеся аналогами теорем 1—3. Из аналога теоремы 3 для углов будет вытекать возможность деления его на n конгруэнтных углов.

§ 12. Система координат на прямой, на плоскости и в пространстве

1. Система координат на прямой. Пусть a — произвольная прямая. Выберем на ней какую-нибудь точку O, которую будем называть *началом координат*. Условимся, далее, одну из двух полупрямых, определяемых точкой O и прямой a, называть *положительной*, а другую — *отрицательной*. Кроме того, примем некоторый отрезок e за единицу измерения и через $l(a)$ обозначим длину отрезка, для которой

$$l(e) = 1.$$

Каждой точке M прямой a отнесем *координату* x, полагая абсолютную величину x равной числу $l(OM)$ и определяя знак x в зависимости от расположения точки M следующим образом: $x > 0$, если M находится на положительной полупрямой, и $x < 0$, если M лежит на отрицательной полупрямой. Если M совпадает с точкой O, полагаем $x = 0$. Из теоремы 3 п. 3 § 11 вытекает, что

Каково бы ни было число x, на прямой a существует одна и только одна точка, координата которой равна x.

Таким образом, *между точками прямой и вещественными числами с помощью введения координаты точки на прямой устанавливается взаимно однозначное соответствие*.

2. **Система координат на плоскости.** Пусть α — произвольная плоскость. Фиксируем на ней некоторую точку O и прямую a, проходящую через точку O. Тогда O разделяет a на две полупрямые; одну из них назовем положительной, другую отрицательной. Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости, одну из которых также назовем положительной, а другую — отрицательной. Пусть отрезок e есть единица длины. Тогда на прямой a определена система координат с началом в точке O и с отмеченной положительной полупрямой, которая была построена в предыдущем пункте.

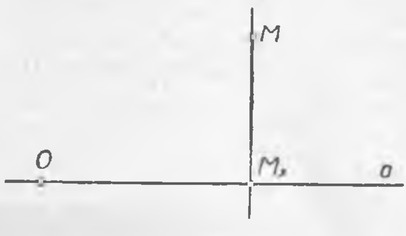


Рис. 33

Пусть M — произвольная точка на плоскости α (см. рис. 33). Из точки M опускаем перпендикуляр на прямую a. Этот перпендикуляр единственный. Обозначим через M_x точку пересечения перпендикуляра с прямой a. Пусть x — координата точки M_x в системе координат, введенной на прямой a, и y — число, модуль которого равен длине отрезка MM_x, а знак зависит от положения точки M на плоскости следующим образом: $y > 0$, если M лежит в положительной полуплоскости, $y < 0$, если M лежит в отрицательной полуплоскости, и $y = 0$, если M лежит на прямой a.

Таким образом, с каждой точкой плоскости M связывается пара чисел x, y, называемых *координатами точки* M.

Для любой пары вещественных чисел x, y на плоскости α существует только одна точка M, координаты которой равны соответственно числам x и y. Действительно, число x всегда однозначно определяет на прямой a точку M_x. Из точки M_x можно восставить только один перпендикуляр. Предполагая $y \neq 0$, мы можем на этом перпендикуляре отложить в зависимости от знака y в той или другой полуплоскости только один отрезок, длина которого равна $|y|$. Таким образом, конец этого отрезка — точка M — находится единственным образом. Очевидно, что x и y как раз есть координаты точки M.

Итак, *между упорядоченными парами x, y вещественных чисел, где x и y независимо друг от друга могут принимать любые значения, и точками плоскости α установлено взаимно однозначное соответствие.*

Аналогично вводится система координат в пространстве; на этом мы останавливаться не будем.

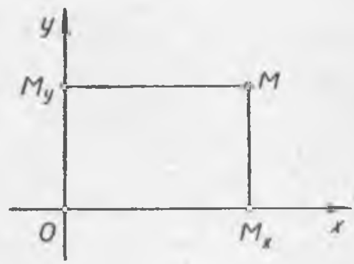


Рис. 34

Построенная выше система координат на плоскости напоминает декартову систему координат. Однако из одних только аксиом групп I—IV еще не вытекают многие свойства, присущие декартовым координатам. Укажем простейшие из них. Назовем, как это обычно делают в аналитической геометрии, прямую a осью x, а прямую b, перпендикулярную к ней в точке O, — осью y (см. рис. 34). Из произвольной точки M опустим перпендикуляры на оси x и y, и пусть M_x и M_y— точки пересечения этих перпендикуляров с осями x и y. Тогда из аксиом групп I—IV нельзя вывести, что отрезок MM_x конгруэнтен отрезку OM_y. Точно так же из этих аксиом нельзя вывести хорошо известное в аналитической геометрии выражение для расстояния между двумя точками через координаты этих точек.

§ 13. Принцип Дедекинда

В § 12 с помощью системы координат на прямой было установлено взаимно однозначное соответствие между совокупностью всех точек прямой и множеством всех вещественных чисел.

В § 5, исходя из аксиом связи и порядка, во множестве точек прямой было введено отношение предшествования. Это отношение можно установить лишь двумя способами, что соответствует нашему наглядному представлению о двух направлениях на прямой.

Если мы теперь отношение предшествования построим так, чтобы начало координат предшествовало всем точкам положительной полупрямой, то из того, что точка M_1 предшествует точке M_2, вытекает, что

$$x_1 < x_2,$$

где x_1 и x_2 — координаты точек M_1 и M_2. Направление, которое определяется указанным отношением предшествования на прямой a, будем называть *положительным.*

Итак, справедлива следующая

Теорема 1. *Между упорядоченным множеством всех точек прямой и упорядоченным множеством всех вещественных чисел возможно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие элементы находятся в одинаковых отношениях порядка.*

При построении системы вещественных чисел в анализе важную роль играет так называемый принцип Дедекинда[1]:

Если все вещественные числа разбиты на два класса так, что:

а) *оба класса не пусты и каждое число попадает только в один из двух классов,*

б) *каждое число первого класса меньше каждого числа второго, то либо в первом классе существует наибольшее число, либо во втором — наименьшее.*

Из теоремы 1 и принципа Дедекинда для вещественных чисел следует принцип Дедекинда для точек прямой.

Теорема 2. *Если все точки прямой распределены на два класса так, что при этом:*

а) *каждая точка относится к одному и только одному классу и каждый класс не пуст,*

б) *каждая точка первого класса предшествует каждой точке второго,*

то либо в первом классе существует точка, которой предшествуют все остальные точки первого класса, либо во втором классе существует точка, которая предшествует всем точкам второго класса.

Имеет место следующая важная теорема, которая будет существенно использоваться в дальнейших разделах курса.

Теорема 3. *Если к аксиомам связи, порядка и конгруэнтности присоединить как аксиому принцип Дедекинда, то утверждения аксиомы Архимеда и аксиомы Кантора могут быть выведены из них как теоремы.*

Доказательство. а) *Вывод аксиомы Архимеда.* Допустим, что утверждение аксиомы Архимеда неверно. Тогда

---

[1] Р. Дедекинд (1831—1916) — известный немецкий математик.

найдутся два отрезка a и b такие, что при любом натуральном числе n справедливо неравенство

$$nb < a.$$

Пусть l — произвольная прямая и AB — отрезок на ней, конгруэнтный отрезку a. Выберем некоторое направление на прямой l и будем считать, что $A \prec B$. Разобьем точки прямой l на два класса так: в первый класс отнесем точку A, все точки прямой, предшествующие точке A, и все точки X, следующие за точкой A, и такие, что для точки X можно найти натуральное число m такое, что

$$mb > AX.$$

Во второй класс отнесем все остальные точки прямой l. Докажем, что проведенное нами разбиение удовлетворяет условиям принципа Дедекинда. Действительно, оба класса не пусты. В первом имеется точка A, а второму принадлежит точка B. Далее, каждая точка прямой l попадает в один и только один класс. Докажем, что каждая точка первого класса предшествует каждой точке второго класса. Пусть точка X принадлежит первому классу, а точка Y — второму классу. Интерес представляет случай, когда точка A предшествует точке X. Так как X принадлежит первому классу, то найдется такое натуральное число m, что $mb > AX$. Пусть Z — точка прямой l такая, что

$$AZ \equiv mb$$

и

$$A \prec Z;$$

тогда

$$X \prec Z.$$

Так как точка Y принадлежит второму классу, то

$$A \prec Y,$$

и при любом натуральном n имеет место неравенство

$$nb < AY.$$

Поэтому имеем:

$$AZ \equiv mb < AY, \text{ т. е. } Z \prec Y,$$

и в силу транзитивности отношения« $\prec$ » отсюда следует, что

$$X \prec Y.$$

Таким образом, наше разбиение на классы является дедекиндовым. Пусть C — точка прямой, являющаяся крайней в одном из двух классов. Точка C не может принадлежать первому классу. Если бы C принадлежала первому классу, то существовало бы натуральное число m такое, что

$$AC < mb.$$

Но тогда точка D, следующая за точкой C и такая, что $CD \equiv b$, принадлежит первому классу (поскольку $A \prec D$) и

$$AD < (m+1)\, b.$$

Но это невозможно, так как все точки первого класса предшествуют точке C. Следовательно, точка C принадлежит второму классу. Но тогда она предшествует всем точкам этого класса, и потому, если рассмотреть отрезок CF такой, что $F \prec C$ и отрезок FC конгруэнтен b, то точка F принадлежит первому классу. Поэтому существует такое натуральное m_1, что $AF < m_1 b$. Но тогда

$$AC < (m_1 + 1)\, b$$

и, следовательно, точка C принадлежит первому классу, что невозможно. Таким образом, точка C не может принадлежать ни первому, ни второму классу, что противоречит принципу Дедекинда. Итак, доказано, что утверждение аксиомы Архимеда есть следствие аксиом групп I—III и принципа Дедекинда.

б) *Вывод аксиомы Кантора.* Пусть на некоторой прямой a дана система вложенных отрезков A_nB_n таких, что не существует отрезка CD, одновременно содержащегося во всех отрезках $A_n\ B_n$. Докажем, что тогда у последовательности отрезков $\{A_nB_n\}$ есть по крайней мере одна внутренняя точка.

Будем считать, что на прямой a введено отношение предшествования, при котором $A_n \prec B_n$. Построим разбиение точек прямой на два класса. В первый класс отнесем все точки A_n и те точки прямой a, которые предшествуют хотя бы одной из точек A_n. Во второй класс отнесем все прочие точки прямой a. Первый класс не пуст. Докажем, что точка B_1 принадлежит второму классу. Если бы это было не так, то точка B_1 принадлежала бы первому классу— это вытекает из условия разбиения точек прямой на классы. Тогда найдется точка A_{n_0} такая, что $B_1 \prec A_{n_0}$. С другой стороны, из транзитивности отношения предшествования вытекает, что[1]

$$A_1 \preccurlyeq A_{n_0} \prec B_{n_0} \preccurlyeq B_1,$$

поскольку отрезки A_nB_n вложены друг в друга, т. е. при любом $n = 1, 2, \ldots$ имеет место соотношение

$$A_{n-1} \preccurlyeq A_n \prec B_n \preccurlyeq B_{n-1}.$$

Итак, точка B_1 принадлежит второму классу.

---

[1] Под соотношением $A \preccurlyeq B$ мы понимаем, что либо $A \prec B$, либо A совпадает с B.

Пусть теперь точка X принадлежит первому классу, а точка Y — второму классу. Так как точка X принадлежит первому классу, то существует точка A_{m_0} такая, что $X \prec A_{m_0}$. С другой стороны, при всех n имеет место соотношение

$$A_n \prec Y.$$

Следовательно,

$$X \prec Y.$$

Так как по построению каждая точка прямой a может попасть только в один из классов, то построенное нами сечение — дедекиндово. Из принципа Дедекинда следует, что существует точка C, которая принадлежит второму классу и предшествует всем точкам этого класса. Тогда при любом n имеем:

$$A_n \prec C.$$

Точно так же, как было доказано, что точка B_1 принадлежит второму классу, можно установить, что все точки B_n принадлежат второму классу, а так как C предшествует всем точкам второго класса, то при любом n имеем:

$$C \preccurlyeq B_n.$$

Итак, при любом n имеем:

$$A_n \prec C \preccurlyeq B_n,$$

т. е. точка C принадлежит всем отрезкам A_nB_n.

Теорема полностью доказана.

§ 14. Абсолютная геометрия

Совокупность понятий и результатов, которые могут быть построены и выведены из аксиом связи, порядка, конгруэнтности и непрерывности, называют *абсолютной геометрией*. Таким образом, к абсолютной геометрии относятся те геометрические понятия и теоремы, которые в своем выводе не используют аксиомы параллельности. Представление об объеме абсолютной геометрии дает совокупность теорем, доказанных в §§ 4—13. К ним следует еще добавить результаты Саккери, Ламберта и Лежандра, о которых шла речь в § 3. Отметим, что факты из абсолютной геометрии справедливы одновременно как в геометрии Евклида, так и в геометрии Лобачевского.

§ 15. Аксиома параллельности Евклида. Евклидова геометрия

1. Аксиома параллельности Евклида и следствия из нее. Ниже речь будет идти только о точках и прямых, лежащих в некоторой фиксированной плоскости α. Выбор плоскости α произволен.

Т е о р е м а 1. *Через каждую точку A, не принадлежащую прямой a, проходит по крайней мере одна прямая, не имеющая с a общих точек.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы было дано в § 3 и там же было отмечено, что этот факт принадлежит абсолютной геометрии.

Вопрос о том, сколько прямых проходит через точку A и не пересекает прямую a, не может быть решен в рамках абсолютной геометрии; об этом мы уже говорили в п. 1 § 3. Поэтому дальнейшие рассмотрения основаны на введении специальной аксиомы, которую принято называть *аксиомой параллельности*. Имеются две противоположные аксиомы параллельности: аксиома Евклида и аксиома Лобачевского. Присоединяя к аксиомам абсолютной геометрии ту или другую аксиому параллельности и развивая на полученной системе аксиом соответствующую теорию, получаем в конечном итоге или геометрию Евклида, или геометрию Лобачевского.

V.1. А к с и о м а п а р а л л е л ь н о с т и Е в к л и д а. *Через произвольную точку A, не лежащую на произвольной прямой a, проходит не более одной прямой, не пересекающейся с a.*

Из теоремы 1 и аксиомы Евклида вытекает, что через каждую точку A, расположенную вне произвольной прямой a, проходит единственная прямая a', не пересекающая a. Прямая a' называется *прямой, параллельной прямой a*. Очевидно, что отношение параллельности прямых на евклидовой плоскости симметрично и транзитивно.

Далее так же, как и в курсе элементарной геометрии, устанавливаются теоремы о равенстве соответственных и накрест лежащих углов при паре параллельных прямых, пересеченных третьей прямой, изучаются параллелограммы, прямоугольники, квадраты, трапеции, выводятся формулы для суммы углов треугольника и многоугольника, развивается учение о подобных фигурах, выводится теорема Пифагора и другие метрические соотношения в треугольниках и параллелограммах, выводятся формулы площади прямоугольника, треугольника, параллелограмма, трапеции и других многоугольников, строится тригонометрия.

Система координат на плоскости, построенная на аксиомах абсолютной геометрии в § 12, в евклидовой геометрии становится декартовой системой координат. Тем самым мы можем дальнейшее изучение евклидовой геометрии проводить методами аналитической геометрии и математического анализа. Таким образом, аксиоматическое построение евклидовой геометрии можно считать завершенным.

2. Описание движений в евклидовой геометрии с помощью декартовых координат. Пусть на евклидовой плоскости введена система декартовых координат. (Как мы уже отмечали, система координат, введенная в § 12, на евклидовой плоскости является декартовой. Поэтому нет надобности в особом доказательстве возможности введения системы таких координат на евклидовой плоскости.) Пусть, далее, f — некоторое движение евклидовой плоскости. Докажем, что f можно представить как произведение нескольких простейших движений плоскости, которые сейчас будут введены.

Вращение вокруг точки O на угол φ

Пусть O — произвольная точка плоскости. Отрезок OM, у которого выбрано направление от точки O к точке M, т. е. точка O считается первой, а точка M — второй, назовем *вектором*. Точка O называется *началом* вектора, а точка M — его *концом*. Обозначать такой вектор будем, как обычно, $\overline{OM}$. Иногда вектор $\overline{OM}$ будем обозначать также $\boldsymbol{m}$, если нас не будет интересовать, в каких точках находятся начало и конец вектора $\boldsymbol{m}$.

Два вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ считаются *равными*, если отрезки AB и CD конгруэнтны и фигура $ABDC$ (рис. 35,*а*)) есть параллелограмм

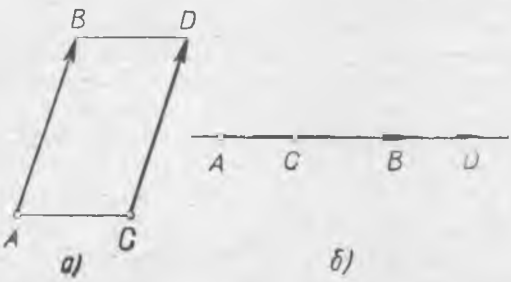


Рис. 35

в случае, когда прямые AB и CD не совпадают, или одновременно точка A предшествует (следует) точке B и точка C предшествует (следует) точке D в случае, когда точки A, B, C, D лежат на одной прямой (рис. 35, *б*)). *Понятие равенства векторов,* как нетрудно видеть, *рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Вокруг каждой точки плоскости возможны два направления вращения: против и по часовой стрелке; первое из них будем называть *положительным*, второе — *отрицательным*.

Пусть $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ — два вектора, исходящие из одной точки O (рис. 36, *а*) и *б*)). Углом между векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ будет называться угловая радианная мера угла AOB, взятая со знаком плюс, если вращение от вектора $\overline{OA}$ к вектору $\overline{OB}$ на наименьший по абсолютной величине угол осуществляется против часовой стрелки, и со знаком минус — в противном случае. Угол между векторами будем обозначать

$$\varphi = \varphi(\overline{OA}, \overline{OB}).$$

Очевидно, что

$$\varphi \in (-\pi, \pi].$$

Перейдем теперь к определению *вращения вокруг точки O на угол* φ. Пусть M — произвольная точка плоскости. Поставим ей в соответствие точку плоскости M' такую, что

1) отрезок OM' конгруэнтен отрезку OM;

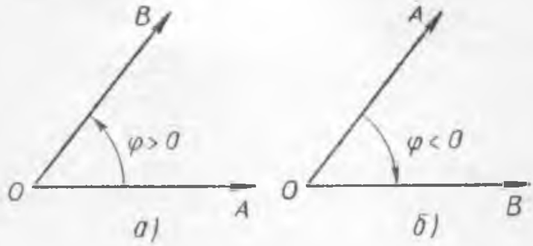


Рис. 36

2) угол между векторами $\overline{OM}$ и $\overline{OM'}$ равен φ, где φ — некоторое фиксированное число из промежутка $(-\pi, \pi]$ (см. рис. 37).

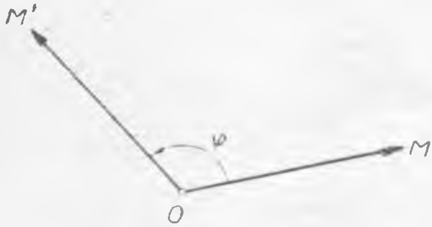


Рис 37

Если точка M совпадает с точкой O, то ей сопоставляем точку O. Легко видеть, что вращение вокруг точки на некоторый угол есть преобразование плоскости. Используя первый признак конгруэнтности треугольников и определение вращения вокруг точки, легко показать, что это преобразование плоскости есть движение.

Если построить на плоскости систему декартовых координат x, y с началом в точке O и если вращение вокруг точки O переводит точку M (x, y) в точку M' (x', y'), то, как доказывается в курсе аналитической геометрии, справедливы формулы:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases}$$

Отметим, что вращение на нулевой угол есть тождественное преобразование.

Параллельный перенос на вектор $\boldsymbol{a}$

Пусть $\boldsymbol{a}$ — некоторый вектор. Каждой точке M плоскости отнесем точку M' той же плоскости такую, что вектор $\overline{MM'}$ равен вектору $\boldsymbol{a}$. Точечное преобразование на плоскости, порождаемое этим соответствием, называется *параллельным переносом плоскости на вектор* $\boldsymbol{a}$. Очевидно, что параллельный перенос на любой вектор есть движение плоскости.

Пусть на плоскости введена декартова система координат с началом в точке O (рис. 38) и пусть параллельный перенос на вектор

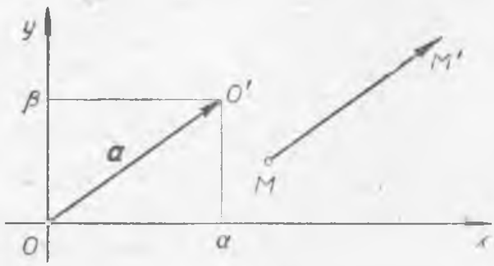


Рис. 38

$\boldsymbol{a}$ перемещает начало координат — точку O — в точку O' с координатами α, β. Тогда, как доказывается в аналитической геометрии, связь между координатами x, y произвольной точки M плоскости и координатами x', y' ее образа M' выражается формулами:

$$\begin{cases} x' = x + \alpha, \\ y' = y + \beta. \end{cases}$$

Очевидно, что параллельный перенос на нулевой вектор (так называется вектор с совпадающими началом и концом) представляет собой тождественное преобразование.

Симметрия относительно прямой

Пусть на плоскости фиксирована произвольная прямая l. Преобразование, относящее каждой точке M симметричную ей относительно прямой l точку M', называется *симметрией относительно прямой* l.

(Точки M и M' называются *симметричными* относительно прямой l, если прямая MM' перпендикулярна к прямой l (рис. 39) и отрезки MN и NM' конгруэнтны.)

Если ось x совпадает с прямой l, то, очевидно, точка M (x, y) преобразованием симметрии относительно прямой l переходит в точку M' с координатами x, $-y$.

Из теоремы 6а § 10 вытекает, что любое движение на плоскости определяется полностью, если известны образы трех любых точек плоскости, не лежащих на одной прямой. Итак, пусть f — произвольное движение на плоскости. Строим на плоскости декартову

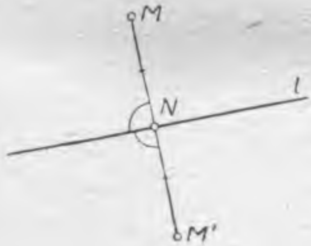


Рис. 39

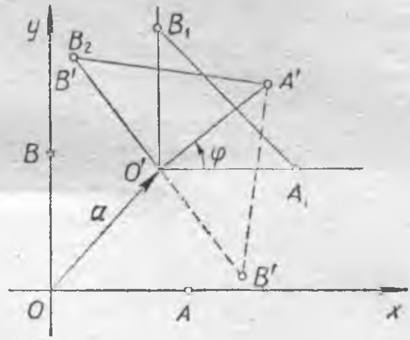


Рис. 40

систему координат x, y с началом в некоторой точке O. Пусть O', A', B'—соответственно образы точек $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ при движении f. Тогда OAB и $O'A'B'$ — равнобедренные прямоугольные треугольники, конгруэнтные между собой, у которых углы при вершинах O и O' прямые.

Пусть $\boldsymbol{a} = \overline{OO'}$. Сделаем параллельный перенос плоскости на вектор $\boldsymbol{a}$, тогда мы совместим точки O и O', а точки A и B переместятся соответственно в точки A_1 и B_1 (рис. 40).

Обозначим через φ угол между векторами $\overline{O'A_1}$ и $\overline{O'A'}$. Если мы теперь произведем вращение на угол φ вокруг точки O', то точки A_1 и A' совместятся. Применим теперь теорему 6а § 10 к треугольникам $O'A_1B_1$ и $O'A'B_2$, где B_2— образ точки B_1 при вращении вокруг точки O' на угол φ. Тогда либо точки B' и B_2 совпадают, либо эти точки симметричны относительно прямой $A'O'$. Производя во втором случае преобразование симметрии относительно прямой $A'O'$, получим, что точка B_2 совместится с точкой B'.

Итак, в первом случае движение f есть произведение преобразований f_1 и $f_2 : f = f_2f_1$, а во втором случае произведение преобразований f_1, f_2, f_3: $f = f_3f_2f_1$, где f_1 — параллельный перенос на вектор $\boldsymbol{a} = \overline{OO'}$, f_2 — вращение вокруг точки O' на угол $\varphi = \varphi(\overline{O'A_1}, \overline{O'A'})$ и, наконец, f_3 — симметрия относительно прямой $O'A'$.

Пусть M (x, y) — произвольная точка плоскости, а $M'(x', y')$ — ее образ при движении f. Положим

$$M_1 = f_1(M),$$
$$M_2 = f_2(M_1);$$

тогда

$$M' = M_2 = f_2(f_1(M)),$$

если $f = f_2f_1$, и

$$M' = f_3(M_2) = f_3(f_2(f_1(M))),$$

если $f=f_3f_2f_1$. Как было указано выше, для каждого из преобразований f_1, f_2, f_3 при переходе из точки M к ее образу — точке $f_i(M)$ — координаты точки $f_i(M)$ выражаются линейным образом через координаты точки M. Отсюда следует, что координаты x', y' точки $M' = f(M)$ также выражаются линейно через координаты x, y точки M:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}. \end{cases}$$

Так как при движении f точки O (0, 0), A (1, 0), B (0, 1) переходят в точки

$$\begin{aligned} &O'(\alpha,\ \beta), \\ &A'(\cos\varphi + \alpha,\ \ \sin\varphi + \beta), \\ &B'(-\sin\varphi + \alpha,\ \ \cos\varphi + \beta) \end{aligned}$$

(см. рис. 41, *а*)), если $f = f_2f_1$, и

$$\begin{aligned} &O'(\alpha,\ \beta), \\ &A'(\cos\varphi + \alpha,\ \sin\varphi + \beta), \\ &B'(\sin\varphi + \alpha,\ -\cos\varphi + \beta) \end{aligned}$$

(см. рис. 41, *б*)), если $f = f_3f_2f_1$, то отсюда следует, что в первом случае ($f = f_2f_1$) движение f в координатах x, y описывается формулами:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + \alpha, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + \beta, \end{cases}$$

а во втором случае ($f = f_3f_2f_1$) — формулами

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi + \alpha, \\ y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi + \beta. \end{cases}$$

Итак, справедлива

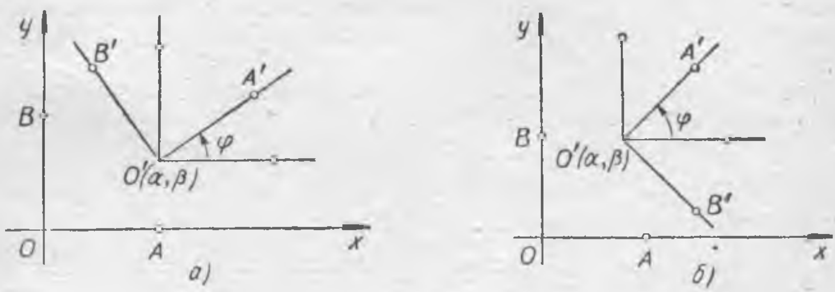


Рис. 41

Т е о р е м а 2. *Всякое движение на плоскости есть или произведение параллельного переноса и вращения, или произведение параллельного переноса, вращения и симметрии относительно некоторой прямой.*

Пусть, далее, на плоскости введена произвольная декартова система координат x, y, тогда в первом случае движение задается формулами:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + \alpha, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + \beta, \end{cases}$$

а во втором—формулами:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi + \alpha, \\ y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi + \beta. \end{cases}$$

В этих формулах φ есть угол, на который производится вращение плоскости вокруг точки O' (α, β).

3. Теоретико-групповая точка зрения на евклидову геометрию. На евклидовой плоскости после введения системы декартовых координат естественно устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и упорядоченными парами вещественных чисел x, y. Поэтому в дальнейшем евклидову плоскость можно рассматривать как совокупность упорядоченных пар вещественных чисел. Рассмотрим взаимно однозначные преобразования пар вещественных чисел x, y в пары вещественных чисел x', y', которые производятся по формулам:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi + \alpha, \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi + \beta, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi + \alpha, \\ y' &= x\sin\varphi - y\cos\varphi + \beta, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $\varphi \in (-\pi, \pi)$, а α и β—любые вещественные числа. Эти преобразования образуют группу относительно операции умножения (на евклидовой плоскости они образуют группу движений; об этом см. п. 2 настоящего параграфа). Тогда евклидову геометрию можно определить как теорию инвариантов группы преобразований (1) и (2). Преобразования (1) и (2) над парами вещественных чисел называются *ортогональными*. Поэтому можно сказать, что *евклидова геометрия есть теория инвариантов группы ортогональных преобразований.*

§ 16. Аксиома параллельности Лобачевского. Параллельные прямые на плоскости Лобачевского

Ниже, в §§ 16—19, будут изложены основные факты геометрии на плоскости Лобачевского. Часть теорем будет приведена без подробных доказательств, которые читатель может найти, например, в книгах Н. В. Ефимова «Высшая геометрия» и В. Ф. Кагана «Основания геометрии», часть I (М.—Л., ГИТТЛ, 1949).

Так же, как и в § 15, рассмотрения ведутся на некоторой произвольно фиксированной плоскости α.

1. Аксиома параллельности Лобачевского. *Через точку A, расположенную вне прямой a, проходит по крайней мере две прямых a' и a'', не пересекающих прямую a.*

Можно доказать (см. Н. В. Ефимов, «Высшая геометрия», гл. III, § 28), что из аксиомы Лобачевского вытекает выполнение утверждения этой аксиомы не только для какой-то одной точки A и какой-то одной прямой a, не проходящей через A, а для любых точек B и любых прямых b, лишь бы точка B не принадлежала прямой b. Этим «усиленным вариантом» аксиомы Лобачевского мы постоянно будем пользоваться.

Отметим ряд предложений, вытекающих из аксиомы Лобачевского.

Теорема 1. *Пусть a — некоторая прямая и A — точка, не лежащая на ней. Тогда через точку A проходит бесконечно много прямых, не пересекающих прямую a.*

Доказательство. Согласно аксиоме Лобачевского через точку A проходят две различные прямые a' и a'', не пересекающие прямую a (рис. 42). По теореме разбиения прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости. Возьмем на прямой a' точку B

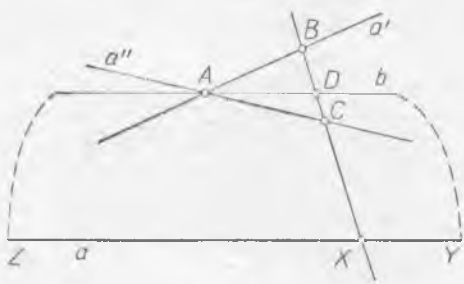


Рис. 42

так, чтобы она лежала по другую сторону от прямой a'', чем точки прямой a. Пусть X — произвольная точка прямой a. Прямая BX пересекает прямую a'' в некоторой точке C. Пусть, наконец, D — произвольная точка, лежащая внутри отрезка CB. Прямая AD не может пересечь прямую a. В противном случае, применяя аксиому Паша к прямой AC и одному из треугольников DXY или DXZ (рис. 42), получим, что прямые a и a'' или a и a' пересекаются, что невозможно.

Так как на любом отрезке имеется бесконечно много внутренних точек (теорема 4 § 5 гл. 1), то теорема доказана.

Пусть теперь a — некоторая прямая и A — точка, не лежащая на a. Пусть AP — отрезок, перпендикулярный прямой a, и a' — некоторая прямая, проходящая через точку A и не пересекающая прямую a (рис. 43). Обозначим через α радианную угловую меру острого угла, который образует прямая a' с отрезком AP (в дальнейшем для краткости изложения угловую радианную меру будем называть просто углом). Положим

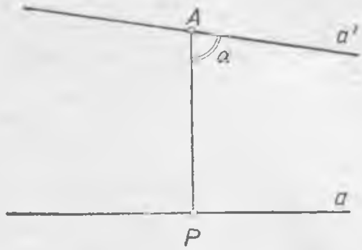


Рис. 43

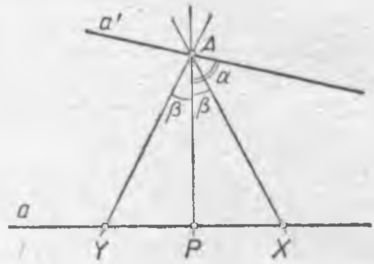


Рис. 44

$$\alpha_0 = \inf \alpha,$$

где точная нижняя граница берется по всем прямым, проходящим через точку A и не пересекающим прямую a.

Теорема 2. *Для величины α_0 справедливы неравенства*

$$0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Доказательство. Пусть X—некоторая точка прямой a (рис. 44). Обозначим через β острый угол между отрезком AP и прямой AX. Очевидно, что $\beta > 0$. Точно такое же построение можно проделать по другую сторону от прямой AP, взяв $PY = PX$.

Для любой прямой a', проходящей через точку A и не пересекающей прямую a, будем иметь, что

$$\alpha > \beta,$$

где α — острый угол, составляемый прямой a' с отрезком AP.

Отсюда

$$0 < \beta \leqslant \alpha_0 = \inf \alpha.$$

Если через точку A провести прямую b, перпендикулярную отрезку AP, то она не пересекает прямую a. По аксиоме Лобачевского существует прямая a', не пересекающая a, отличная от b. Прямая a', очевидно, составляет острый угол α с перпендикуляром AP. Отсюда

$$\alpha_0 = \inf \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Теорема доказана.

Пусть дана прямая a и точка A, не лежащая на ней. Условимся считать прямую a горизонтальной и будем говорить, что она делит плоскость на верхнюю и нижнюю полуплоскости. Далее будем говорить, что прямая AP разбивает плоскость на левую и правую полуплоскости. Прямая AP, как обычно, перпендикулярна прямой a.

Т е о р е м а 3. *Пусть, по-прежнему, точка A не лежит на прямой a и AP — перпендикуляр к прямой a. Пусть, далее, α_0 — угол, который был определен выше. Проведем прямые a' и a'', составляющие с отрезком AP вправо и влево углы, равные α_0. Тогда прямые a' и a'' не пересекают прямую a.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Обозначим через C точку пересечения прямой a' с прямой a (рис. 45). Пусть D — точка прямой a такая, что точка C лежит между P и D. Тогда прямая AD составляет вправо от AP с отрезком AP острый угол β, больший чем α_0:

$$\alpha_0 < \beta. \qquad (*)$$

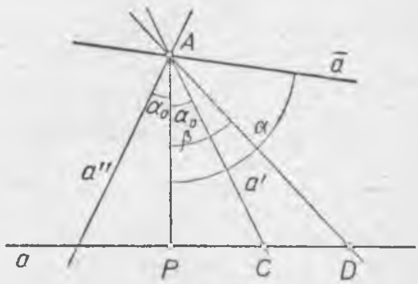


Рис. 45

Далее, для любой прямой $\bar{a}$, проходящей через точку A и не пересекающей прямую a, имеем:

$$\beta < \alpha,$$

где α — острый угол между прямой $\bar{a}$ и отрезком AP.

Так как

$$\alpha_0 = \inf \alpha,$$

то

$$\beta \leqslant \alpha_0. \qquad (\overset{*}{*})$$

Но неравенства $(*)$ и $(\overset{*}{*})$ несовместны. Следовательно, прямые a' и a'' не пересекаются с прямой a.

Теорема доказана.

Рассмотрим пучок прямых, проходящих через точку A. Пусть a — прямая, на которой не лежит точка A. Пусть, далее, AP — перпендикуляр к прямой a. Обозначим через a' и a'' прямые, которые составляют вправо и влево от перпендикуляра AP углы, равные α_0. Тогда на основании теоремы 3 и определения угла α_0 можно утверждать, что прямые a' и a'' определяют две пары вертикальных углов, обладающих следующим свойством: любая прямая пучка, лежащая внутри одной пары этих углов, не пересекает прямую a, а любая прямая, лежащая внутри другой пары углов, всегда пересекает прямую a.

Прямые a' и a'' называются *граничными* в пучке прямых, проходящих через точку A, относительно прямой a (см. рис. 46).

Имеет место следующая основная теорема о свойствах граничной прямой.

Теорема 4. *Если прямая a' является граничной по отношению к прямой a в какой-нибудь одной своей точке A, то она является граничной прямой относительно прямой a и в любой другой точке B, лежащей на a'.*

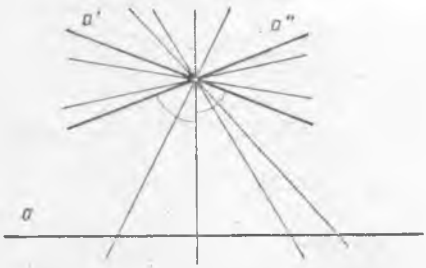


Рис. 46

Другими словами, свойство прямой быть граничной по отношению к другой прямой не зависит от выбора точки на первой прямой.

2. Параллельные прямые на плоскости Лобачевского. Пусть a — некоторая прямая на плоскости, A — точка, не лежащая на этой прямой, и AP—перпендикуляр, опущенный из A на прямую a. Из точки A проводим граничные прямые a' и a'', составляющие с отрезком AP соответственно справа и слева углы, равные α_0.

Будем говорить, что *прямая a' параллельна прямой a вправо, а прямая a'' параллельна прямой a влево.*

Из проведенных выше рассмотрений вытекает

Теорема 5. *Пусть даны прямая a и точка A, лежащая вне ее. Тогда через точку A проходит в точности одна прямая, параллельная a вправо, и в точности одна прямая, параллельная a влево.*

Данное выше определение параллельных прямых на плоскости Лобачевского не симметрично. Поэтому важную роль играет

Теорема 6. *Отношение параллельности прямых в одну сторону симметрично, т. е. если a' параллельна a вправо (влево), то и a параллельна a' вправо (влево).*

Теорема 7. *Отношение параллельности прямых в одну сторону транзитивно, т. е. если a параллельна b вправо (влево), b параллельна c вправо (влево), то a параллельна c вправо (влево).*

§ 17. Взаимное расположение расходящихся и параллельных прямых

1. Расходящиеся прямые. Две прямые, расположенные в одной плоскости, не пересекающиеся и не параллельные между собой, называются *расходящимися.*

Теорема 1. *Если прямые a и b перпендикулярны третьей прямой c, то они расходящиеся.*

Доказательство. Прямая b (рис. 47) составляет с перпендикуляром BA по обе стороны от него угол, равный $\frac{\pi}{2}$. Следо-

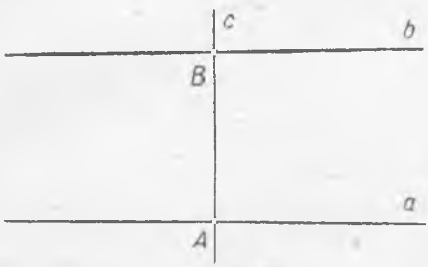


Рис. 47

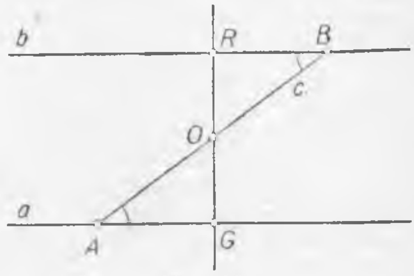


Рис. 48

вательно, она не параллельна прямой a. Из абсолютной геометрии известно, что прямые a и b не пересекаются. Следовательно, прямые a и b расходящиеся.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть прямые a и b пересечены третьей прямой c и при этом внутренние накрест лежащие или соответственные углы равны, тогда прямые a и b расходящиеся.*

Доказательство. Разберем случай равенства накрест лежащих углов. Пусть $AO \equiv OB$, OG и OR перпендикулярны соответственно прямым a и b (рис. 48). Тогда треугольники AOG и BOR конгруэнтны. Поэтому

$$\measuredangle AOG = \measuredangle BOR.$$

Отсюда вытекает, что лучи OG и OR образуют одну прямую, перпендикулярную прямым a и b. На основании теоремы 1 заключаем, что прямые a и b расходящиеся.

Теорема доказана.

2. Две леммы из абсолютной геометрии.

Лемма 1. *Пусть даны прямые a и b* (рис. 49). *На прямой b возьмем точку M и опустим перпендикуляр MN на прямую a. Предположим, что справа от отрезка MN находится тупой угол. Пусть M_1 — любая точка прямой b, лежащая правее точки M, и M_1N_1 — перпендикуляр к прямой a. Длину отрезка MM_1 обозначим через x, а длину отрезка M_1N_1 — через $f(x)$. Тогда на промежутке* $(0, +\infty)$ *функция $f(x)$ непрерывна, строго возрастает и*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty.$$

Лемма 2. *Рассмотрим угол, образованный полупрямыми a и b* (рис. 50). *Пусть M — произвольная точка полупрямой b и MN —*

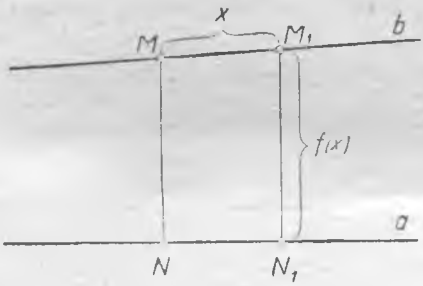


Рис. 49

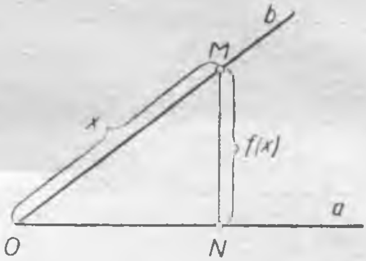


Рис. 50

отрезок, перпендикулярный к a. Обозначим через x длину отрезка OM, а через $f(x)$ — длину отрезка MN. Тогда на $(0, +\infty)$ функция $f(x)$ есть строго возрастающая, непрерывная функция x и

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty.$$

Отметим, что лемма 2 есть, очевидно, частный случай леммы 1.

3. Основная теорема о взаимном расположении расходящихся прямых.

Теорема 3. *Пусть a и b — две расходящиеся прямые. Тогда у них существует точно один общий перпендикуляр, по обе стороны от которого они неограниченно расходятся.*

Доказательство. Пусть у расходящихся прямых a и b есть два общих перпендикуляра — прямые k и l. Тогда прямые a, b, k, l определяют четырехугольник $ABCD$ (рис. 51) с четырьмя прямыми углами, что, как мы знаем, невозможно, если мы рассмотрим фигуры на плоскости Лобачевского. Итак, у прямых a и b может быть не более одного общего перпендикуляра. Докажем, что у прямых a и b есть общий перпендикуляр. Возьмем на прямой b точку M и пусть MN — перпендикуляр к прямой a (рис. 52). Не нарушая общности, можно считать, что справа от прямой MN угол между прямой b и отрезком MN тупой. Через точку M проходит

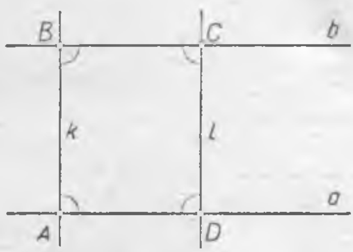


Рис. 51

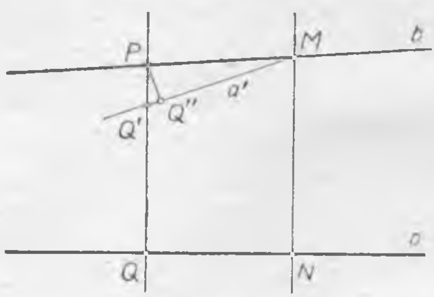


Рис. 52

прямая a', параллельная прямой a влево. Так как b — расходящаяся прямая с прямой a, то прямые a' и b не совпадают, и слева от прямой MN прямая a' лежит между прямыми b и a. Пусть P — произвольная точка прямой b, лежащая левее точки M. Пусть PQ и PQ'' — соответственно отрезки, перпендикулярные прямым a и a' (рис. 52). Точки P и Q лежат по разные стороны от прямой a' по построению. Следовательно, отрезок PQ пересекает прямую a' в некоторой точке Q'.

В прямоугольном треугольнике $PQ'Q''$ отрезок PQ'' — катет, а отрезок PQ' — гипотенуза. Поэтому

$$PQ'' < PQ'.$$

Далее,

$$PQ = PQ' + Q'Q.$$

Отсюда

$$PQ'' < PQ.$$

Обозначим длину отрезка MP через x, а длину отрезка PQ'' через $f(x)$. Применяя лемму 2, получим, что

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty.$$

Отсюда следует, что при неограниченном удалении точки P влево от точки M вдоль прямой b точка P неограниченно удаляется от прямой a. Поменяв в построении ролями прямые a и b, получим аналогичный факт для точек прямой b по отношению к прямой a. Итак, влево от перпендикуляра MN прямые a и b неограниченно удаляются друг от друга.

Возьмем теперь слева от точки M на прямой b точку P_0 так, чтобы длина отрезка P_0Q_0, перпендикулярного прямой a, была бы больше длины отрезка MN (рис. 53). Применяя лемму 1 к точкам прямых b и a, лежащих вправо от перпендикуляра MN, получим, что справа от MN прямые a и b неограниченно удаляются друг от друга и, кроме того, существует отрезок M_1N_1 (рис. 53) такой, что его длина равна длине отрезка P_0Q_0. Четырехугольник $M_1N_1Q_0P_0$ есть четырехугольник Саккери. Средняя линия к основаниям этого

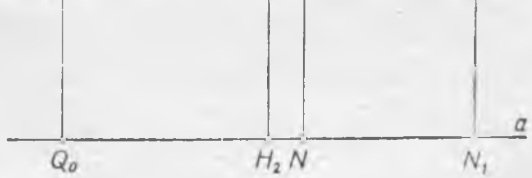


Рис. 53

четырехугольника есть, как мы знаем (см. § 3), его линия симметрии. Поэтому средняя линия H_1H_2 и есть искомый общий перпендикуляр к прямым a и b.

Теорема доказана.

4. Основная теорема о взаимном расположении параллельных прямых.

Теорема 4. *Две параллельные прямые неограниченно сближаются в сторону параллельности и неограниченно удаляются друг от друга в противоположном направлении.*

Доказательство. Пусть прямая b параллельна прямой a вправо и B — произвольная точка прямой b. Пусть, далее, BP — перпендикуляр к прямой a (рис. 54). Слева от прямой BP прямая b образует с отрезком BP тупой угол. Это вытекает из того, что прямая b параллельна прямой a вправо. Поэтому при неограниченном удалении вдоль прямой b влево от точки B точка M неограниченно удаляется от прямой a. Аналогично устанавливается, что при перемещении точки N вдоль прямой a влево от точки P она неограниченно удаляется от прямой b. Итак, в направлении, противоположном направлению параллельности, прямые a и b неограниченно удаляются друг от друга.

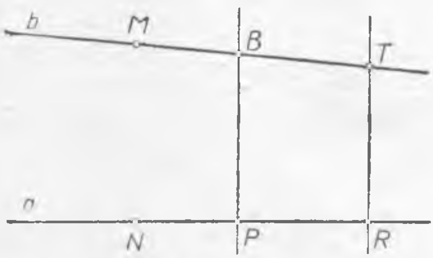


Рис. 54

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Не нарушая общности, можно считать ε меньшим, чем длина отрезка BP. На произвольной прямой a' возьмем точку R' и проведем через нее прямую, перпендикулярную прямой a'. На этом перпендикуляре возьмем точку T' (рис. 55) так, чтобы длина отрезка $R'T'$ была бы меньше ε. Через точку T' проведем прямую b', параллельную a' вправо

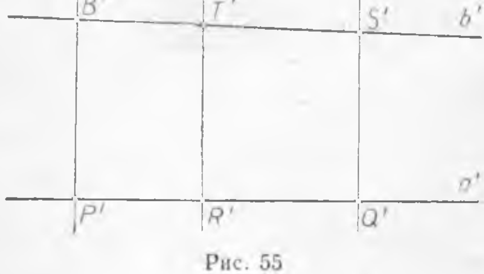


Рис. 55

во. Если S' — точка прямой b', лежащая правее точки T', то, применяя к четырехугольнику $R'T'S'Q'$ лемму 1, получим, что

$$S'Q' < R'T'$$

и, следовательно, длина отрезка $S'Q'$ меньше ε.

Таким образом, правая полупрямая прямой b' с началом в точке T' удалена от прямой a' на расстояние, меньшее ε.

Используя лемму 1, получим, что слева от точки T' существует точка B' такая, что длины отрезков $B'P'$ и BP равны. Поэтому эти отрезки конгруэнтны.

Пусть теперь R — точка прямой a, лежащая правее точки P и такая, что $PR \equiv P'R'$ (рис. 54).

Произведем движение на плоскости Лобачевского, которое совместит точку P' с точкой P, точку R' с точкой R и точку B' с точкой B. На основании теорем 5а и 6а такое движение существует и единственно. Легко видеть, что при этом движении прямые a' и b' перейдут соответственно в прямые a и b. Обозначим через T точку прямой b, являющуюся образом точки T' при указанном движении. Так как при движении длины отрезков сохраняются, то все точки прямой b, лежащие правее перпендикуляра TR к прямой a, удалены от прямой a на расстояние, меньшее ε. Поменяв ролями в проведенном рассуждении прямые a и b, получим аналогичное утверждение для точек прямой a.

Итак, в сторону параллельности прямые a и b неограниченно сближаются.

Теорема доказана.

§ 18. Угол параллельности

Пусть a — некоторая прямая и A — точка, не лежащая на этой прямой. Пусть AP — перпендикуляр к прямой a и a' — прямая, параллельная a вправо и проходящая через точку A (рис. 56).

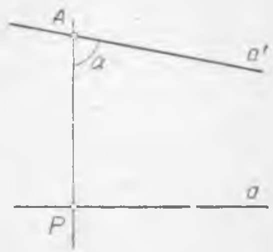


Рис. 56

Обозначим через α острый угол, который прямая a' образует с перпендикуляром AP. Угол α называется *углом параллельности* в точке A по отношению к прямой a. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Угол параллельности в точке A по отношению к прямой a зависит только от расстояния точки A до прямой a.*

Доказательство. Пусть нам даны две прямые a и a' (прямые a и a' могут совпадать) и две точки A и A', удаленные соответственно от прямых a и a' на одинаковое расстояние. Через точки A и A' проводим прямые b и b', которые соответственно параллельны прямым a и a' вправо. Пусть α и α' — углы параллельности при точках A и A' относительно прямых a и a'. Допустим, что углы α и α' не конгруэнтны, и пусть для определенности $\alpha < \alpha'$. Отложим от луча $A'P'$ вправо угол, конгруэнтный углу α. Тогда вторая сторона этого угла — полупрямая $A'Q'$ пересекает

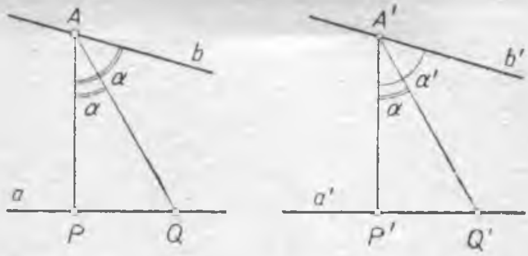


Рис. 57

прямую a' в некоторой точке Q' (рис. 57). Пусть Q — точка прямой a, лежащая правее точки P и такая, что $QP \equiv Q'P'$. Так как треугольники APQ и $A'P'Q'$ конгруэнтны по построению, то угол PAQ конгруэнтен углу, который прямая b образует с лучом AP справа от него. А это невозможно, так как в силу аксиомы III.5 нельзя по одну сторону от данного луча отложить два различных конгруэнтных угла.

Теорема доказана.

Обозначим длину отрезка AP через x, тогда угол параллельности α есть функция x, которую обозначают

$$\alpha = \Pi(x)$$

и называют *функцией Лобачевского.* Функция Лобачевского определена на промежутке $(0, +\infty)$. Имеет место следующая

Теорема 2. *Функция Лобачевского* $\Pi(x)$, *заданная на промежутке* $(0, +\infty)$, *непрерывна на этом промежутке, строго убывает и*

$$\lim_{x\to 0} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to\infty} \Pi(x) = 0.$$

Для угла параллельности имеет место формула

$$\Pi(x) = 2 \operatorname{arc\,tg} e^{-\frac{x}{R}},$$

где $R > 0$ — некоторая постоянная (см. Н. В. Ефимов «Высшая геометрия», гл. III, § 59).

§ 19. Эквидистанты

Пусть a — некоторая прямая на плоскости Лобачевского. Множество точек, расположенных по одну сторону от прямой a и удаленных от a на одно и то же расстояние, называется *эквидистантой.*

Теорема 1. *Эквидистанта не является прямой.*

Доказательство. Пусть l — эквидистанта, построенная по прямой a. Возьмем три любые точки A, B, C, принадлежащие l. Если мы докажем, что эти точки не лежат на одной прямой, то тем самым будет установлено, что эквидистанта отлична от прямой.

Предположим противное. Пусть через точки A, B, C проходит прямая b и пусть на этой прямой точка B лежит между точками A и C. Из определения эквидистанты вытекает (рис. 58), что четырехугольники $A'ABB'$ и $B'BCC'$ есть четырехугольники Саккери. Поэтому углы ABB' и $B'BC$ острые и, следовательно, сумма двух смежных углов при точке B, образованных прямой b и прямой, проходящей через точки B, B', меньше двух прямых, что невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему.

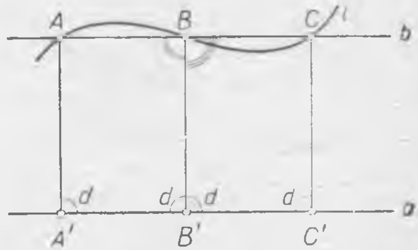


Рис. 58

Прямую a, с помощью которой построена эквидистанта l, называют *базой эквидистанты.*

Возьмем на эквидистанте l любую точку A и проведем прямую AA', перпендикулярную базе a. Через точку A проведем прямую t, перпендикулярную прямой AA'. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Все точки эквидистанты l лежат по одну сторону от прямой t с той стороны, что и точки базы a. Далее, прямая t является касательной к эквидистанте l в точке A.*

Прямую AA' называют *нормалью* к эквидистанте в точке A.

Доказательство. Так как прямая AA' перпендикулярна к обеим прямым a и t, то прямые a и t расходящиеся. По обе стороны от перпендикуляра AA' точки прямой t таковы, что их расстояния от прямой a строго возрастают при удалении этих точек от точки A. С другой стороны, все точки эквидистанты удалены от базы a на одно и то же расстояние, равное длине отрезка AA'. Поэтому вся эквидистанта лежит по одну сторону от прямой t, там, где расположена база a.

Для того чтобы установить существование касательной к эквидистанте в точке A и ее совпадение с прямой t, достаточно установить (см. рис. 59), что при стремлении точки X' к точке A' угол между лучами AX и AA' стремится к $\frac{\pi}{2}$.

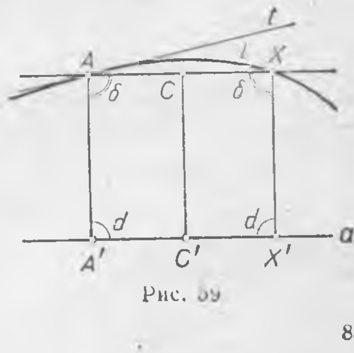


Рис. 59

Так как A и X — точки эквидистанты l, а прямые AA' и XX' — перпендикулярны к базе a, то четырехугольник $A'AXX'$ есть четырехугольник Саккери. Пусть CC' — средняя линия этого четырехугольника. Угол между лучами AA' и AX, который мы далее будем обозначать через δ, есть острый угол при вершине в четырехугольнике Саккери. Поэтому

$$\delta < \frac{\pi}{2}.$$

Так как прямые AA' и CC' расходящиеся, то

$$\Pi(y) < \delta,$$

где через y обозначена длина отрезка AC.

Таким образом,

$$\Pi(y) < \delta < \frac{\pi}{2}.$$

При стремлении точки X к точке A величина y стремится к нулю. Перейдем в неравенствах

$$\Pi(y) < \delta < \frac{\pi}{2}$$

к пределу при условии, что точка X стремится к точке A, тогда на основании теоремы 2 § 18 будем иметь:

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \lim_{X \to A} \delta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что $\measuredangle(t,\ AA')$ прямой.

Теорема доказана.

Пусть на плоскости Лобачевского фиксирована произвольная прямая a. Совокупность прямых, перпендикулярных к ней, называется *пучком прямых, ортогональных к прямой a.*

Любая эквидистанта с базой a представляет собой множество точек, расположенных по одну сторону от a и удаленных от a на одно и то же расстояние. Из теоремы 2 вытекает, что нормалями любой эквидистанты с базой a служат прямые пучка, ортогонального к прямой a. Поэтому *эквидистанты представляют собой ортогональные траектории пучка прямых, ортогональных к общей базе a всех эквидистант* (рис. 60).

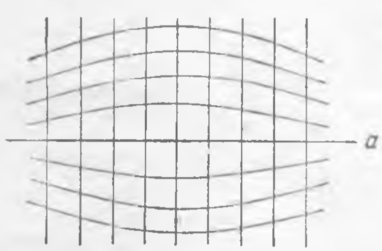


Рис. 60

Если на плоскости Лобачевского рассмотреть систему координат x, y, построенную в § 12, то осью x в ней будет прямая a; линиями, вдоль которых у точек постоянна координата x, будут прямые, перпендикулярные a, и, наконец, линиями, вдоль которых постоянна координата y, будут эквидистанты с базой a. Теперь мы ясно видим, что построенная в рамках абсолютной геометрии (§ 12) система координат на плоскости, вообще говоря, не является декартовой. Она будет декартовой только на плоскости Евклида.

Рассмотренная нами система координат на плоскости Лобачевского называется *полугеодезической*. Смысл термина «полугеодезическая система координат» будет выяснен в главе VI.

§ 20. Требования, предъявляемые к системе аксиом

При исследовании системы аксиом, лежащих в основе построения любой теории, в частности при исследовании системы аксиом геометрии Евклида или геометрии Лобачевского, всегда интересуются проблемами непротиворечивости, минимальности и полноты.

Как мы знаем, из данной системы аксиом, которая устанавливает определенные свойства взаимных отношений основных объектов, можно делать логические выводы об этих свойствах объектов, не принимая во внимание другие возможные их свойства, если о них ничего не говорится в аксиомах. Поэтому объектами данной системы аксиом можно считать объекты произвольной конкретной природы, и отношениям между ними, о которых говорится в аксиомах, можно придавать любой конкретный смысл, лишь бы при этом выполнялись требования аксиом. Тогда любая теорема, выведенная из аксиом, представляет собой определенный факт, относящийся к рассматриваемым конкретным объектам или, более точно, к тем их свойствам, о которых идет речь в аксиомах.

Всякий выбор конкретных математических объектов, которым мы будем приписывать роль основных объектов данной системы аксиом, называется *реализацией* (или *интерпретацией*) этих аксиом. Само множество объектов, реализующих данную систему аксиом, называют *моделью* этой системы аксиом.

Допустим, что все аксиомы некоторой системы реализованы на некоторой модели. Тогда логически невозможно вывести из них два следствия, исключающих друг друга. Поэтому если построить одну из возможных реализаций данной системы аксиом, то тем самым будет доказана *непротиворечивость* этой системы аксиом.

Доказательство непротиворечивости той или другой системы аксиом может носить условный характер. Например, ниже будет доказано, что на объектах евклидовой геометрии может быть построена модель геометрии Лобачевского. Отсюда получаем, что геометрия Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива геометрия Евклида. Вопрос о непротиворечивости геометрии Евклида будет сведен нами к непротиворечивости арифметики вещественных чисел. Таким образом, непротиворечивость обеих геометрий нами будет доказана при условии, что непротиворечива арифметика вещественных чисел.

Перейдем теперь к проблеме *минимальности*. Как ясно из самого названия, речь здесь идет о том, возможно или невозможно из данной системы аксиом исключить те или другие аксиомы так, чтобы при этом не нарушился объем следствий, вытекающий из этой системы.

Пусть буква A обозначает одну из аксиом данной непротиворечивой системы. Допустим, что аксиома A исключена из списка аксиом данной системы и заменена новой аксиомой: «утверждение A неверно». Тогда если новая система аксиом непротиворечива, то отсюда, очевидно, следует, что аксиома A *независима* от остальных аксиом системы. Таким образом, независимость аксиомы A по отношению ко всем остальным аксиомам данной системы будет вытекать из этого факта, что на некотором множестве объектов реализованы все аксиомы, кроме аксиомы A, а вместо аксиомы A реализовано противоположное утверждение.

Как мы уже отмечали, ниже будет доказано, что на объектах геометрии Евклида будет построена модель геометрии Лобачевского (гл. III, § 11). Отсюда будет вытекать, что аксиома параллельности Евклида не зависит от прочих аксиом геометрии. Аналогично аксиома параллельности Лобачевского также не зависит от остальных аксиом геометрии.

Вопрос о *полноте* данной системы аксиом связан с существованием качественно различных реализаций данной системы аксиом. Если система аксиом полна, то это должно означать, что все реализации в известном смысле между собой неразличимы. Более точно указанное соображение оформляется с помощью понятия изоморфных реализаций. Две реализации одной и той же системы аксиом называются *изоморфными*, если между объектами этих реализаций можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие между собой объекты находятся в одинаковых взаимных отношениях.

Например, если речь идет о двух реализациях плоской геометрии Евклида, то изоморфизм реализаций означает следующее: если точка A и прямая a первой реализации соответствуют точке A' и прямой a' второй реализации и если точка A лежит на прямой a, то точка A' должна лежать на прямой a'; если AB и CD — отрезки первой реализации и $AB \equiv CD$, то для соответствующих отрезков второй реализации $A'B'$ и $C'D'$ должно быть $A'B' \equiv C'D'$ и т. д. При этом отношения «принадлежит», «между», «конгруэнтен» для каждой реализации понимаются в соответствующем ей конкретном смысле.

Сформулируем теперь понятие полноты системы аксиом. *Система аксиом называется полной, если все ее реализации изоморфны друг другу.*

§ 21. Непротиворечивость и полнота системы аксиом плоской евклидовой геометрии

1. Аналитическая модель евклидовой геометрии. Непротиворечивость евклидовой геометрии. Построим реализацию плоской геометрии Евклида. *Точкой* в аналитической реализации назовем любую пару вещественных чисел (x, y), *прямой* — отношение трех вещественных чисел $(u : v : w)$ при условии, что хотя бы одно из двух чисел u, v не равно нулю[1].

Будем говорить, что *точка (x, y) лежит на прямой $(u : v : w)$, если имеет место равенство*: $ux + vy + w = 0$.

Убедимся, что требования аксиом I. 1—3 будут удовлетворены. Так как уравнение

$$ux + vy + w = 0$$

при условии $u^2 + v^2 \neq 0$ имеет бесконечно много решений, то аксиома I. 1, очевидно, выполняется.

Далее, если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — две различные точки, то тогда числа $u = y_1 - y_2$ и $v = x_2 - x_1$ одновременно не равны нулю. Положим $w = x_1y_2 - x_2y_1$. Тогда через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) проходит прямая $(u : v : w)$. Действительно,

$$ux_1 + vy_1 + w = (y_1 - y_2)\, x_1 + (x_2 - x_1)\, y_1 + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0,$$
$$ux_2 + vy_2 + w = (y_1 - y_2)\, x_2 + (x_2 - x_1)\, y_2 + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Далее, из уравнений

$$ux_1 + vy_1 + w = 0,$$
$$ux_2 + vy_2 + w = 0$$

следует, что $u : v : w = (y_1 - y_2) : (x_2 - x_1) : (x_1y_2 - y_1x_2)$.

Таким образом, точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) определяют только одну прямую, проходящую через эти точки. Итак, требование аксиомы I.2 удовлетворено.

Точки (0, 0), (1,0) (0,1) не лежат на одной прямой. Действительно, если $(u : v : w)$ — любая прямая, то из соотношений

$$u \cdot 0 + v \cdot 0 + w = 0,$$
$$u \cdot 1 + v \cdot 0 + w = 0,$$
$$u \cdot 0 + v \cdot 1 + w = 0$$

вытекает, что

$$u = v = w = 0.$$

Следовательно, требование аксиомы I.3 выполнено.

Отношение *«между»* определяется так. Пусть дана прямая $(u : v : w)$ и на ней три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

---

[1] Отношением трех чисел u, v, w называют тройку чисел u, v, w при условии, что тройки u, v, w и λu, λv, λw, где $\lambda \neq 0$, рассматриваются как тождественные.

Предположим, что $v \neq 0$. Будем говорить, что точка (x_2, y_2) лежит между (x_1, y_1) и (x_3, y_3), если $x_1 < x_2 < x_3$ или $x_1 > x_2 > x_3$. Если же $v = 0$, то для точек этой прямой

$$x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{w}{u}.$$

Поэтому предыдущее определение не действует. В этом случае будем считать, что точка (x_2, y_2) лежит между точками (x_1, y_1) и (x_3, y_3), если

$$y_1 < y_2 < y_3$$

или

$$y_1 > y_2 > y_3.$$

Мы предоставляем читателю в качестве полезного упражнения проверить, что требования аксиом порядка II.1 — 4 удовлетворены.

Перейдем к определению понятия *конгруэнтности*. Рассмотрим преобразования точек на плоскости, которые задаются соотношением

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a_1, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + a_2 \end{cases} \tag{*}$$

или

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi + a_1, \\ y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi + a_2. \end{cases} \tag{${}^*_*$}$$

При любом фиксированном $\varphi \in (-\pi, \pi]$ и любых фиксированных вещественных числах a_1, a_2 преобразование (*) или (${}^*_*$) определяет на плоскости однозначно по каждой точке (x, y) ее образ (x', y'). Так как

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = 1$$

и

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{vmatrix} = -1,$$

то эти преобразования обратимы и, как легко установить с помощью теоремы Крамера, представляют собой взаимно однозначные отображения плоскости. Преобразования (*) и (${}^*_*$) в алгебре называются *ортогональными*. Так мы их и будем называть ниже.

Мы будем говорить, что *два отрезка AB и CD конгруэнтны, если существует ортогональное преобразование, совмещающее эти отрезки. Аналогично два угла называются конгруэнтными, если они могут быть совмещены некоторым ортогональным преобразованием.*

Проверка выполнения требований аксиом конгруэнтности III.1—6 достаточно громоздка. Поэтому мы на ней останавливаться не будем. Подробное изложение этого вопроса имеется в главе IV книги Н. В. Ефимова «Высшая геометрия», куда мы и отсылаем читателя.

Для проверки выполнения требования *аксиом* непрерывности в построенной нами реализации проще всего установить, что в ней для множества точек каждой прямой выполнен принцип Дедекинда. Пусть $(u : v : w)$ — какая-нибудь прямая и пусть для определенности $v \neq 0$. Будем считать, что на этой прямой точка (x_1, y_1) предшествует точке (x_2, y_2), если $x_1 < x_2$. Если теперь произвести дедекиндово сечение на множестве точек прямой $(u : v : w)$, то одновременно будет произведено сечение во множестве вещественных чисел $\{x\}$. Так как во множестве вещественных чисел имеет место принцип Дедекинда, то существует число x_0, производящее сечение, т. е. замыкающее один из классов. Положим

$$y_0 = \frac{-ux_0 - w}{v}.$$

Очевидно, точка (x_0, y_0) лежит на прямой $(u : v : w)$ и замыкает один из классов дедекиндова сечения на прямой $(u : v : w)$. Итак, на всех прямых аналитической реализации выполняются требования принципа Дедекинда.

Перейдем к проверке выполнения требования *аксиомы параллельности*. Пусть $(u : v : w)$ — произвольная прямая и (x_0, y^0) — точка, не лежащая на ней, т. е. числа x_0, y_0 удовлетворяют соотношению

$$ux_0 + vy_0 + w \neq 0.$$

Пусть $(u' : v' : w')$ — прямая, проходящая через точку (x_0, y_0) и не имеющая общих точек с прямой $(u : v : w)$. Тогда, во-первых,

$$u'x_0 + v'y_0 + w' = 0, \qquad (*)$$

так как прямая $(u' : v' : w')$ проходит через точку (x_0, y_0), и, во-вторых, система двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} u'x + v'y + w' &= 0, \\ ux + vy + w &= 0 \end{aligned}\right| \qquad \left(\begin{smallmatrix}*\\*\end{smallmatrix}\right)$$

должна быть несовместной, так как прямые $(u' : v' : w')$ и $(u : v : w)$ не имеют общих точек. В случае несовместности системы $\left(\begin{smallmatrix}*\\*\end{smallmatrix}\right)$ необходимо должно быть $u' : u = v' : v$, или, если обозначить через μ каждое из этих равных между собой отношений:

$$u' = \mu u, \qquad v' = \mu v,$$

то из соотношения (*) тогда найдем

$$w' = -\mu (ux_0 + vy_0).$$

Отсюда

$$u' : v' : w' = u : v : -(ux_0 + vy_0),$$

и потому может быть не более одной прямой, проходящей через точку (x_0, y_0), параллельно произвольно заданной прямой.

Таким образом, в аналитической реализации выполнена аксиома параллельности Евклида.

Итак, построена аналитическая реализация плоской евклидовой геометрии. Тем самым установлена

Теорема 1. *Система аксиом евклидовой геометрии I — V свободна от противоречий, если непротиворечива арифметика вещественных чисел.*

Вопрос о непротиворечивости арифметики вещественных чисел в курсе высшей геометрии не рассматривается.

Модель, соответствующую аналитической реализации евклидовой геометрии, называют *аналитической моделью евклидовой геометрии.*

2. Полнота системы аксиом евклидовой геометрии

Теорема 2. *Система аксиом евклидовой геометрии полна.*

Доказательство. Достаточно, очевидно, установить, что любая реализация евклидовой геометрии изоморфна аналитической реализации.

Пусть R — произвольная реализация системы аксиом евклидовой геометрии. Тогда согласно §§ 12 и 15 во множестве объектов R, которые в реализации R названы «точками», можно ввести систему декартовых координат x, y и любой точке $M \in R$ будет взаимно однозначно соответствовать пара вещественных чисел. Далее, координаты точек, расположенных на какой-нибудь прямой, характеризуются уравнением

$$ux + vy + w = 0; \qquad u^2 + v^2 \neq 0.$$

Таким образом «прямым» реализации R взаимно однозначно отвечают отношения $(u : v : w)$, для которых $u^2 + v^2 \neq 0$. Тем самым получено взаимно однозначное соответствие между объектами реализации R и объектами аналитической реализации. Нетрудно проследить, что с помощью формул аналитической геометрии в декартовой системе координат взаимные отношения объектов реализации R характеризуются точно так же, как взаимные отношения соответствующих объектов аналитической реализации. Отсюда вытекает, что реализация R и аналитическая реализация изоморфны.

Теорема доказана.

Вопрос о независимости системы аксиом евклидовой геометрии, в частности вопрос о независимости аксиомы параллельности от прочих аксиом, будет рассмотрен в п. 3 § 12 гл. III после того, как будет построена модель геометрии Лобачевского.

§ 22. О тематике практических занятий

I. На практических занятиях, посвященных тематике § 1—3, полезно поставить доклады студентов. Ниже приводится примерный перечень тем докладов.

1. Основные этапы развития геометрии до «Начал» Евклида.

2. «Начала» Евклида. Их влияние на дальнейшее развитие геометрии.

3. Пятый постулат и предложения, ему эквивалентные.

4. Работы Саккери по основаниям геометрии.

5. Работы Ламберта по основаниям геометрии.

6. Работа Лежандра по основаниям геометрии.

7. Жизнь и деятельность Лобачевского.

8. Решение проблемы V постулата в работах Лобачевского, Больяи, Гаусса. Сравнительная роль каждого из них в построении неевклидовой геометрии.

9. Краткая характеристика последующего этапа развития оснований геометрии, связанного с работами Бельтрами, Клейна, Пуанкаре, Гильберта.

II. По материалу § 5 полезно поставить доклады студентов, посвященные следующим вопросам:

1. Доказательство теорем 2, 3, 4, представляющих собой естественные дополнения к аксиомам порядка.

2. Разбор лемм, на которых базируется доказательство теоремы разбиения на прямой.

Литература к обеим темам: § 14 гл. II книги Н. В. Ефимова «Высшая геометрия».

3. Доказательство теоремы о разбиении пространства плоскостью (в порядке самостоятельной работы).

III. По материалу § 6 полезно поставить доклад «Теорема Жордана». Литература: Д. Гильберт, Основания геометрии, М.—Л., ГИТТЛ, 1948.

Желательно также освещение этого вопроса и с других позиций. См., например, А. Д. Александров, Выпуклые многогранники, М.—Л., Гостехиздат, 1950; П. С. Александров, Комбинаторная топология, М.—Л., ГИТТЛ, 1947.

IV. По материалу § 8 желательно, во-первых, организовать самостоятельную работу по доказательству теорем, приведенных без доказательства и, во-вторых, рассмотреть решение различных задач из абсолютной геометрии.

V. По материалам § 16—19, используя книгу Н. В. Ефимова «Высшая геометрия» (гл. III), полезно поставить доклады студентов на темы:

1. Симметричность и транзитивность отношения параллельности прямых на плоскости Лобачевского.

2. О свойствах расстояния между точками двух прямых (доказательство леммы 1 п. 2 § 17).

3. О некоторых метрических соотношениях на плоскости Лобачевского.

4. Интерпретация Пуанкаре для плоскости Лобачевского. Понятие о непротиворечивости геометрии Лобачевского.

ГЛАВА II. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ[1]

§ 1. Определение аффинного преобразования

Пусть G — группа всех преобразований, или, что то же, группа всех взаимно однозначных отображений евклидовой плоскости. В предыдущей главе была подробно рассмотрена одна из наиболее важных ее собственных подгрупп — группа движений. Движения евклидовой плоскости (см. § 10) — это такие преобразования евклидовой плоскости, которые сохраняют конгруэнтность соответствующих отрезков. Все движения обладают важным свойством: они преобразуют прямые снова в прямые, т. е. сохраняют природу основных геометрических образов.

Рассмотрим теперь совокупность всех преобразований плоскости, которые прямые переводят в прямые. Такие преобразования принято называть *аффинными*. Очевидно, что совокупность аффинных преобразований плоскости образует собственную подгруппу группы G, ее мы будем обозначать $\mathcal{H}$. Очевидно, что $\mathcal{H}$ содержит в себе группу движений как подгруппу. Как мы увидим ниже, подгруппа движений является собственной подгруппой $\mathcal{H}$. Это вытекает из того, что аффинные преобразования, вообще говоря, не сохраняют конгруэнтность отрезков и углов.

К понятию аффинного преобразования евклидовой плоскости можно подойти также и с других позиций. На евклидовой плоскости рассмотрим некоторую декартову систему координат x, y. Всякое движение евклидовой плоскости в декартовых координатах задается формулами (см. п. 2 § 15 гл. I):

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a_1, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + a_2 \end{cases} \tag{*}$$

или

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi + a_1, \\ y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi + a_2, \end{cases} \tag{**}$$

---

[1] Материал для упражнений к главе II целесообразно подбирать по двум линиям: а) аналитической, используя для этого задачники по линейной алгебре, б) геометрической, используя для этого книгу И. М. Яглома и В. Г. Ашкинузе «Идеи и методы аффинной и проективной геометрии».

где $\varphi \in (-\pi, \pi]$, а a_1, a_2 — некоторые вещественные числа. Соотношения (*), $\left(\begin{smallmatrix}*\\*\end{smallmatrix}\right)$ дают правило перехода от любой точки $M(x, y)$ к ее образу — $M'(x', y')$. Используя линейность выражений для координат x' и y' точки M' через координаты x, y точки M и условие необращения в нуль определителей

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{vmatrix},$$

легко установить, что формулы (*), $\left(\begin{smallmatrix}*\\*\end{smallmatrix}\right)$ определяют преобразование евклидовой плоскости, которое переводит прямые в прямые.

Рассмотрим теперь более общее точечное отображение f евклидовой плоскости, переводящее точку M (x, y) в точку M' (x', y'), координаты которой определяются из соотношений:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, \end{cases} \qquad \left(\begin{smallmatrix}*\\ **\end{smallmatrix}\right)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23} — некоторые произвольно фиксированные вещественные числа. Для того чтобы f было взаимно однозначным отображением (или преобразованием) евклидовой плоскости, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

(это утверждение будет ниже доказано, поэтому мы сейчас на нем больше останавливаться не будем). Из линейности выражений для координат x' и y' точки M' через координаты x и y точки M с помощью простых вычислений легко следует (ниже в § 4 об этом будет идти речь подробно), что преобразование f переводит прямые в прямые.

Таким образом, *преобразование f, которое в декартовых координатах задается формулами*

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \end{cases}$$

при условии, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

является аффинным преобразованием. Оказывается, что верно и обратное: *всякое аффинное преобразование в любой декартовой системе координат задается формулами* $({}_*{}^*{}_*)$, *причем*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказательство последнего утверждения довольно сложно (см. § 2, п. 4). Как мы увидим ниже, свойства аффинных преобразований проще всего изучать с помощью их задания соотношениями $({}_*{}^*{}_*)$ в декартовой системе координат.

Сейчас мы рассмотрим еще один подход к понятию аффинного преобразования, связанный с преобразованием векторов. Пусть O— произвольная точка плоскости. С каждой точкой плоскости M можно сопоставить вектор

$$\boldsymbol{r} = \overline{OM},$$

называемый радиус-вектором точки M. Совокупность всех радиус-векторов $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$ с началом в точке O будем обозначать R_O. Очевидно, между точками плоскости M и радиус-векторами $\boldsymbol{r} = \overline{OM} \in R_O$ естественным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Пусть теперь f — аффинное преобразование евклидовой плоскости. Пусть O — произвольно фиксированная точка плоскости и O' — ее образ при преобразовании f. Так как f — аффинное преобразование, то пучок прямых с центром в точке O преобразование f переводит в пучок прямых с центром в точке O'.

Используя взаимную однозначность отображения f, получаем, что совокупность радиус-векторов R_O с началом в точке O с помощью преобразования f взаимно однозначно отображается на совокупность радиус-векторов $R_{O'}$ с началом в точке O':

$$\boldsymbol{r}' = f(\boldsymbol{r});$$

здесь $\boldsymbol{r} \in R_O, \boldsymbol{r}' \in R_{O'}$, а через f обозначено отображение радиус-векторов, которое порождено аффинным преобразованием f. (Мы сохраняем за ним то же обозначение f.)

Как будет установлено ниже (§ 2), пребразование f радиус-векторов удовлетворяет условиям линейности:

1) Для любого $\boldsymbol{r} \in R_O$ и любого вещественного числа λ справедливо соотношение

$$f(\lambda \boldsymbol{r}) = \lambda f(\boldsymbol{r}).$$

2) Для любых $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s} \in R_O$ справедливо соотношение

$$f(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}) = f(\boldsymbol{r}) + f(\boldsymbol{s}).$$

Преобразование f радиус-векторов $\boldsymbol{r} \in R_O$ в совокупность радиус-векторов $\boldsymbol{r}' \in R_{O'}$, удовлетворяющее условиям 1 и 2, называется *линейным*. Если при этом оказывается, что

$$f(R_O) = R_{O'},$$

то линейное преобразование радиус-векторов называют *невырожденным*.

Итак, *всякое аффинное преобразование f плоскости порождает некоторое линейное невырожденное преобразование радиус-векторов с началом в произвольно фиксированной точке O на совокупность радиус-векторов с началом в точке O' — образе точки O при преобразовании f.*

Оказывается, что обратное утверждение также имеет место. Поэтому *аффинное преобразование плоскости может быть определено как линейное невырожденное преобразование радиус-векторов.*

Ниже в этой главе мы определим аффинное преобразование через линейное невырожденное преобразование радиус-векторов. Далее установим эквивалентность этого определения с определением аффинного преобразования в координатной форме (см. п. 5, § 2) и затем после изучения ряда свойств аффинного преобразования установим эквивалентность этих определений аффинного преобразования с первоначальным определением, которое характеризует аффинное преобразование евклидовой плоскости как преобразование, переводящее прямые в прямые.

§ 2. Линейные преобразования. Координатное представление линейного и аффинного преобразований

1. Линейные преобразования. *Преобразование радиус-векторов*

$$\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r}), \ \boldsymbol{r} \in R_O, \ \boldsymbol{r}' \in R_{O'}$$

евклидовой плоскости α называется линейным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$1) \ \varphi(\lambda \boldsymbol{r}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{r}),$$

где $\boldsymbol{r} \in R_O$ — произвольный радиус-вектор, а λ — произвольное вещественное число;

2) *для любых радиус-векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s} \in R_O$*

$$\varphi(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}) = \varphi(\boldsymbol{r}) + \varphi(\boldsymbol{s}).$$

Известно, что вектор $\lambda\boldsymbol{r}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{r}$ и получается из него «растяжением» в λ раз; поэтому первое условие означает, что образ вектора $\lambda\boldsymbol{r}$ также коллинеарен образу вектора $\boldsymbol{r}$ и также получается из него растяжением в λ раз (см. рис. 61).

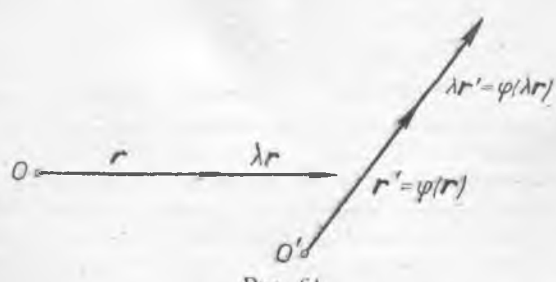


Рис. 61

Пусть O', M', N', P'—образы точек O, M, N, P при отображении φ. Тогда если $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$, $\boldsymbol{s} = \overline{ON}$, $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} = \overline{OP}$, то $\overline{O'M'} = \varphi(\boldsymbol{r})$, $\overline{O'N'} = \varphi(\boldsymbol{s})$, $\overline{O'P'} = \varphi(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s})$ (рис. 62) и согласно второму условию

$$\overline{O'P'} = \varphi(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}) = \varphi(\boldsymbol{r}) + \varphi(\boldsymbol{s}) = \overline{O'M'} + \overline{O'N'}.$$

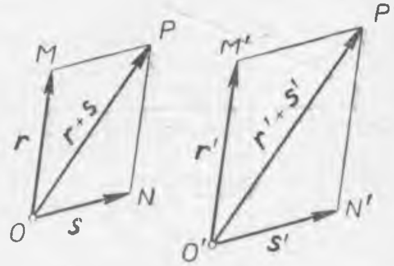


Рис. 62

Следовательно, второе условие означает, что каждый параллелограмм $OMPN$ преобразуется в четырехугольник $O'M'P'N'$, который также является параллелограммом.

Если линейное преобразование

$$\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$$

оставляет точку O на месте, то оно называется *центролинейным преобразованием*. Центролинейное преобразование переводит совокупность радиус-векторов в себя.

Линейное преобразование

$$\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$$

называется *невырожденным*, если оно переводит совокупность радиус-векторов с началом в точке O на всю совокупность радиус-векторов с началом в точке O'.

Пусть $\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$—некоторое линейное невырожденное преобразование радиус-векторов, переводящее радиус-вектор $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$ в радиус-вектор $\boldsymbol{r}' = \overline{O'M'}$. Тогда преобразование $\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$ порождает точечное преобразование $M' = \varphi(M)$ плоскости на себя. Точечное преобразование $M' = \varphi(M)$, порожденное линейным невырожденным преобразованием $\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$ (оба преобразования будем обозначать одинаково), будем называть *аффинным* преобразованием. Линейное невырожденное преобразование радиус-векторов $\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$ будем иногда также называть аффинным. Центролинейное невырожденное преобразование $\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$ и порождаемое им точечное преобразование $M' = \varphi(M)$ будем называть *центроаффинным*.

2. Базисы, аффинные координаты. На плоскости α выберем любую пару векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, неколлинеарных между собой и имеющих общее начало. Если обозначить через O точку, из которой исходят $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, то с помощью векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ можно построить оси Ox_1 и Ox_2. На осях Ox_1 и Ox_2 лежат соответственно векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, и направления осей совпадают с направлениями векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ (см. рис. 63). Пусть,

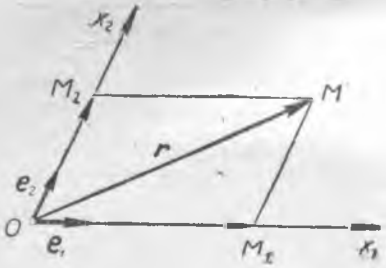


Рис. 63

далее, $\boldsymbol{r} \in \alpha$ — произвольный радиус-вектор, исходящий из точки O. Так как векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ неколлинеарны, то вектор $\boldsymbol{r}$ можно представить в виде суммы

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2.$$

Действительно, так как векторы $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ лежат в одной плоскости, то существуют числа λ, μ, ν, не все одновременно равные нулю, для которых справедливо соотношение

$$\lambda\boldsymbol{r} + \mu\boldsymbol{e}_1 + \nu\boldsymbol{e}_2 = 0.$$

Число $\lambda \neq 0$, ибо в противном случае векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ были бы коллинеарны, что невозможно. Поэтому

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2,$$

где $x_1 = -\dfrac{\mu}{\lambda}$, $x_2 = -\dfrac{\nu}{\lambda}$.

Коэффициенты в разложении $\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ при векторах $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ определяются однозначно. В самом деле, если

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2,$$

то

$$(x_1 - y_1)\boldsymbol{e}_1 + (x_2 - y_2)\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0},$$

и, поскольку $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ неколлинеарны, необходимо

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2.$$

Итак, если векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, имеющие общее начало O и неколлинеарные между собой, фиксированы, то любой радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ допускает разложение

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2,$$

где числа x_1 и x_2 определяются единственным образом.

Обратно, по заданной паре чисел x_1, x_2 и векторам $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ строится единственный радиус-вектор

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2.$$

Пара векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, имеющих общее начало и неколлинеарных между собой, называется *базисом*. Система чисел x_1, x_2, которая участвует в разложении

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$$

произвольного радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ по элементам базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, называется *аффинными координатами* вектора $\boldsymbol{r}$. В дальнейшем будем применять обозначение

$$\boldsymbol{r} = \{x_1, \ x_2\}.$$

Пусть M — конец радиус-вектора $\boldsymbol{r}$, тогда числа x_1, x_2 называются *аффинными координатами* точки M относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Этот факт записываем так: $M(x_1, x_2)$.

Выясним геометрический смысл аффинных координат.

Из определения суммы векторов следует, что фигура OM_1MM_2 (см. рис. 63) является параллелограммом. Поэтому

$$\overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2}.$$

Если пользоваться одной масштабной единицей для измерения длин всех векторов на плоскости α, то

$$x_1 = \pm \frac{|\overline{OM_1}|}{|e_1|}, \ x_2 = \pm \frac{|\overline{OM_2}|}{|e_2|},$$

где знак плюс берется в случае, когда векторы $\overline{OM_1}$ и $\boldsymbol{e}_1$, $\overline{OM_2}$ и $\boldsymbol{e}_2$ имеют одинаковые направления, и знак минус — в противоположном случае. Числа $\pm|\overline{OM_1}|$, $\pm|\overline{OM_2}|$ называются *компонентами* вектора $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$ относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Таким образом, аффинные координаты радиус-вектора $\boldsymbol{r}$, или, что то же, аффинные координаты его конца, суть отношения компонент вектора $\boldsymbol{r}$ относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ к длинам векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

Если на каждой из осей Ox_1 и Ox_2 выбрать в качестве $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ векторы единичной длины (при этом, конечно, масштабы на осях Ox_1 и Ox_2 будут, вообще говоря, разными), то аффинные координаты радиус-вектора и аффинные координаты точки, являющейся концом соответствующего радиус-вектора, будут равны компонентам радиус-вектора относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

Если векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ имеют единичную длину и взаимно перпендикулярны, то аффинные координаты точек относительно такого базиса являются декартовыми. В дальнейшем мы рассматриваем лишь аффинные координаты векторов и точек. Поэтому термин «аффинный» мы будем опускать и говорить просто о координатах соответствующих геометрических образов.

2. Координатное представление центролинейного преобразования векторов[1]. Пусть

$$\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$$

— центролинейное преобразование радиус-векторов, исходящих из точки O, и пусть этим преобразованием пара базисных векторов

[1] Ниже в пунктах 2 и 3 центролинейное преобразование иногда будем называть просто линейным.

$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ переводится в некоторую пару векторов $\boldsymbol{e}_1' = \varphi(\boldsymbol{e}_1)$, $\boldsymbol{e}'_2 = \varphi(\boldsymbol{e}_2)$. Будем считать векторы $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ известными, т. е. нам заданы их разложения по базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = \varphi(\boldsymbol{e}_1) = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}_2' = \varphi(\boldsymbol{e}_2) = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2. \end{cases} \tag{*}$$

Докажем, что задание формул (*) вполне определяет линейное преобразование $\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$.

Действительно, пусть $\boldsymbol{r} = \{x_1, x_2\}$ — произвольный вектор, а $\boldsymbol{r}' = \{x_1', x_2'\}$ — его образ (координаты обоих векторов берутся относительно одного и того же базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$). Тогда

$$\boldsymbol{r}' = x_1'\boldsymbol{e}_1 + x_2'\boldsymbol{e}_2 = \varphi(\boldsymbol{r}) = \varphi(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2).$$

Используя свойства линейности преобразования φ, получим:

$$\varphi(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) = \varphi(x_1\boldsymbol{e}_1) + \varphi(x_2\boldsymbol{e}_2) = x_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + x_2\varphi(\boldsymbol{e}_2) = x_1\boldsymbol{e}_1' + x_2\boldsymbol{e}_2'.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{r}' = x_1'\boldsymbol{e}_1 + x_2'\boldsymbol{e}_2 = x_1\boldsymbol{e}_1' + x_2\boldsymbol{e}_2'.$$

Подставляя в правую часть последнего равенства вместо $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ их разложения (*), будем иметь:

$$\boldsymbol{r}' = x_1(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2) + x_2(a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\boldsymbol{e}_1 + \\ + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\boldsymbol{e}_2.$$

С другой стороны,

$$\boldsymbol{r}' = x_1'\boldsymbol{e}_1 + x_2'\boldsymbol{e}_2.$$

Так как один и тот же вектор $\boldsymbol{r}'$ относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ имеет единственное разложение, то

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases} \tag{$\genfrac{}{}{0pt}{}{*}{*}$}$$

Эти формулы позволяют по любому вектору $\boldsymbol{r} = \{x_1, x_2\}$ определить его образ $\boldsymbol{r}' = \{x_1', x_2'\}$. Тем самым установлено, что формулы ($\genfrac{}{}{0pt}{}{*}{*}$) действительно определяют линейное преобразование φ.

Соотношения ($\genfrac{}{}{0pt}{}{*}{*}$) линейно выражают координаты вектора $\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$ через координаты вектора $\boldsymbol{r}$. Эти соотношения называются *координатным представлением линейного преобразования $\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$*. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

которая порождается координатным представлением

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

преобразования φ, называется *матрицей этого линейного преобразования в базисе* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

Пусть теперь фиксирован базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и каждому радиус-вектору $\boldsymbol{r} = \{x_1, x_2\}$ поставлен в соответствие радиус-вектор $\boldsymbol{r}' = \{x_1', x_2'\}$ по следующему правилу: координаты вектора $\boldsymbol{r}'$ получаются из координат вектора $\boldsymbol{r}$ по формулам:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases}$$

Очевидно, что это преобразование оставляет точку O (0, 0) неподвижной.

Докажем, что построенное нами преобразование радиус-векторов $\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$ линейно. Для этого нужно проверить соблюдение условий, характеризующих линейность преобразования φ.

1) Пусть

$$\boldsymbol{r} = \{x_1, x_2\}, \quad \varphi(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}' = \{x_1', x_2'\}, \quad \varphi(\lambda \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}^* = \{x_1^*, x_2^*\},$$

где λ — произвольное число. Так как

$$x_1^* = a_{11}(\lambda x_1) + a_{12}(\lambda x_2) = \lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) = \lambda x_1',$$
$$x_2^* = a_{21}(\lambda x_1) + a_{22}(\lambda x_2) = \lambda(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = \lambda x_2',$$

то

$$\boldsymbol{r}^* = \lambda \boldsymbol{r}'.$$

Отсюда

$$\varphi(\lambda \boldsymbol{r}) = \lambda \varphi(\boldsymbol{r}).$$

Таким образом, первое условие линейности для преобразования φ соблюдено.

2) Пусть

$$\boldsymbol{r} = \{x_1, x_2\}, \ \boldsymbol{s} = \{y_1, y_2\}$$

— произвольные радиус-векторы,

$$\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r}) = \{x_1', x_2'\}, \ \boldsymbol{s}' = \varphi(\boldsymbol{s}) = \{y_1', y_2'\}$$

—их образы,

$$\varphi(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}) = \boldsymbol{r}^* = \{x_1^*, x_2^*\}$$

— образ суммы векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$. Мы имеем:

$$\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2\},$$

следовательно,

$$x_1^* = a_{11}(x_1 + y_1) + a_{12}(x_2 + y_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + (a_{11}y_1 + a_{12}y_2) = x_1' + y_1',$$
$$x_2^* = a_{21}(x_1 + y_1) + a_{22}(x_2 + y_2) = (a_{21}x_1 + a_{22}x_2) + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2) = x_2' + y_2'.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{s}',$$

т. е.

$$\varphi(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}) = \varphi(\boldsymbol{r}) + \varphi(\boldsymbol{s}).$$

Итак, второе условие линейности для преобразования φ также соблюдено. Следовательно, $\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$ есть линейное преобразование.

Из очевидных равенств

$$\boldsymbol{e}_1 = 1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{e}_2 = 0 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{e}_2$$

вытекает, что в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ вектор $\boldsymbol{e}_1$ имеет координаты 1 и 0, а координатами вектора $\boldsymbol{e}_2$ служат 0 и 1:

$$\boldsymbol{e}_1 = \{1, 0\}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \{0, 1\}.$$

Отсюда образы базисных векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ таковы:

$$\boldsymbol{e}_1' = \{a_{11}, a_{21}\}, \qquad \boldsymbol{e}_2' = \{a_{12}, a_{22}\}.$$

Соответствующие разложения имеют вид:

$$\boldsymbol{e}_1' = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{e}_2' = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2.$$

Матрица, составленная из коэффициентов этих разложений, имеет вид:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

и получается транспонированием матрицы линейного преобразования φ. Итак, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Если дано линейное преобразование*

$$\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$$

радиус-векторов $\boldsymbol{r}$, исходящих из произвольной точки O плоскости α, и базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ с началом в точке O, то в координатах относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ преобразование φ представляется формулами:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} * \\ ** \end{pmatrix}$$

Обратно, если заранее даны формулы вида $({}_*{}^*{}_*)$ для преобразования координат радиус-векторов относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, то они представляют в выбранных координатах некоторое линейное преобразование.

Матрица A, составленная из коэффициентов формул $({}_*{}^*{}_*)$, и матрица A^*, составленная из коэффициентов разложений векторов $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ по базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, переводятся одна в другую транспонированием.

Рассмотрим координатные представления простейших линейных преобразований.

Пример 1. Пусть $\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$ есть подобие с коэффициентом k, т. е. $\varphi(\boldsymbol{r}) = k\boldsymbol{r}$. Базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ выберем из произвольной пары неколлинеарных векторов, исходящих из центра подобия. Тогда

$$x_1' = kx_1,$$
$$x_2' = kx_2.$$

Следовательно, координатное представление подобия таково:

$$\begin{cases} x_1' = kx_1 + 0\cdot x_2, \\ x_2' = 0\cdot x_1 + kx_2; \end{cases}$$

матрица подобия имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Пусть $\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$ есть вращение на угол γ. В качестве базиса берем пару взаимно перпендикулярных единичных векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, имеющих начало в центре вращения. Пусть $\boldsymbol{r} = \{x_1, x_2\}$ — произвольный радиус-вектор. Тогда, вводя полярные координаты на плоскости α и пользуясь тем, что аффинные координаты вектора совпадают в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ с декартовыми, получим:

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\theta, \\ x_2 = \rho\sin\theta, \end{cases}$$

где ρ, θ — полярные координаты конца вектора $\boldsymbol{r}$. Так как вектор $\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$ получается поворотом $\boldsymbol{r}$ на угол γ вокруг начала координат, то

$$\begin{cases} x_1' = \rho\cos(\theta + \gamma), \\ x_2' = \rho\sin(\theta + \gamma). \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_1' = \rho\cos(\theta + \gamma) = \rho[\cos\theta\cos\gamma - \sin\theta\sin\gamma], \\ x_2' = \rho\sin(\theta + \gamma) = \rho[\cos\theta\sin\gamma + \sin\theta\cos\gamma]. \end{cases}$$

Раскрывая скобки в правых частях этих равенств и полагая $\rho\cos\theta = x_1$, $\rho\sin\theta = x_2$, найдем формулы координатного представления вращения на угол γ:

$$\begin{cases} x_1' = x_1\cos\gamma - x_2\sin\gamma, \\ x_2' = x_1\sin\gamma + x_2\cos\gamma. \end{cases}$$

Матрица вращения на угол γ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Пусть преобразование

$$\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$$

есть отражение от прямой a. Базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ так же, как и в примере 2, возьмем составленным из взаимно перпендикулярных векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ единичной длины, причем вектор $\boldsymbol{e}_2$ направим по прямой a. Тогда, если

$$\boldsymbol{r} = \{x_1, x_2\}, \quad \boldsymbol{r}' = \{x_1', x_2'\},$$

то

$$x_1' = x_1, \ x_2' = -x_2.$$

Написанные формулы и дают координатное представление отражения от прямой. Матрица преобразования здесь имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Сжатие к прямой. Пусть a — некоторая прямая, проходящая через точку O. Сопоставим с каждым радиус-вектором

$$\boldsymbol{r} = \overline{OM}$$

радиус-вектор

$$\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r}) = \overline{OM'}$$

такой, что если P — основание перепендикуляра, опущенного из M на a, то M' лежит на луче PM, причем отношение длин отрезков PM' и PM равно постоянному положительному числу k. Ниже будет проверено, что указанное преобразование линейное. Построенное выше преобразование называется сжатием к прямой a. Если $k < 1$, то мы имеем действительно сжатие, если же $k > 1$, то мы на самом деле имеем дело с растяжением.

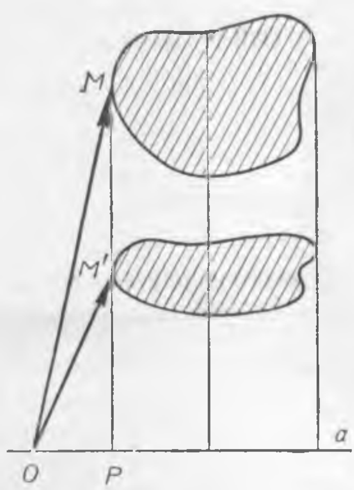


Рис. 64

На рис. 64 указано, как изменяется фигура F под действием преобразования сжатия к прямой a.

Пусть $\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$ есть сжатие к прямой a с коэффициентом k. Беря базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ из взаимно перпендикулярных единичных векторов и располагая при этом вектор $\boldsymbol{e}_1$ на прямой a, будем иметь для векторов $\boldsymbol{r} = \{x_1, x_2\}$ и $\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r}) = \{x_1', x_2'\}$ соотношения:

$$\begin{cases} x_1' = x_1, \\ x_2' = kx_2. \end{cases}$$

Написанные формулы и дают координатное представление в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ сжатия к прямой a. Матрица этого преобразования, или, что то же, сжатия к оси Ox_1, имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Если бы по прямой a был направлен вектор $\boldsymbol{e}_2$, то координатное представление имело бы вид:

$$\begin{cases} x_1' = kx_1, \\ x_2' = x_2, \end{cases}$$

и, следовательно, сжатие к оси Ox_2 с коэффициентом k характеризуется матрицей.

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из приведенных нами рассмотрений вытекает, что если $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы, то линейное преобразование $\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$, имеющее в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ координатное представление

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= k_1x_1, \\ x_2' &= k_2x_2, \end{aligned}\right\}$$

является одновременно сжатием к двум взаимно перпендикулярным осям Ox_1 и Ox_2 с коэффициентами k_1 и k_2. Матрица такого преобразования имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

3. Геометрический смысл определителя центролинейного преобразования. Пусть на плоскости α определено центролинейное преобразование радиус-векторов, имеющих начало в точке O:

$$\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r}).$$

Выберем базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ с началом в точке O. Тогда относительно этого базиса координатное представление будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases}$$

Базисные векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ переводятся соответственно в векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1' &= a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}_2' &= a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2. \end{aligned}$$

Определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

будем называть *определителем линейного преобразования* φ. В дальнейшем наряду с обычным обозначением определителя матрицы A:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

будем использовать обозначение $\det A$.

Пусть $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости α и такой, что векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{n}$ в пространстве образуют правую тройку. Тогда вектор $\boldsymbol{n}$ по направлению совпадает с векторным произведением $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$. Обозначим через S_0 площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, тогда

$$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] = S_0\boldsymbol{n}. \qquad (*)$$

Обозначим через S_0' площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{e}_1' = \varphi(\boldsymbol{e}_1)$, $\boldsymbol{e}_2' = \varphi(\boldsymbol{e}_2)$; тогда

$$[\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'] = \pm S_0'\boldsymbol{n}. \qquad \left(\begin{smallmatrix} * \\ * \end{smallmatrix}\right)$$

Знак плюс в этой формуле соответствует случаю, когда тройка векторов $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{n}$ правая, а знак минус, когда эта же тройка векторов левая. В первом случае мы будем говорить, что пары векторов $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ и $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ на плоскости α ориентированы одинаково, а во втором случае — противоположно. Если $S_0' = 0$, то векторы $\boldsymbol{e}_1'$ и $\boldsymbol{e}_2'$ коллинеарны, и вопрос об ориентации пар $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ и $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ отпадает.

Используя свойства векторного произведения, известные из курса аналитической геометрии, получим:

$$[\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'] = [a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2,\ a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2] = a_{11}a_{22}[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] +$$
$$+ a_{21}a_{12}[\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1] = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2].$$

Отсюда с учетом равенств (*) и ($\begin{smallmatrix} * \\ * \end{smallmatrix}$) будем иметь:

$$\pm S_0' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} S_0.$$

Ориентированной площадью параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, будем называть число S_0', если пары $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ и $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ориентированы одинаково, и $-S_0'$, если эти пары ориентированы противоположно. Ориентированную площадь будем обозначать буквой σ_0'. Тогда

$$\sigma_0' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} S_0.$$

Отсюда вытекает геометрический смысл определителя линейного преобразования

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases}$$

Именно $\det A$ *есть отношение ориентированной площади параллелограмма, построенного на образах элементов базиса* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ *к площади параллелограмма, построенного на базисных векторах* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

Пусть теперь $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ — пара радиус-векторов на плоскости α, исходящих из точки O, и пусть

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{s} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2$$

— разложения этих векторов по базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Если через S обозначить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$, то

$$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}] = \pm S\boldsymbol{n}. \qquad ({}_*{}^*{}_*)$$

Так же, как и выше, пары векторов $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ будем считать ориентированными одинаково, если в формуле $({}_*{}^*{}_*)$ стоит знак плюс, и ориентированными противоположно, если в формуле $({}_*{}^*{}_*)$ стоит знак минус. В первом случае ориентированной площадью параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$, будем называть число $+S$, а во втором случае $-S$. Ориентированную площадь этого параллелограмма обозначим через σ. Тогда из соотношения

$$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}] = [x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2,\ y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2] = (x_1y_2 - x_2y_1)[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$$

вытекает, что

$$\sigma = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} S_0.$$

Пусть, далее,

$$\boldsymbol{r}' = \{x_1', x_2'\};\ \boldsymbol{s}' = \{y_1', y_2'\}$$

— образы векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$ при преобразовании φ.

Ориентированная площадь σ' параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{s}'$, равна

$$\sigma' = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix} S_0. \qquad \left({}^*_* \ {}^*_*\right)$$

Так как

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\ y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2,$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2,$$

то, используя умножение матриц, имеем:

$$\begin{pmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Так как определитель произведения матриц равен произведению определителей перемножаемых матриц, то

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Умножая обе части последнего равенства на S_0 и используя соотношения $({}_*{}^*{}_*)$ $\left({}^*_* \ {}^*_*\right)$, получим:

$$\sigma' = \sigma \cdot \det A.$$

Таким образом, при линейном преобразовании $\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$ все параллелограммы изменяются так, что их ориентированные площади изменяются пропорционально; общим коэффициентом пропорциональности является определитель преобразования.

Из формулы $\sigma' = \sigma \det A$ видно также следующее: если $\det A > 0$, то преобразование сохраняет ориентации всех пар векторов плоскости α, если же $\det A < 0$, — меняет на противоположные. Очевидно, что если $\det A \neq 0$, то линейное преобразование φ невырожденное.

Пусть теперь линейное преобразование $\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$ имеет равный нулю определитель. Из формулы $\sigma = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} S_0$ следует, что ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{e}_1' = \varphi(\boldsymbol{e}_1)$ и $\boldsymbol{e}_2' = \varphi(\boldsymbol{e}_2)$, равна нулю. Следовательно, векторы $\boldsymbol{e}_1'$ и $\boldsymbol{e}_2'$ коллинеарны. Обозначим через a' прямую, на которой лежат эти векторы. Для любого радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ справедливо разложение

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2.$$

Из линейности преобразования тогда следует, что вектор

$$\boldsymbol{r}' = x_1\boldsymbol{e}_1' + x_2\boldsymbol{e}_2'$$

лежит на прямой a'. Итак, в случае, когда, $\det A = 0$, вся плоскость α отображается в некоторую прямую. Такое линейное преобразование плоскости называется *вырожденным*.

Рассмотренные выше факты раскрывают геометрический смысл определителя линейного преобразования.

4. Координатное представление линейного преобразования. В пунктах 2 и 3 настоящего параграфа было рассмотрено центро-линейное преобразование. В настоящем пункте результаты, полученные в пп. 2 и 3, будут перенесены на общие линейные преобразования.

Итак, пусть

$$\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$$

— линейное преобразование, переводящее радиус-векторы $\boldsymbol{r} \in R_O$ в радиус-векторы $\boldsymbol{r}' \in R_{O'}$. Пусть $\boldsymbol{g}_1 = \overline{O'G_1}$ и $\boldsymbol{g}_2 = \overline{O'G_2}$ — векторы, равные соответственно векторам $\boldsymbol{e}_1 = \overline{OE_1}$ и $\boldsymbol{e}_2 = \overline{OE_2}$. Векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ предполагаются неколлинеарными. Таким образом, на плоскости выделяются два базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, начала которых находятся в точках O и O'. Пусть M — произвольная точка плоскости. Тогда координаты ее относительного базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ будем обозначать (x_1, x_2), а относительно базиса $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$ — (y_1, y_2). В соответствии с этим радиус-вектор $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$ имеет координаты $\{x_1, x_2\}$, а радиус-вектор $\boldsymbol{r}' = \overline{O'M}$ — координаты $\{y_1, y_2\}$.

Пусть $\boldsymbol{e}_1' = \varphi(\boldsymbol{e}_1)$ и $\boldsymbol{e}_2' = \varphi(\boldsymbol{e}_2)$ — образы базисных векторов при преобразовании φ и пусть

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1' &= a_{11}\boldsymbol{g}_1 + a_{21}\boldsymbol{g}_2, \\ \boldsymbol{e}_2' &= a_{12}\boldsymbol{g}_1 + a_{22}\boldsymbol{g}_2 \end{aligned} \tag{*}$$

— разложения векторов $\boldsymbol{e}_1'$ и $\boldsymbol{e}_2'$ по базису $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$. Пусть теперь $\boldsymbol{r} = \{x_1, x_2\}$ — произвольный вектор и $\boldsymbol{r}' = \{y_1', y_2'\}$ — его образ.

Тогда

$$\boldsymbol{r}' = y_1'\boldsymbol{g}_1 + y_2'\boldsymbol{g}_2 = \varphi(\boldsymbol{r}) = \varphi(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2).$$

Так как φ — линейное преобразование, то

$$\varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2) = \varphi(x_1 e_1) + \varphi(x_2 e_2) = \\ = x_1 \varphi(e_1) + x_2 \varphi(e_2) = x_1 e_1' + x_2 e_2'.$$

Следовательно,

$$r' = x_1 e_1' + x_2 e_2' = y_1' g_1 + y_2' g_2.$$

Подставляя в левую часть последнего равенства вместо e_1', e_2' их разложения (*), получим:

$$r' = x_1(a_{11} g_1 + a_{21} g_2) + x_2(a_{12} g_1 + a_{22} g_2) = \\ = (a_{11} x_1 + a_{12} x_2) g_1 + (a_{21} x_1 + a_{22} x_2) g_2.$$

С другой стороны,

$$r' = y_1' g_1 + y_2' g_2.$$

Отсюда

$$\begin{cases} y_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2, \\ y_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2. \end{cases}$$

Пусть радиус-вектор $\overline{OM'}$ (рис. 65) в базисе e_1, e_2 имеет координаты $\{x_1', x_2'\}$, а вектор $\overline{OO'} = d_1 e_1 + d_2 e_2$.

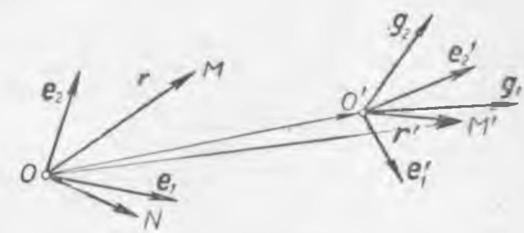


Рис. 65

Далее,

$$\overline{OM'} = \overline{OO'} + \overline{O'M'} = \\ = \overline{OO'} + \overline{ON},$$

где $\overline{ON}$ — вектор, равный вектору $\overline{O'M'}$; вектор $\overline{ON}$ имеет координаты $\{y_1, y_2\}$. Поэтому

$$\begin{cases} x_1' = y_1' + d_1, \\ x_2' = y_2' + d_2. \end{cases}$$

Отсюда координатное представление линейного преобразования $r' = \varphi(r)$ в базисе e_1, e_2 имеет вид:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + d_1, \\ x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + d_2. \end{cases} \qquad (*)$$

Из полученных формул видно, что *общее линейное преобразование складывается из последовательного выполнения центролинейного преобразования*

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

и параллельного переноса на вектор $\overline{OO'} = d_1\boldsymbol{e}_1 + d_2\boldsymbol{e}_2$.

Очевидно, что верно и обратное утверждение: (*) определяет в базисе $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ линейное преобразование совокупности векторов с началом в точке O (0, 0) в совокупность векторов с началом в точке O' (d_1, d_2). При этом матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

получающаяся транспонированием матрицы A координатного представления преобразования φ:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + d_1, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + d_2, \end{cases}$$

представляет собой коэффициенты разложения образов элементов базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ по векторам $\boldsymbol{g}_1 = \overline{O'G_1}$ и $\boldsymbol{g}_2 = \overline{O'G_2}$, равным соответственно векторам $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

Так как при параллельных переносах конгруэнтность фигур на евклидовой плоскости сохраняется, то, очевидно, геометрический смысл определителя общего линейного преобразования φ тот же, что и у центролинейного преобразования. Именно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

есть отношение ориентированных площадей параллелограммов σ' *и* σ, *построенных соответственно на векторах*

$$\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{s}' = \varphi(\boldsymbol{s})$$

и

$$\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s},$$

где $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$ — *любые неколлинеарные между собой радиус-векторы с началом в точке* O (см. рис. 66).

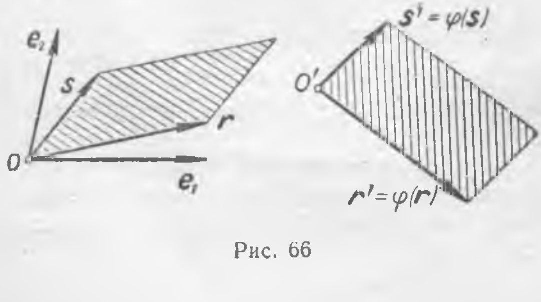


Рис. 66

Далее, если

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то формулы (*) определяют линейное невырожденное преобразование; если же

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

то те же формулы определяют линейное вырожденное преобразование.

5. Координатное представление аффинного преобразования.

Теорема 2. *Пусть* φ — *аффинное преобразование евклидовой плоскости и* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ — *произвольный базис на этой плоскости. Тогда координатное представление* φ *относительно базиса* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ *задается формулами*:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + d_1, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + d_2, \end{cases}$$

где

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из результатов, полученных в п. 4. Действительно, аффинное преобразование φ в координатах x_1, x_2 относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ имеет то же самое координатное представление, что и порождающее его линейное невырожденное преобразование радиус-векторов $\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$. А преобразование $\boldsymbol{r}' = \varphi(\boldsymbol{r})$ имеет в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ координатное представление

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + d_1, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + d_2, \end{cases}$$

причем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Теорема доказана.

Имеет место и обратное утверждение.

Теорема 3. *Пусть на евклидовой плоскости фиксирован некоторый базис* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ *и определено преобразование* φ, *которое каждой точке* $M(x_1, x_2)$ *относит точку* $M'(x_1', x_2')$ *по правилу*

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + d_1, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + d_2. \end{cases}$$

При этом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда φ есть аффинное преобразование.

Доказательство непосредственно вытекает из того, что преобразование φ порождает линейное невырожденное преобразование совокупности радиус-векторов с началом в точке O (0, 0) на множество радиус-векторов с началом в точке O' (d_1, d_2); последнее утверждение доказано в п. 4 настоящего параграфа.

Таким образом, из теорем 2 и 3 следует, что определение аффинного преобразования евклидовой плоскости можно дать в терминах преобразований координат точек относительно фиксированного базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

§ 3. Группа аффинных преобразований

1. Произведение аффинных преобразований. Пусть на евклидовой плоскости α заданы два аффинных преобразования ψ и η. В соответствии с определением, данным в п. 1 § 9 гл. I, произведением аффинных преобразований ψ и η называется преобразованиее ζ, состоящее в последовательном выполнении преобразований ψ и η.

Фиксируем на плоскости α некоторый базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Пусть относительно этого базиса преобразования ψ и η имеют координатные представления:

$$\psi: \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + d_1, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + d_2, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\eta: \begin{cases} x_1' = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_1, \\ x_2' = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_2, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда преобразование $\zeta = \eta\psi$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ имеет координатное представление:

$$\zeta: \begin{cases} x_1' = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + h_1, \\ x_2' = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + h_2, \end{cases}$$

где

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0,$$

$$h_1 = f_1 + b_{11}d_1 + b_{12}d_2, \; h_2 = f_2 + b_{21}d_1 + b_{22}d_2.$$

Отсюда на основании теоремы 3 § 2 гл. II следует, что преобразование $\zeta = \eta\psi$ есть аффинное преобразование плоскости α.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Произведение аффинных преобразований есть аффинное преобразование.*

Так как для произведения любых точечных преобразований ψ, η, ζ плоскости α справедлив закон ассоциативности (см. § 9 гл. I), то, в частности, этот закон справедлив, когда ψ, η, ζ — аффинные преобразования.

2. Обращение аффинного преобразования. Фиксируем некоторый базис e_1, e_2 и пусть относительно него аффинное преобразование ψ имеет координатное представление

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + d_1, \\ x_2' = x_{21}x_1 + a_{22}x_2 + d_2, \end{cases}$$

причем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Выражая x_1, x_2 через x'_1, x'_2, получим:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_{22}}{\Delta} x_1' + \frac{-a_{12}}{\Delta} x_2' + f_1, \\ x_2 &= \frac{-a_{21}}{\Delta} x_1' + \frac{a_{11}}{\Delta} x_2' + f_2, \end{aligned} \qquad (*)$$

где

$$f_1 = \frac{1}{\Delta}(-a_{22}d_1 + a_{12}d_2),$$

$$f_2 = \frac{1}{\Delta}(a_{21}d_1 - a_{11}d_2).$$

Формулы (*) дают правило нахождения по каждой точке $M'(x_1', x_2')$ плоскости α ее прообраза $M(x_1, x_2)$ относительно преобразования ψ. Следовательно, формулы (*) дают координатное представление преобразования ψ^{-1}. Из теоремы 3 § 2 гл. II тогда вытекает, что ψ^{-1} есть аффинное преобразование.

Итак, справедлива

Теорема 2. *Преобразование, обратное к аффинному, существует, единственно и является аффинным преобразованием.*

3. Группа аффинных преобразований и ее подгруппы.

Теорема 3. *Совокупность аффинных преобразований евклидовой плоскости относительно операции умножения образует группу.*

Доказательство. Действительно, в силу теоремы 1 произведение двух аффинных преобразований есть снова аффинное преобразование. Роль единицы играет тождественное преобразование ε, и для каждого аффинного преобразования ψ в силу теоремы 2 есть обратное ψ^{-1} такое, что $\psi\psi^{-1} = \varepsilon$.

Таким образом, совокупность аффинных преобразований относительно операции умножения действительно образует группу.

Эту группу, как мы условились выше в § 1, будем обозначать $\mathcal{A}$. В группе $\mathcal{A}$ имеются две важнейшие подгруппы: $\mathcal{L}$ — подгруппа невырожденных центролинейных преобразований и $\mathcal{P}$ — подгруппа параллельных переносов.

Другие подгруппы группы $\mathcal{A}$ будут указаны ниже.

Любой параллельный перенос плоскости α не меняет расстояний между точками. Поэтому преобразования подгруппы $\mathcal{P}$ не меняют метрических соотношений на плоскости. С другой стороны, применяя к геометрическим фигурам на плоскости α преобразования из подгруппы $\mathcal{L}$, мы, как правило, будем изменять метрические соотношения между элементами этих фигур. Отсюда ясно, что изучение свойств геометрических фигур, остающихся инвариантными (неизменными) при аффинных преобразованиях, прежде всего сводится к исследованию инвариантных свойств геометрических фигур при невырожденных центролинейных преобразованиях.

§ 4. Некоторые свойства аффинных преобразований

Теорема 1. *При аффинном преобразовании прямые переходят в прямые, при этом параллельные прямые переходят в параллельные.*

Доказательство. Фиксируем на плоскости базис, состоящий из двух взаимно перпендикулярных единичных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Тогда координаты точек плоскости относительно этого базиса являются декартовыми. Пусть ψ — произвольное аффинное преобразование плоскости, имеющее в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ координатное представление

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + d_1, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + d_2, \end{cases} \qquad (*)$$

причем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Точка плоскости M (x_1, x_2) переводится аффинным преобразованием ψ в точку M' (x_1', x_2'). Если точка M (x_1, x_2) пробегает некоторую прямую l, то координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$Ax_1 + Bx_2 + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0).$$

Точка M' (x_1', x_2') — образ точки M (x_1, x_2) при преобразовании ψ тогда также будет пробегать некоторую прямую l'. Действительно, выражая координаты x_1, x_2 точки M через координаты x_1', x_2' точки M' из формул (*), получим:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a_{22}}{\Delta} x_1' + \frac{-a_{12}}{\Delta} x_2' + f_1, \\ x_2 = \frac{-a_{21}}{\Delta} x_1' + \frac{a_{11}}{\Delta} x_2' + f_2, \\ f_1 = \frac{1}{\Delta}(-a_{22}d_1 + a_{12}d_2), \\ f_2 = \frac{1}{\Delta}(a_{21}d_1 - a_{11}d_2). \end{cases} \qquad \binom{*}{*}$$

Соотношения $\binom{*}{*}$ есть координатное представление обратного к ψ аффинного преобразования ψ^{-1} в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

Так как координаты точки $M(x_1, x_2)$ удовлетворяют уравнению

$$Ax_1 + Bx_2 + C = 0,$$

то координаты $M'(x_1', x_2')$ удовлетворяют уравнению

$$A'x_1' + B'x_2' + C' = 0,$$

где

$$A' = \frac{1}{\Delta}(Aa_{22} - Ba_{21}), \ B' = \frac{1}{\Delta}(-Aa_{12} + Ba_{11}),$$

$$C' = C + Af_1 + Bf_2.$$

Если бы $A'^2 + B'^2 = 0$, то однородная система относительно чисел A и B:

$$\begin{cases} Aa_{22} - Ba_{21} = 0, \\ Aa_{12} + Ba_{11} = 0, \end{cases}$$

имея определитель

$$\begin{vmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} \neq 0,$$

обладала бы лишь нулевым решением $A = B = 0$. Это невозможно, так как по условию $A^2 + B^2 \neq 0$. Следовательно, уравнение

$$A'x_1' + B'x_2' + C' = 0$$

определяет некоторую прямую l'.

Аффинное преобразование ψ переводит прямую l в прямую l', а обратное к нему аффинное преобразование ψ^{-1} переводит прямую l' в прямую l, в чем легко убедиться, подставляя вместо координат x_1', x_2' точки M' в уравнение

$$A'x_1' + Bx_2' + C' = 0$$

их выражения через координаты x_1, x_2 точки M из формулы (*).

Так как ψ и ψ^{-1} — взаимно однозначные отображения плоскости, то отсюда следует, что образом прямой l при преобразовании ψ служит вся прямая l'.

Пусть теперь l_1 и l_2 — две параллельные прямые. Тогда их образы при аффинном преобразовании, очевидно, параллельны. В противном случае точке пересечения образов прямых l_1 и l_2 должна была бы соответствовать (в силу взаимной однозначности аффинного преобразования ψ) общая точка прямых l_1 и l_2, что невозможно, так как l_1 и l_2 параллельны.

Теорема доказана.

Пусть l — произвольная прямая на плоскости. Для трех точек A, B, C, лежащих на этой прямой, введем понятие простого отношения $(A, B; C)$. *Под простым отношением* $(A, B; C)$ будем понимать число

$$(A,\ B;\ C) = \pm \frac{|AC|}{|BC|}, \qquad ({}_*{}^*{}_*)$$

где $|AC|$ и $|BC|$ — длины отрезков AC и BC; знак плюс в формуле $({}_*{}^*{}_*)$ берется, если векторы $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ совпадают по направлению, и знак минус, если эти векторы направлены в противоположные стороны.

Точки A и B в указанном отношении называются *основными*, а точка C — *делящей*. Простое отношение $(A, B; C)$ трех точек A, B, C часто записывают так:

$$(A,\ B;\ C) = \frac{AC}{BC},$$

понимая под AC и BC проекции векторов $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ на ось l, которая получается из прямой l, если на последней выбрано определенное направление. Легко видеть, что простое отношение трех точек A, B, C не изменится, если направление оси l заменить противоположным.

Если делящая точка C лежит внутри отрезка AB, то простое отношение $(A, B; C)$ отрицательно; если же точка C лежит вне отрезка AB, то число $(A, B; C)$ положительно. Если делящая точка C пробегает монотонно прямую l в направлении от точки A к точке B, то простое отношение сначала монотонно убывает от $+1$ до $-\infty$, затем терпит разрыв, когда C совпадает с точкой B, и при перемещении точки C за точкой B монотонно убывает от $+\infty$ до $+1$. Графически это изображено на рис. 67. Заметим, что точке A отвечает $(A, B; A) = 0$, а точке B — $(A, B; B) = \pm\infty$.

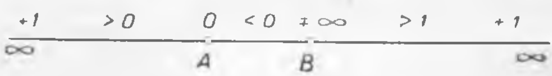


Рис. 67

Легко видеть, что если точки A и B фиксированы, то положение точки C на прямой l полностью определяется числом

$$\lambda = (A,\ B;\ C).$$

Поэтому число λ_C может быть принято за координату точки C на прямой l.

Теорема 2. *При аффинном преобразовании простое отношение трех точек, лежащих на любой прямой, не изменяется.*

Доказательство. Так как при параллельных переносах простое отношение трех точек, расположенных на любой прямой, не меняется, то достаточно установить справедливость теоремы лишь для центроаффинных преобразований.

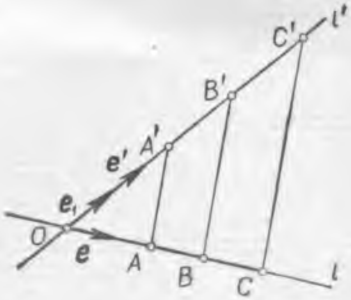


Рис. 68

Итак, пусть

$$\boldsymbol{r}' = \varphi\ (\boldsymbol{r})$$

— произвольное центроаффинное преобразование радиус-векторов, начало которых находится в некоторой точке O.

Рассмотрим сначала случай, когда точки A, B, C лежат на прямой l, проходящей через точку O (см. рис. 68). Пусть линейное преобразование φ переводит прямую l в прямую l', а точки A, B,C — соответственно в точки A', B', C'. Обозначим через $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}_1$ единичные векторы на прямых l и l' (см. рис. 68). Если $\boldsymbol{e}'$ — образ вектора $\boldsymbol{e}$, то $\boldsymbol{e}'$ лежит на прямой l' и потому

$$\boldsymbol{e}' = \mu \boldsymbol{e}_1,$$

где $\mu \neq 0$ — некоторое число. Так как при аффинном преобразовании прямые переходят в прямые, то точки A', B', C' лежат на прямой l' и имеют место соотношения:

$$\overline{OA'} = \varphi\ (\overline{OA}),$$
$$\overline{OB'} = \varphi\ (\overline{OB}),$$
$$\overline{OC'} = \varphi\ (\overline{OC}).$$

Пусть α, β, γ — проекции векторов $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ на ось l, которая получается из прямой l, если на l фиксировать направление, соответствующее орту $\boldsymbol{e}$. Тогда

$$\overline{OA} = \alpha \boldsymbol{e},$$
$$\overline{OB} = \beta \boldsymbol{e},$$
$$\overline{OC} = \gamma \boldsymbol{e}.$$

Отсюда

$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = (\gamma - \alpha)\,\boldsymbol{e},$$
$$\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = (\gamma - \beta)\,\boldsymbol{e}.$$

Следовательно, проекции векторов $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ на ось l таковы:

$$AC = \gamma - \alpha,$$
$$BC = \gamma - \beta.$$

Аналогично

$$A'C' = \mu(\gamma - \alpha),$$
$$B'C' = \mu(\gamma - \beta)$$

— проекции векторов $\overline{A'C'}$, $\overline{B'C'}$ на ось l'. Последняя ось получается из прямой l', если направление на ней такое же, как и у вектора e'.

Отсюда

$$(A', B'; C') = \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{\mu(\gamma - \alpha)}{\mu(\gamma - \beta)} = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} = \frac{AC}{BC} = (A, B; C).$$

Теорема доказана для точек, расположенных на прямых, проходящих через точку O. Пусть теперь m — прямая, не проходящая через точку O. Проведем через точку O прямую l, параллельную m. Через точки A, B, C прямой m проведем прямые p, q, r, параллельные между собой (см. рис. 69). Точки пересечения прямых p, q, r с прямой l обозначим A_1, B_1, C_1.

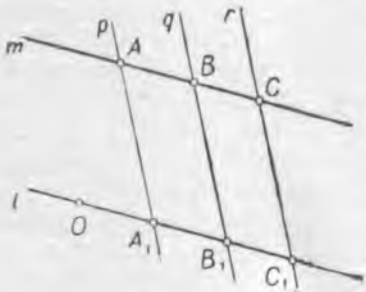


Рис. 69

Очевидно,

$$(A, B; C) = \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = (A_1 B_1; C_1).$$

Центроаффинное преобразование φ переводит параллельные прямые в параллельные, поэтому если A', B', C'; A_1', B_1', C_1' — образы точек A, B, C; A_1, B_1, C_1 относительно этого преобразования, то прямые m' и l' параллельны, прямая l' проходит через точку O, и, наконец, прямые $A'A_1'$; $B'B_1'$; $C'C_1'$ параллельны (см. рис. 70). Поэтому $(A', B'; C') = (A_1', B_1'; C_1') = (A_1, B_1; C_1) = (A, B; C)$. Теорема полностью доказана.

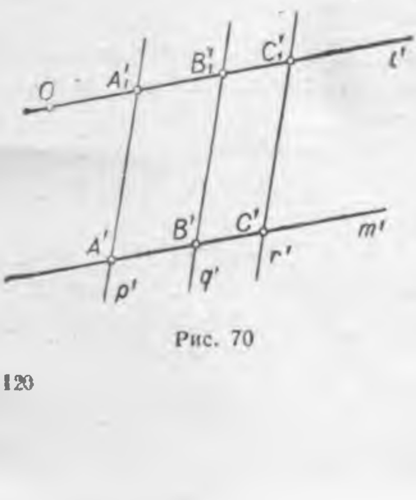


Рис. 70

§ 5. Основные теоремы теории аффинных преобразований

Теорема 1. *Существует одно и только одно аффинное преобразование, которое три точки O, A, B, не лежащие на одной прямой, переводит в три произвольные точки O', A', B', также не лежащие на одной прямой.*

Доказательство. Фиксируем на плоскости базис, состоящий из векторов

$$\boldsymbol{e}_1 = \overline{OA}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \overline{OB}.$$

Тогда координаты точек O, A, B таковы:

$$O(0,0), \quad A(1,0), \quad B(0,1).$$

Обозначим через (ξ_1, ξ_2), (α_1, α_2), (β_1, β_2) координаты точек O', A', B' относительно базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$.

Предположим, что существует аффинное преобразование, переводящее точку O в O', A в A' и B в B'. Обозначим через

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + d_1, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + d_2 \end{cases} \qquad (*)$$

координатное представление этого преобразования в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Подставляя в формулы (*) координаты точек O, A, B; O', A', B', получим:

$$\begin{aligned} &\xi_1 = d_1, && \xi_2 = d_2 \\ &\alpha_1 = a_{11} + d_1, && \alpha_2 = a_{21} + d_2, \\ &\beta_1 = a_{12} + d_1, && \beta_2 = a_{22} + d_2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &a_{11} = \alpha_1 - \xi_1, && a_{12} = \beta_1 - \xi_1, && d_1 = \xi_1, \\ &a_{21} = \alpha_2 - \xi_2, && a_{22} = \beta_2 - \xi_2, && d_2 = \xi_2. \end{aligned}$$

Преобразование плоскости, заданное относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ соотношениями

$$\begin{cases} x_1' = (\alpha_1 - \xi_1)\, x_1 + (\beta_1 - \xi_1)\, x_2 + \xi_1, \\ x_2' = (\alpha_2 - \xi_2)\, x_1 + (\beta_2 - \xi_2)\, x_2 + \xi_2, \end{cases} \qquad (*)$$

как нетрудно видеть, переводит точку O $(0, 0)$ в точку O' (ξ_1, ξ_2), точку A $(1, 0)$ — в точку A' (α_1, α_2) и точку B $(0,1)$ — в точку B' (β_1, β_2). Формулы (*), как мы знаем, определяют либо линейное невырожденное, либо линейное вырожденное преобразование совокупности радиус-векторов с началом в точке O $(0, 0)$ во множество радиус-векторов с началом в точке O' (ξ_1, ξ_2). Во втором случае формулы (*) отображают всю плоскость в одну прямую. Так как векторы $\overline{O'A'}$ и $\overline{O'B'}$ неколлинеарны, то преобразование векторов, порождаемое формулами (*), линейное невырожденное и потому

$$\begin{vmatrix} \alpha_1-\xi_1 & \beta_1-\xi_1 \\ \alpha_2-\xi_2 & \beta_2-\xi_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Таким образом, согласно теореме 3 § 2 гл. II преобразование (*), переводящее точку O в точку O', точку A в точку A' и точку B в точку B', есть аффинное преобразование.

Легко видеть, что всякое аффинное преобразование

$$x_1' = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + h_1,$$
$$x_2' = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + h_2,$$

переводящее точки O, A, B соответственно в точки O', A', B', таково, что

$$b_{11} = \alpha_1 - \xi_1, \quad b_{12} = \beta_1 - \xi_1, \quad h_1 = \xi_1,$$
$$b_{21} = \alpha_2 - \xi_2, \quad b_{22} = \beta_2 - \xi_2, \quad h_2 = \xi_2.$$

Поэтому существует одно и только одно аффинное преобразование, которое переводит любую наперед заданную тройку точек O, A, B, не лежащих на одной прямой, соответственно в точки O', A', B', которые также взяты произвольными и не лежат на одной прямой.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Пусть на плоскости введены координаты с помощью произвольного базиса e_1, e_2. Пусть, далее, O' (ξ_1, ξ_2), A' (α_1, α_2), B' (β_1, β_2) — три точки, не лежащие на одной прямой. Тогда*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1-\xi_1, & \beta_1-\xi_1 \\ \alpha_2-\xi_2, & \beta_2-\xi_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Действительно, рассмотрим аффинное преобразование, переводящее точки (0, 0), (1, 0), (0, 1) соответственно в точки O', A', B'. Выше это преобразование было задано в координатном представлении относительно базиса e_1, e_2 (см. доказательство теоремы 1 настоящего параграфа). Это представление имело вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = (\alpha_1 - \xi_1)\, x_1 + (\beta_1 - \xi_1)\, x_2 + \xi_1, \\ x_2' = (\alpha_2 - \xi_2)\, x_1 + (\beta_2 - \xi_2)\, x_2 + \xi_2. \end{array} \right. \qquad \left({* \atop *}\right)$$

Так как соотношения $\left({* \atop *}\right)$ задают аффинное преобразование, то

$$\begin{vmatrix} \alpha_1-\xi_1 & \beta_1-\xi_1 \\ \alpha_2-\xi_2 & \beta_2-\xi_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следствие доказано.

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы взаимно однозначное отображение φ плоскости на себя было аффинным, необходимо и достаточно, чтобы оно переводило прямые в прямые.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условия этой теоремы есть простое следствие теоремы 1 § 4 гл. II.

Перейдем к доказательству достаточности условия теоремы. Пусть ψ — взаимно однозначное отображение плоскости на себя, при котором прямые переходят в прямые. Отметим прежде всего два важных свойства преобразования ψ.

а) *Преобразование ψ переводит параллельные прямые в параллельные.*

б) *Преобразование ψ сохраняет простое отношение трех точек одной прямой.*

Утверждение а) есть непосредственное следствие взаимной однозначности отображения ψ. Действительно, если прямые l' и m' — образы параллельных прямых l и m — пересекаются, то сами параллельные прямые l и m имеют общую точку, что невозможно.

Доказательство утверждения б) значительно сложнее, чем доказательство свойства а). Поэтому мы поместим его после доказательства теоремы 2.

Итак, будем считать, что преобразование ψ обладает свойствами а) и б).

Пусть O, A, B — точки, не лежащие на одной прямой, тогда они переходят в три точки O', A', B', также не лежащие на одной прямой. На плоскости выберем базис, состоящий из векторов

$$\boldsymbol{e}_1 = \overline{OA},$$
$$\boldsymbol{e}_2 = \overline{OB},$$

и пусть точка $M(x_1, x_2)$ преобразованием ψ переводится в точку $M'(x_1', x_2')$ (координаты точек M и M' берутся в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$). Тогда x_1' и x_2' есть функции чисел x_1 и x_2:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2), \\ x_2' = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

Для координат точек O', A', B' примем следующие обозначения:

$$\begin{array}{ll} O'(d_1, & d_2), \\ A'(a_{11} + d_1, & a_{21} + d_2), \\ B'(a_{12} + d_1, & a_{22} + d_2). \end{array}$$

Тогда имеют место соотношения:

$$\begin{array}{ll} f_1(0,0) = d_1; & f_2(0, 0) = d_2; \\ f_1(1, 0) = a_{11} + d_1; & f_2(1, 0) = a_{21} + d_2; \\ f_1(0, 1) = a_{12} + d_1; & f_2(0, 1) = a_{22} + d_2. \end{array}$$

Прямая OA преобразованием ψ переводится в прямую $O'A'$, при этом простое отношение трех точек на прямой OA равно простому отношению образов этих точек на прямой $O'A'$.

Пусть $M(x_1, 0)$ — произвольная точка прямой OA и $M'(x_1', x_2')$ — соответствующая ей точка на прямой $O'A'$. Тогда

$$(O, A; M) = (O', A'; M').$$

Но

$$(O,\ A;\ M) = \frac{x_1}{x_1 - 1},$$

так как

$$OA = 1,\ OM = x_1,\ AM = x_1 - 1.$$

Далее,

$$(O',\ A';\ M') = \frac{O'M'}{A'M'} = \frac{O'M'}{O'M' - O'A'} = \frac{f_1(x_1,0) - f_1(0,0)}{f_1(x_1,0) - f_1(1,\ 0)}.$$

Поэтому

$$\frac{f_1(x_1,\ 0) - d_1}{f_1(x_1,0) - a_{11} - d_1} = \frac{x_1}{x_1 - 1}.$$

Отсюда

$$f_1(x_1,0) = a_{11}x_1 + d_1.$$

Совершенно аналогично получаем:

$$f_2(x_1,\ 0) = a_{21}x_1 + d_2;$$
$$f_1(0,\ x_2) = a_{12}x_2 + d_1;\ f_2(0,\ x_2) = a_{22}x_2 + d_2.$$

Пусть теперь M $(x_1,\ x_2)$ — произвольная точка плоскости и M' $(x_1',\ x_2')$— ее образ. Через точку M проведем прямые l_1 и l_2, соответственно параллельные прямым OB и OA (см. рис. 71). Прямая l_1 пересекает OA в точке $M_1(x_1,\ 0)$, а прямая l_2 пересекает OB

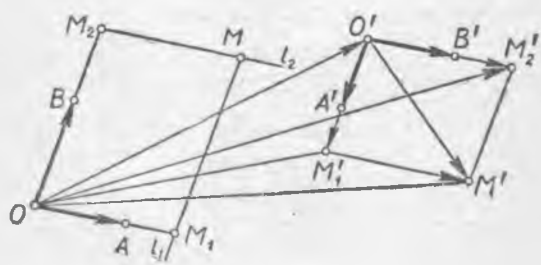


Рис. 71

в точке M_2 $(0,\ x_2)$. Так как преобразование ψ переводит параллельные прямые в параллельные, то четырехугольник $O'M_1'M'M_2'$ есть параллелограмм. Через O', M_1', M', M_2', как обычно, обозначены соответственно образы точек O, M_1, M, M_2. Поэтому

$$\overline{OM'} = \overline{OO'} + \overline{O'M'} = \overline{OO'} + \overline{O'M_1'} + \overline{M_1'M'} = \overline{OM_1'} + \overline{O'M_2'} =$$
$$= \overline{OM_1'} + \overline{OM_2'} - \overline{OO'}.$$

Следовательно,

$$x_1' = f_1(x_1,\ x_2) = f_1(x_1,\ 0) + f_1(0,\ x_2) - f_1(0,0) =$$
$$= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + d_1,$$
$$x_2' = f_2(x_1,\ x_2) = f_2(x_1,\ 0) + f_2(0,\ x_2) - f_2(0,\ 0) =$$
$$= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + d_2.$$

Таким образом, координатное представление преобразования ψ дается формулами:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + d_2, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + d_2, \end{cases}$$

причем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_{11} + d_1) - d_1 & (a_{12} + d_1) - d_1 \\ (a_{21} + d_2) - d_2 & (a_{22} + d_2) - d_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как точки O', A', B' не лежат на одной прямой (см. следствие к теореме 1 § 5 гл. II).

Отсюда следует, что ψ есть аффинное преобразование.

Приведем теперь доказательство утверждения б). Оно основывается на двух леммах.

Лемма 1. *Если ψ есть преобразование плоскости, переводящее прямые в прямые, то середина любого отрезка AB переходит в середину отрезка $A'B'$, где A' и B' — образы точек A и B.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный параллелограмм $AMBN$, для которого отрезок AB является диагональю. Вторая диагональ MN этого параллелограмма пересекает отрезок AB в его середине — точке O. Так как преобразование ψ переводит параллельные прямые в параллельные (см. свойство а)), то параллелограмм $AMBN$ отображением ψ преобразуется в некоторый параллелограмм $A'M'B'N'$, у которого двумя противоположными вершинами будут точки A' и B'; точка пересечения диагоналей O параллелограмма $AMBN$ перейдет в точку пересечения диагоналей параллелограмма $A'B'M'N'$, т. е. в середину отрезка $A'B'$ (рис. 72).

Лемма 1 доказана.

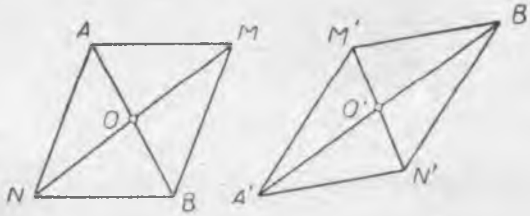


Рис. 72

Лемма 2. *Пусть ψ — преобразование плоскости, переводящее прямые в прямые. Пусть, далее, преобразование ψ переводит точки A и B соответственно в точки A' и B'. Тогда ψ переводит внутренние точки отрезка AB во внутренние точки отрезка $A'B'$.*

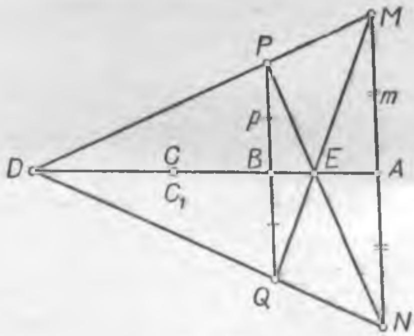


Рис 73.

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что точки прямой AB, внешние по отношению к отрезку AB, переходят в точки прямой $A'B'$, внешние по отношению к отрезку $A'B'$.

Пусть C — точка прямой AB, лежащая вне отрезка AB, причем точка B лежит между C и A. Тогда

$$(A,\ B;\ C) = \frac{AC}{BC} = \lambda > 1.$$

Через точки A и B проведем прямые m и p, параллельные между собой (см. рис. 73); на этих прямых отложим по обе стороны от прямой AB пары равных отрезков

$$MA = AN \text{ и } PB = BQ.$$

Из элементарной геометрии известно, что точка D пересечения боковых сторон трапеции $MNQP$ и точка E пересечения диагоналей той же трапеции лежат на прямой AB, которая проходит через середины оснований трапеции.

Докажем, что, если точка C лежит вне отрезка AB и только в этом случае, отношение длин отрезков AM и BP:

$$\frac{|AM|}{|BP|} = k$$

можно подобрать так, чтобы C была серединой отрезка DE.

Действительно, из подобия треугольников AMD и BPD, AME и BQE вытекает, что

$$k = \frac{|AM|}{|BP|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AD|}{|AD| - |AB|};$$

отсюда

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{k}{k-1}, \quad |AD| = \frac{k}{k-1}|AB|;$$

аналогично

$$k = \frac{|AM|}{|QB|} = \frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|AE|}{|AB| - |AE|},$$

отсюда

$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{k}{k+1}, \quad |AE| = \frac{k}{k+1}|AB|.$$

Пусть C_1 — середина отрезка DE, тогда

$$|AC_1| = \frac{1}{2}(|AD| + |AE|) = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{k-1} + \frac{k}{k+1}\right)|AB| = \frac{k^2}{k^2-1}|AB|.$$

Так как $\frac{k^2}{k^2-1} > 1$, то C_1 лежит вне отрезка DE, причем точка B лежит между C_1 и A. Для числа

$$(A,\ B;\ C) = \lambda > 1,$$

которое однозначно определяет на прямой AB точку C, можно подобрать число k так, чтобы соблюдалось равенство

$$\frac{k^2}{k^2-1}=\lambda.$$

Для этого достаточно положить

$$k^2=\frac{\lambda}{\lambda-1}, \text{ т. е. } k=\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda-1}}.$$

При выбранном нами k точки C_1 и C совпадут. В дальнейшем будем считать, что отношение отрезков

$$\frac{|AM|}{|BP|}=k=\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda-1}}.$$

Под действием преобразования ψ параллельные прямые m и p, проходящие через точки A и B, переходят в параллельные прямые m' и p', проходящие соответственно через точки A' и B'. Далее, точки M и N прямой m и точки P и Q прямой p переходят в точки M' и N' прямой m' и точки P', Q' прямой p' такие, что A' есть середина $M'N'$ и B' — середина $P'Q'$ (это вытекает из леммы 1). Прямые MP и NQ, MQ и NP переходят в прямые $M'P'$ и $N'Q'$, $M'Q'$ и $N'P'$; таким образом, точки D и E преобразованием ψ переводятся в точки пересечения боковых сторон и диагоналей трапеции, изображенной на рис. 74. Середина C отрезка DE переходит в середину C'

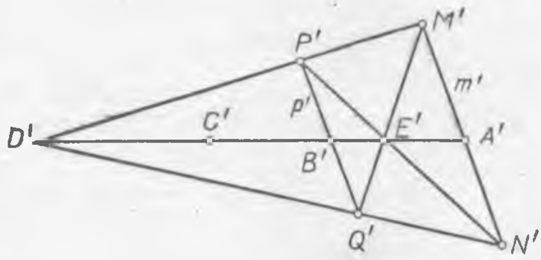


Рис. 74

отрезка $D'E'$. Так как середина отрезка, соединяющего точку пересечения продолжения боковых сторон и точку пересечения ее диагоналей, всегда лежит вне отрезка с концами в серединах оснований трапеции, то внешняя по отношению к отрезку AB точка C будет иметь своим образом точку C', которая лежит вне отрезка AB.

Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству утверждения б). Пусть на прямой l даны три точки A, B, C. Докажем, что если e — единица измерения отрезков и отрезки AC и BCтаковы, что

$$AC=m\cdot\frac{e}{2^n},\ BC=p\cdot\frac{e}{2^n},$$

где m, p, k, n — натуральные числа, то

$$(A',\ B';\ C')=(A,\ B;\ C),$$

где A', B', C' — образы точек A, B, C. Из теоремы 2 § 11 гл. I вытекает, что если от единицы измерения длин с помощью масштаба e перейти к новой единице измерения с помощью отрезка e', то отношение длин двух произвольных отрезков a и b не изменится. Поэтому простое отношение трех точек не зависит от того, с помощью какой масштабной единицы проводится измерение длин отрезков.

Для длин отрезков AB и BC справедливы формулы:

$$|AC| = \frac{m}{2^n}, \quad |BC| = \frac{p}{2^k}.$$

Поэтому

$$(A, B; C) = \pm\frac{|AC|}{|BC|} \pm = \frac{m}{p}2^{k-n};$$

знак в формуле выбирается в зависимости от того, лежит ли C внутри отрезка AB или вне его. В первом случае, как мы помним, берется знак минус, а во втором — знак плюс.

Если AC—отрезок прямой AB, конгруэнтный отрезку $m\cdot\frac{e}{2^n}$, и $A'C'$—его образ на прямой $A'B'$, то из лемм 1 и 2 следует, что точка C' лежит внутри или вне отрезка $A'B'$ в зависимости от того, лежит ли точка C внутри или вне отрезка AB. Поэтому знак простого отношения $(A', B'; C')$ совпадает со знаком $(A, B; C)$. Далее, если на прямой $A'B'$ в качестве единицы масштаба выбрать отрезок e', то

$$A'C' \equiv m\cdot\frac{e'}{2^n}; \quad B'C' \equiv p\cdot\frac{e'}{2^k}.$$

Поэтому

$$(A', B'; C') = \pm\frac{m}{p}\,2^{k-n}.$$

Следовательно,

$$(A', B'; C') = (A, B; C),$$

и утверждение б) для двоичных отрезков доказано. Для общего случая доказательство осуществляется с помощью предельного перехода, так же как это было сделано в § 11 гл. I при доказательствах теорем о свойствах длины отрезка.

Из установленных в этом параграфе теорем вытекают важные следствия:

1. *Аффинное преобразование плоскости можно определить как преобразование плоскости, переводящее прямые в прямые. Это определение наиболее геометрично и о нем прежде всего шла речь в § 1 гл. II, когда вводилось понятие аффинного преобразования.*

Однако более простой и наглядный способ изучения аффинных преобразований — тот, который изложен в этой главе. Поэтому мы и придерживались его.

2. С каждой тройкой точек O, A, B, не лежащих на одной прямой, связывается базис, состоящий из векторов $e_1 = \overline{OA}$, $e_2 = \overline{OB}$.

Из теоремы 1 вытекает, что аффинное преобразование однозначно определяется, если известно, в какой базис e_1', e_2' переводится данный базис e_1, e_2; при этом *любой базис* e_1, e_2 *аффинным преобразованием может быть переведен в любой наперед заданный базис* e_1', e_2'.

Отсюда следует, что *с точки зрения аффинных преобразований все базисы равноправны. Поэтому при аффинных преобразованиях не сохраняются длины отрезков и углы между прямыми.*

§ 6. Аффинная геометрия

1. Предмет аффинной геометрии. Свойства геометрических фигур, инвариантные относительно всех аффинных преобразований плоскости, называются *аффинными*. Отдел геометрии, изучающий эти свойства, называется *аффинной геометрией*. Так как совокупность аффинных преобразований на плоскости образует группу, то *аффинную геометрию можно определить также как теорию инвариантов группы аффинных преобразований*.

К понятиям аффинной геометрии, очевидно, относятся понятия точки, прямой, треугольника. Понятие окружности уже не является аффинным. Далее, свойство прямых быть параллельными является аффинным, а свойство быть перпендикулярными — аффинным не является. К числу аффинных понятий относится простое отношение трех точек на прямой, отношение площадей параллелограммов и, вообще, отношение площадей любых геометрических фигур. Отсюда следует, что аффинными являются понятия середины отрезка, медианы треугольника, точки пересечения медиан, равновеликих фигур, так как эти понятия сводятся к указанным выше аффинным понятиям.

Далее, понятие центра симметрии некоторой фигуры (см. рис. 75) определяется через понятие середины отрезка и потому является аффинным. Понятие же оси симметрии основано на перпендикулярности прямых и потому аффинным не является (см. рис. 76). Понятие треугольника, очевидно, является аффинным. Но свойство тре-

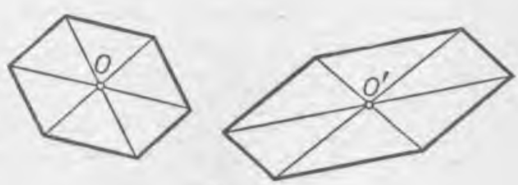


Рис. 75.

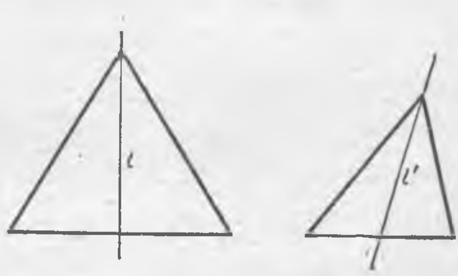


Рис. 76

угольника быть равнобедренным или прямоугольным уже не является аффинным. Более того, в аффинной геометрии понятие треугольника нельзя расщепить на какие-нибудь более частные понятия, т. е. нельзя выделить какие-либо специальные классы треугольников. Действительно, в силу теоремы 1 § 5 каждый треугольник может быть переведен аффинным преобразованием в любой другой треугольник.

Две фигуры будем называть *аффинно эквивалентными,* если одну из них можно перевести в другую аффинным преобразованием. Так как совокупность аффинных преобразований образует группу, то отсюда легко следует, что отношение аффинной эквивалентности обладает свойствами рефлексивности, симметрии и транзитивности. Поэтому все фигуры на плоскости распадаются на попарно непересекающиеся классы аффинно эквивалентных фигур, которые мы будем называть *аффинными классами*. Очевидно, каждый аффинный класс определяется однозначно указанием какой-нибудь фигуры, принадлежащей этому классу.

Так как все треугольники аффинно эквивалентны, то они принадлежат все одному аффинному классу и, следовательно, аффинно неразличимы.

В евклидовой геометрии роль аффинных классов играют классы конгруэнтных фигур (см. § 10 гл. I). В евклидовой геометрии совокупность треугольников разбивается на бесконечное множество различных классов конгруэнтных треугольников. Каждый такой класс определяется, например, заданием сторон треугольника.

Рассмотрим вопрос об аффинной классификации четырехугольников. Отметим прежде всего, что свойство четырехугольника быть параллелограммом является аффинным, поскольку при аффинных преобразованиях параллельные прямые переходят в параллельные. С другой стороны, все параллелограммы аффинно эквивалентны между собой. Действительно, для того чтобы аффинно преобразовать параллелограмм $ABCD$ в параллелограмм $A'B'C'D'$, достаточно аффинно преобразовать треугольник ABD в треугольник $A'B'D'$, что всегда возможно в силу теоремы 1 § 5. Таким образом, совокупность параллелограммов образует аффинный класс и, стало быть, никакие частные виды параллелограммов, как например ромб, квадрат или прямоугольник, в аффинной геометрии не существуют.

Отметим без доказательства, что совокупность всех четырехугольников распадается на бесконечное множество аффинных классов. Для того чтобы выделить какой-нибудь из аффинных классов четырехугольников, достаточно фиксировать простые отношения

$$\lambda_1 = (A,\ C;\ M) \text{ и } \quad \lambda_2 = (B,\ D;\ M),$$

которые для четырехугольника $ABCD$ (рис. 77) указывают, в каком отношении точка пересечения M диагоналей AC и BD делит эти диагонали.

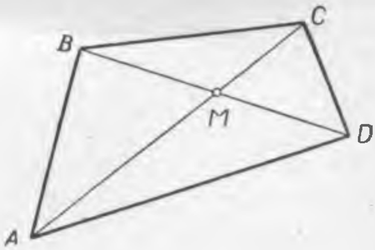


Рис. 77

Рассмотрим теперь, какой аффинный класс фигур определяет окружность. Пусть K — окружность радиуса R с центром в точке O. Выберем на плоскости базис из двух взаимно перпендикулярных единичных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, имеющих начало в точке O. Так как аффинные координаты точек плоскости относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ одновременно являются и декартовыми, то уравнение окружности K имеет вид:

$$x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0.$$

Пусть ψ — произвольное аффинное преобразование плоскости, имеющее относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ координатное представление

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + d_1, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + d_2, \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (*)$$

Окружность K аффинным преобразованием ψ переводится в кривую, имеющую уравнение

$$\Phi(x_1', x_2') = A'x_1'^2 + 2B'x_1'x_2' + C'x_2'^2 + D'x_1' + E'x_2' + F' = 0,$$

где

$$\Phi(x_1', x_2') = \frac{1}{\Delta^2}\left[(a_{22}(x_1' + d_1) - a_{12}(x_2' + d_2))^2 + (-a_{21}(x_1' + d_1) + a_{11}(x_2' + d_2))^2\right] - R^2$$

и

$$\begin{cases} x_1 = [a_{22}x_1' - a_{12}x_2' + a_{22}d_1 - a_{12}d_2]\dfrac{1}{\Delta}, \\ x_2 = [-a_{21}x_1' + a_{11}x_2' - a_{21}d_1 + a_{11}d_2]\dfrac{1}{\Delta} \end{cases}$$

есть обращение формул (*). Как уже отмечалось в § 3, соотношения

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}}{\Delta}x_1' - \dfrac{a_{12}}{\Delta}x_2' + \dfrac{1}{\Delta}[a_{22}d_1 - a_{12}d_2], \\ x_2 = -\dfrac{a_{12}}{\Delta}x_1' + \dfrac{a_{11}}{\Delta}x_2' + \dfrac{1}{\Delta}[-a_{12}d_1 + a_{11}d_2] \end{cases}$$

представляют собой координатное представление преобразования ψ^{-1}, обратного к ψ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Образ окружности K при аффинном преобразовании ψ представляет собой кривую второго порядка. Так как

$$A'C' - B'^2 = (a_{22}^2 + a_{21}^2)(a_{12}^2 + a_{11}^2) - \\ - (a_{22}a_{12} + a_{21}a_{11})^2 = a_{11}^2 a_{22}^2 + a_{12}^2 a_{21}^2 - \\ - 2a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}^2 > 0,$$

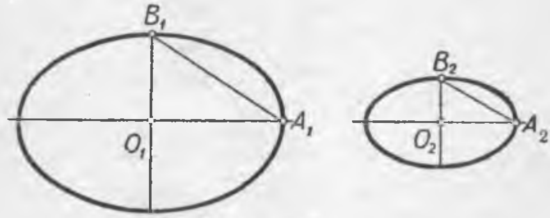


Рис. 78

то кривая K' — образ кривой K — представляет собой эллипс.

Аналогично устанавливается, что образ эллипса при любом аффинном преобразовании снова есть эллипс. Далее, пусть K_1 и K_2 — два эллипса (рис. 78). Обозначим через O_1 и O_2 центры симметрии этих эллипсов, а через A_1 и B_1, A_2 и B_2 вершины их большой и малой осей. Очевидно, что если аффинное преобразование ψ треугольник $O_1A_1B_1$ переводит в треугольник $O_2A_2B_2$ и при этом

$$O_2 = \psi(O_1), \; A_2 = \psi(A_1), \; B_2 = \psi(B_1),$$

то эллипс K_1 переводится аффинным преобразованием ψ в эллипс K_2. Отсюда, благодаря теореме 1 § 5, получаем, что любые два эллипса могут быть совмещены друг с другом аффинным преобразованием.

Таким образом, *окружность определяет аффинный класс, состоящий из всех эллипсов. С точки зрения аффинной геометрии, окружность и эллипс неразличимы.*

В евклидовой геометрии класс конгруэнтных между собой эллипсов определяется заданием большой оси и эксцентриситета. Отсюда ясно, что аффинный класс, включающий в себя все эллипсы, при переходе к евклидовой геометрии распадается на бесконечное множество классов конгруэнтных эллипсов в зависимости от размера большой оси эллипса и величины его эксцентриситета.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что все гиперболы объединяются в один аффинный класс, который может быть задан произвольной гиперболой, а все параболы — в один аффинный класс, который может быть задан произвольной параболой.

2. Об аксиоматическом построении аффинной геометрии. До сих пор мы рассматривали аффинные преобразования точек евклидовой плоскости. Основные объекты евклидовой геометрии на плоскости (точки и прямые) остаются инвариантными при аффинных преобразованиях и, следовательно, принадлежат аффинной геометрии. Из свойств аффинных преобразований, которые были изучены в §§ 1—5, вытекает, что при аффинных преобразованиях сохраняются отношения принадлежности между точками и прямыми, отношение порядка между точками любой прямой и, наконец, отношение параллельности прямых. Далее, как нетрудно проследить, все утверждения, заключенные в аксиомах связи, порядка, непрерывности и параллельности для евклидовой геометрии, относятся к аффинной геометрии, и только отношение конгруэнтности вместе с аксиомами конгруэнтности уже не являются объектами аффинной геометрии.

Это естественно приводит к построению аксиоматики аффинной геометрии. Ниже мы в кратких чертах намечаем аксиоматическое построение аффинной геометрии.

А) *Аксиомы аффинной геометрии* состоят из четырех групп:

1. Аксиомы связи.
2. Аксиомы порядка.
3. Аксиомы параллельности.
4. Аксиомы непрерывности.

Ниже приводится полный список этих аксиом для случая аффинной геометрии на плоскости.

1. Аксиомы связи

1.1. Через любые две различные точки A и B проходит одна и только одна прямая.

1.2. На каждой прямой существуют по крайней мере две точки.

1.3. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

2. Аксиомы порядка

2.1. Если точка C лежит между точками A и B, то A, B, C — различные точки одной прямой и C лежит также между B и A.

2.2. Каковы бы ни были точки A и B, на прямой AB существует по крайней мере одна точка C такая, что B лежит между A и C.

2.3. Среди любых трех точек прямой существует не более одной, лежащей между двумя другими.

2.4. (Аксиома Паша.) Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и a — некоторая прямая, не проходящая через точки A, B, C. Тогда если прямая a проходит через внутреннюю точку отрезка AB, то она проходит также либо через внутреннюю точку отрезка AC, либо через внутреннюю точку отрезка BC.

3. Аксиомы параллельности

3.1. (Аксиома Евклида.) Через точку A, не принадлежащую прямой a, проходит одна и только одна прямая a', параллельная прямой a. (Прямые a и a' называются параллельными, если они не имеют общих точек.)

3.2. (Аксиома Дезарга.) Если прямые AA' и BB' параллельны прямой CC', прямая AB параллельна прямой $A'B'$, а прямая BC — пря-

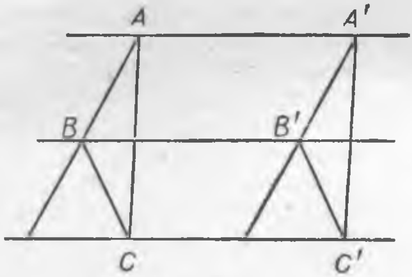


Рис. 79

мой $B'C'$ (рис. 79), то прямая AC параллельна прямой $A'C'$.

4. Аксиома непрерывности

4.1. (Принцип Дедекинда.) На основании аксиом связи и порядка, как было показано в § 5 гл. I, на произвольной прямой a вводится отношение предшествования.

Пусть точки прямой a разбиты на два непустых класса K_1 и K_2 и притом так, что любая точка первого класса предшествует любой точке второго класса и каждая точка прямой попадает в один и только один класс; тогда либо в первом классе есть точка A_0, следующая за всеми точками этого класса и предшествующая всем точкам второго класса, либо во втором классе есть точка A_0, обладающая тем же свойством.

Про точку A_0 говорят, что она производит сечение точек прямой.

Утверждение аксиомы Дезарга в евклидовой геометрии является несложной теоремой. Оно устанавливается с помощью признаков конгруэнтности треугольников. Однако без привлечения аксиом конгруэнтности это утверждение доказано быть не может. Поэтому в аффинной геометрии на плоскости его принимают как аксиому.

Аксиома Дезарга, как мы увидим ниже, играет при построении аффинной геометрии примерно такую же роль, какую в евклидовой геометрии играют признаки конгруэнтности треугольников.

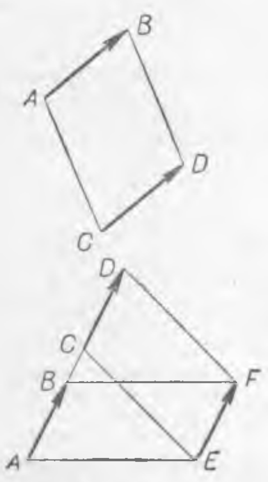


Рис. 80

Б) Вектор в аффинной геометрии определяется так же, как и в евклидовой; именно *вектором* $\overline{AB}$ называется направленный отрезок AB, у которого точка A называется *началом*, а точка B — *концом*. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *равными*, если четырехугольник $ABDC$ является параллелограммом, т. е. если прямые AB и CD, AC и BD соответственно параллельны. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, лежащие на одной прямой a, называются равными, если существует третий вектор $\overline{EF}$, не лежащий на прямой a, равный каждому из векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ (рис. 80).

Согласно приведенному определению равенства векторов имеем, что если

$$\overline{AB} = \overline{CD},$$

то

$$\overline{AB} \neq \overline{DC}.$$

Из определения равенства векторов легко вытекает, что это отношение равенства обладает свойствами рефлексивности, симметрии и транзитивности. Последнее утверждение есть непосредственное следствие аксиомы Дезарга в применении к треугольникам ACE и BDF (рис. 81).

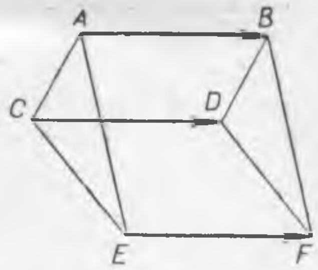


Рис. 81

С помощью равных векторов легко строится *понятие умножения вектора на натуральное число m*. Именно если $\boldsymbol{r} = \overline{A_0A_1}$ — данный вектор, то под вектором $m\boldsymbol{r}$ понимают вектор $\overline{A_0A_m}$, получающийся последовательным приложением векторов $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, ... , $\overline{A_{m-1}A_m}$, равных между собой и лежащих на одной прямой A_0A_1 (рис. 82). Вектор $\overline{BA}$, получающийся из вектора $\overline{AB}$ переменой роли начала и конца, называется вектором, *противоположным* вектору $\overline{AB}$, и обозначается так:

$$\overline{BA} = -\overline{AB}.$$

Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают. Такие векторы отождествляют с точками. По определению все нулевые векторы равны между собой.

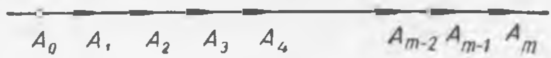


Рис. 82

Пусть теперь $\boldsymbol{r}$ — произвольный вектор. Тогда, используя понятия умножения вектора на натуральное число, противоположного вектора и нулевого вектора, получаем *правило умножения вектора* $\boldsymbol{r}$ *на произвольное целое число* n:

$$n\boldsymbol{r} = \begin{cases} n\boldsymbol{r}, \text{ если } n > 0, \\ \text{нулевому вектору, если } n = 0, \\ -|n|\boldsymbol{r}, \text{ если } n < 0. \end{cases}$$

Введем теперь понятие суммы векторов. Пусть $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ — два произвольных вектора. Рассмотрим векторы $\overline{OE}$ и $\overline{OF}$, исходящие из одной точки O и равные соответственно векторам $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ (см. рис. 83). Пусть $OEGF$ — параллелограмм, построенный на векторах $\overline{OE}$ и $\overline{OF}$. Вектор $\overline{OG}$ называется *суммой* векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$. Используя определение равенства векторов и аксиому Дезарга, легко установить, что определение суммы векторов не зависит от выбора начала векторов $\overline{OE}$ и $\overline{OF}$.

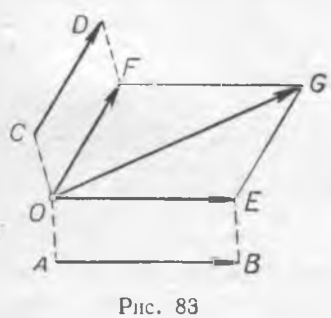


Рис. 83

Разностью векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, естественно, называют сумму векторов $\overline{AB}$ и $-\overline{CD}$.

В) Далее, используя определение равенства векторов и аксиому Дезарга, устанавливается, что каждый вектор можно разделить пополам. Другими словами, для всякого вектора $\boldsymbol{r}$ существует вектор $\boldsymbol{r}_1$ такой, что

$$2\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}.$$

После этого для каждого отрезка AB можно определить его середину — точку C. Именно C — такая внутренняя точка отрезка AB, что

$$\overline{AC} = \overline{CB}$$

и

$$2\overline{AC} = \overline{AB}.$$

Далее, основываясь на принципе Дедекинда, мы можем, фиксировав на каждой прямой некоторый масштабный отрезок, точно так же, как это было сделано в § 11 гл. I, решить задачу об измерении длин отрезков на каждой прямой. Напомним, что принцип Дедекинда эквивалентен аксиомам Архимеда и Кантора лишь при условии, что для отрезков, лежащих на одной прямой, введено понятие конгруэнтности. Это обстоятельство весьма существенно, так как все построения § 11 опирались непосредственно на аксиомы Архимеда и Кантора. Для отрезков AB и CD, лежащих на одной прямой или параллельных прямых, понятие конгруэнтности вводится так: отрезки AB и CD называются *конгруэнтными*:

$$AB = CD,$$

если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны или противоположны. *Отметим, что отношение конгруэнтности отрезков можно ввести только для отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых. Для отрезков, лежащих на пересекающихся прямых, такое отношение ввести нельзя — в этом состоит принципиальное отличие аффинной геометрии от евклидовой.*

Для отрезков, лежащих на параллельных прямых, выберем единый масштабный отрезок. Тогда для этих отрезков определена длина $l(a)$, т. е. функция отрезка a, удовлетворяющая условиям:

1) $l(a) > 0$ для любого отрезка a,
2) $l(a) = l(b)$, если отрезки a и b конгруэнтны,
3) $l(a + b) = l(a) + l(b)$.

Сумма отрезков a и b строится следующим образом: на фиксированной прямой из данного семейства параллельных прямых строим отрезок AB, конгруэнтный a, а затем отрезок BC, конгруэнтный b, причем точка B лежит между A и C; отрезок AC и принимается за сумму отрезков a и b.

Г) *Длиной вектора* $\overline{AB}$ называется число $|AB|$, равное длине отрезка AB.

После этого *умножение вектора на любое вещественное число* определяется так: пусть $\overline{AB}$ — произвольный ненулевой вектор, а λ — любое вещественное число, тогда под вектором $\lambda \cdot \overline{AB}$ понимаем вектор $\overline{AC}$ такой, что длина вектора $\overline{AC}$ равна длине $\overline{AB}$, умноженной на число λ, и точка C лежит с B по одну или по разные стороны от A, если соответственно $\lambda > 0$ или $\lambda < 0$. Если $\lambda = 0$, то $\overline{AC}$ есть нулевой вектор.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число, как легко проверить, удовлетворяют обычным законам векторной алгебры:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{a} + 0 = \boldsymbol{a},$$
$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c},$$
$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = 0,$$
$$\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}, \ (\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}.$$

Базисом называется любая пара векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, имеющих общее начало — точку O и неколлинеарных между собой. (Так же, как и в евклидовой геометрии, векторы неколлинеарны, если они не лежат на параллельных прямых. Нулевой вектор всегда считается коллинеарным любому вектору. Поэтому элементы базиса — всегда ненулевые векторы.)

Имеет место следующая о с н о в н а я т е о р е м а:

Всякий вектор $\boldsymbol{r}$ *единственным образом разлагается в сумму*

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2;$$

векторы $x_1\boldsymbol{e}_1$ и $x_2\boldsymbol{e}_2$ называются *компонентами вектора* $\boldsymbol{r}$ *относительно базиса* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, а числа x_1 и x_2— проекциями вектора $\boldsymbol{r}$ на векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

Вектор $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$, имеющий начало в точке O (рис. 84), называется *радиус-вектором*. Проекции радиус-вектора называются его *координатами* и для радиус-векторов применяем запись:

$$\boldsymbol{r} = \overline{OM} = \{x_1, \ x_2\}.$$

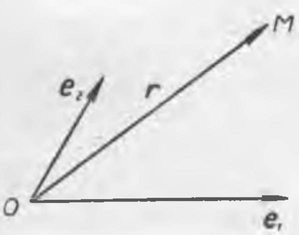


Рис. 84

С каждой точкой M аффинной плоскости после выбора базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ с началом в точке O взаимно однозначно связан радиус-вектор

$$\boldsymbol{r} = \overline{OM}.$$

Координаты x_1, x_2 этого радиус-вектора принимаются за *координаты точки* M, что записываем, как обычно: $M\ (x_1, \ x_2)$.

После того как введены координаты точек, легко доказывается, что проекции любого вектора на векторы базиса равны разностям соответствующих координат конца и начала вектора.

Вслед за этим определяем линейные преобразования радиус-векторов, аффинные преобразования точек плоскости и строим всю теорию, развитую в §§ 1—5 гл. II.

Поскольку все утверждения аксиом аффинной геометрии инвариантны относительно группы аффинных преобразований, то мы и приходим к тому, что аффинная геометрия есть теория инвариантов аффинной группы преобразований.

§ 7. Ортогональные преобразования. Евклидова геометрия

Как было выяснено в § 6, аффинная геометрия представляет собой теорию инвариантов группы аффинных преобразований $\mathcal{A}$. Переход от аффинной геометрии к евклидовой, основанный на теоретико-групповых построениях, сводится к выделению внутри $\mathcal{A}$ такой ее собственной подгруппы H, что преобразования из H оставляют инвариантной некоторую числовую функцию пары векторов. Преобразования, входящие в H, обычно называются *ортогональными*, а упомянутая выше функция — *скалярным произведением* векторов.

Таким образом, ортогональные преобразования, которые в евклидовой геометрии будут играть роль движений, представляют собой аффинные преобразования плоскости, подчиненные дополнительному условию: они сохраняют неизменной некоторую числовую величину — скалярное произведение. Как мы увидим, скалярное произведение не является инвариантом всей группы $\mathcal{A}$. Приступим к соответствующим построениям.

Фиксируем на плоскости базис из неколлинеарных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, имеющих начало в точке O. В дальнейшем через $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$ будем обозначать радиус-векторы с началом в точке O и концом в точке M. Координаты точки M и радиус-вектора $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$ одинаковы. Ниже применяются обозначения, которые были уже использованы в главе II:

$$\boldsymbol{r} = \overline{OM} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2; \quad \boldsymbol{r} = \{x_1, x_2\}; \; M \; (x_1, x_2).$$

Числовую функцию пары векторов $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ мы будем называть ***скалярным произведением*** *и обозначать $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$, если она удовлетворяет следующим условиям.*

1. $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r})$ *(условие симметрии).*
2. $(\lambda\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) = \lambda(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$, *где λ—произвольное вещественное число.*
3. $(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{s}) + (\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{s})$.
4. *Скалярное произведение вектора с самим собой неотрицательно: $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) \geqslant 0$, и обращается в нуль, лишь если $\boldsymbol{r}$ есть нулевой вектор.*

Из симметрии скалярного произведения и свойств 2 и 3 вытекает, что скалярное произведение обладает еще следующими свойствами:

$$(\boldsymbol{r},\ \lambda \boldsymbol{s}) = (\lambda \boldsymbol{s},\ \boldsymbol{r}) = \lambda (\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{r}) = \lambda (\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s}),$$

где λ — произвольное вещественное число и

$$(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2) = (\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s}_1) + (\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s}_2).$$

Пусть $\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{s} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2$—разложения векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$ по базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Тогда, используя свойства скалярного произведения, получим:

$$(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s}) = (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2,\ y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2) = x_1y_1(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1) +$$
$$+ x_1y_2(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2) + x_2y_1(\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1) + x_2y_2(\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2).$$

Положим

$$a_{11} = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1), \quad a_{21} = (\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1),$$
$$a_{12} = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2), \quad a_{22} = (\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2).$$

Отсюда для скалярного произведения имеем следующую формулу:

$$(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s}) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2.$$

Выражение

$$\Phi(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s}) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2,$$

стоящее в правой части последней формулы, принято называть *билинейной формой*, порожденной векторами $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$. Билинейная форма вполне определена, если задана матрица ее коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, относительно данного базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ скалярное произведение выражается с помощью билинейной формы:

$$(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s}) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2.$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей билинейной формы* $\Phi(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s})$.

Поскольку

$$a_{12} = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2), \quad a_{21} = (\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1),$$

то в силу симметрии скалярного произведения имеем, что

$$a_{12} = a_{21}.$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

и соответственно билинейная форма

$$\Phi = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2,$$

построенная по этой матрице, для которой

$$a_{12} = a_{21},$$

называются *симметричными.*

Таким образом, *скалярное произведение всегда задается билинейной симметричной формой.*

Пусть $\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$— билинейная симметричная форма. Выражение, которое получается из Φ, если положить $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}$, называется *квадратичной формой,* порожденной вектором $\boldsymbol{r}$. Относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ квадратичная форма имеет вид

$$\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

и представляет собой однородный полином второй степени относительно координат вектора $\boldsymbol{r}$.

Квадратичная форма называется *положительно определенной,* если

$$\Phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \geqslant 0$$

и $\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = 0$, лишь если $\boldsymbol{r}$—нулевой вектор.

Пусть $\boldsymbol{r} = \{x_1, x_2\}$— ненулевой вектор и пусть для определенности $x_2 \neq 0$. Тогда

$$\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = x_2^2 \left(a_{11}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 2a_{12}\frac{x_1}{x_2} + a_{22}\right).$$

Отсюда следует, что необходимым и достаточным условием положительной определенности квадратичной формы

$$\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

являются неравенства

$$a_{11} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

Так как скалярное произведение вектора $\boldsymbol{r}$ самого на себя есть квадратичная форма

$$\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

то условие 4, фигурирующее в определении скалярного произведения, означает, что квадратичная форма

$$\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

положительно определенная.

Итак, *в произвольном базисе* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ *скалярное произведение представляет собой билинейную симметричную форму, а соответствующая ей квадратичная форма положительно определенная.*

Обратно, пусть матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{12} = a_{21}$$

задает симметричную билинейную форму

$$\Phi(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s}) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2,$$

для которой квадратичная форма

$$\Phi(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

положительно определенная. Тогда непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$\Phi(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s}) = \Phi(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{r}),$$

$$\Phi(\lambda\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s}) = \lambda\Phi(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s}),$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{s}) = \Phi(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{s}) + \Phi(\boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{s}),$$

и, следовательно, формула

$$(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s}) = \Phi(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s})$$

действительно определяет скалярное произведение.

Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Скалярное произведение относительно произвольного базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ всегда задается симметричной билинейной формой*

$$\Phi(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s}) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}y_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 \quad (a_{12} = a_{21}),$$

для которой квадратичная форма

$$\Phi(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

является положительно определенной.

Обратно: всякая билинейная симметричная форма

$$\Phi(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s}) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_1y_2,$$

для которой построенная по ней квадратичная форма $\Phi(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r})$ является положительно определенной, представляет собой скалярное произведение.

Выше скалярное произведение было определено для радиус-векторов, исходящих из некоторой произвольно фиксированной точки O на плоскости. Не представляет труда распространить понятие скалярного произведения на любые векторы. Именно пусть $\boldsymbol{r} = \overline{AB}$ и $\boldsymbol{s} = \overline{CD}$ — два произвольных вектора на плоскости и пусть $\boldsymbol{r}_1 = \overline{OM}$ и $\boldsymbol{s}_1 = \overline{ON}$ — радиус-векторы, соответственно равные $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$. Тогда положим

$$\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2,$$

$$\boldsymbol{s}_1 = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2.$$

Если ξ_1 и ξ_2, η_1 и η_2 — соответственно проекции $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$ на векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, то

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2,$$

$$\eta_1 = y_1, \quad \eta_2 = y_2.$$

Поэтому полагаем

$$(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s}) = a_{11}\xi_1\eta_1 + a_{12}\xi_1\eta_2 + a_{21}\xi_2\eta_1 + a_{22}\xi_2\eta_2.$$

Тогда

$$(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{s}_1),$$

и, стало быть, скалярное произведение для любых векторов $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ плоскости относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ представляет собой билинейную симметричную форму относительно проекций векторов $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ на базисные векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. При этом квадратичная форма, построенная по билинейной, положительно определенная.

Длиной вектора $\boldsymbol{r}$ будем называть число

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r})}.$$

Естественно желать, чтобы угол между векторами, длина вектора и скалярное произведение были связаны обычным соотношением: скалярное произведение векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними. Поэтому мы приходим к следующему определению угла φ между векторами $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$:

$$\varphi = \arccos \frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})}{|\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{s}|},$$

т. е. полагаем

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})}{|\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{s}|}.$$

Векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$ называются *ортогональными,* если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$, или, что то же,

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) = 0.$$

Для того чтобы приведенное выше определение угла между векторами $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$ было корректным, необходимо установить, что для любых векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$ справедливы неравенства

$$-1 \leqslant \frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})}{|\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{s}|} \leqslant 1,$$

или, что то же самое,

$$\frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})^2}{|\boldsymbol{r}|^2\,|\boldsymbol{s}|^2} \leqslant 1.$$

Это неравенство обычно называют *неравенством Коши — Буняковского.*

Пусть λ — произвольное вещественное число, а $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$ — два произвольных вектора. Тогда по аксиоме 4 скалярного произведения имеем:

$$(\boldsymbol{r} - \lambda\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r} - \lambda\boldsymbol{s}) \geqslant 0,$$

т. е. для любого λ

$$\lambda^2(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}) - 2\lambda(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) + (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) \geqslant 0.$$

Так как квадратный относительно λ трехчлен

$$\lambda^2(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}) - 2\lambda(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) + (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r})$$

принимает только неотрицательные значения, то он не может иметь различных действительных корней, и, следовательно, его дискриминант неположителен:

$$(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s})^2-(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r})(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{s})\leqslant 0.$$

Отсюда и вытекает, что

$$(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s})^2\leqslant(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{s}).$$

Таким образом, для любых векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$ имеем

$$\frac{(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s})^2}{|\boldsymbol{r}|^2\,|\boldsymbol{s}|^2}\leqslant 1.$$

Итак, пусть на аффинной плоскости введено скалярное произведение $(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s})$. Тогда для всех векторов $\boldsymbol{r}$ определена длина $|\boldsymbol{r}|$ и определен угол между двумя любыми векторами.

Аффинное преобразование ψ аффинной плоскости назовем *ортогональным*, если оно не меняет скалярного произведения между векторами, т. е. для любых векторов $\boldsymbol{r}=\overline{AB}$ и $\boldsymbol{s}=\overline{CD}$ и их образов

$$\boldsymbol{r}'=\overline{A'B'},\ \boldsymbol{s}'=\overline{C'D'}$$

справедливо равенство

$$(\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{s}')=(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s}).$$

Очевидно, что всякое ортогональное преобразование не меняет длин векторов и углов между ними.

Совокупность ортогональных преобразований образует подгруппу H группы аффинных преобразований плоскости. Для доказательства этого факта достаточно проверить справедливость следующих утверждений:

а) *произведение двух ортогональных преобразований есть ортогональное преобразование,*

б) *преобразование, обратное к ортогональному, есть ортогональное преобразование.*

Доказательство утверждения а). Пусть ζ — аффинное преобразование, представляющее собой произведение двух ортогональных преобразований φ и ψ. Пусть, далее, $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$ — два произвольных вектора. Тогда

$$(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s})=|\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{s}|\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}}).$$

Положим

$$\boldsymbol{r}'=\varphi(\boldsymbol{r}),\ \ \boldsymbol{s}'=\varphi(\boldsymbol{s}).$$

Так как φ — ортогональное преобразование, то

$$|\boldsymbol{r}'|=|\boldsymbol{r}|,\ \ |\boldsymbol{s}'|=|\boldsymbol{s}|,$$

и угол между векторами $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{s}'$ равен углу между векторами $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$.

Так как

$$r'' = \zeta(r) = \psi(\varphi(r)) = \psi(r'),$$
$$s'' = \zeta(s) = \psi(\varphi(s)) = \psi(s'),$$

а ψ — ортогональное преобразование, то

$$|r''| = |r'| = |r|,$$
$$|s''| = |s'| = |s|,$$

и угол между векторами r'' и s'' равен углу между векторами r и s. Поэтому

$$(r'', s'') = |r''|\,|s''| \cos(\widehat{r'', s''}) = |r|\,|s| \cos(\widehat{r, s}) = (r, s).$$

Утверждение а) доказано.

Доказательство утверждения б). Пусть ψ — ортогональное преобразование. Так как ψ — аффинное преобразование, то оно имеет обратное ψ^{-1}. Пусть ψ^{-1} переводит два произвольных вектора r и s в векторы r' и s'. Тогда, используя ортогональность ψ, имеем:

$$|r'| = |r|, \quad |s'| = |s|,$$

и угол между векторами r и s равен углу между r' и s'. Аффинное преобразование ψ^{-1} переводит r в r', s в s', и так как

$$(r', s') = (r, s),$$

а векторы r и s выбраны произвольными, то ψ^{-1} есть ортогональное преобразование.

Итак, совокупность ортогональных преобразований образует группу. Очевидно, H есть собственная подгруппа $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$. Найдем теперь координатное представление ортогонального преобразования.

Так как аффинным преобразованием произвольно заданный базис можно перевести в любой другой, то на аффинной плоскости все базисы равноправны. После того как на аффинной плоскости введено скалярное произведение и выделена группа ортогональных преобразований, все базисы разделяются на попарно непересекающиеся классы. В каждый такой класс входят базисы, у которых соответственно равны длины векторов и углы между ними. Другими словами, базисы e_1, e_2 и e_1', e_2' относительно ортогональных преобразований входят в один класс тогда и только тогда, когда

$$|e_1| = |e_1'|, \quad |e_2| = |e_2'|, \quad (\widehat{e_1, e_2}) = (\widehat{e_1', e_2'}).$$

Поэтому представляется целесообразным выделить так называемые ортонормированные базисы. Базис, состоящий из векторов e_1, e_2, называется *ортонормированным,* если векторы e_1 и e_2 ортогональны и длины их равны единице. Базисные векторы e_1 и e_2 ортонормированного базиса называются *ортами.*

Теорема 2. *Ортонормированные базисы существуют.*

Действительно, пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ — произвольный базис. Длина вектора $\boldsymbol{e}_1$ равна $\sqrt{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)} > 0$. Положим

$$\boldsymbol{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)}}\boldsymbol{e}_1,$$

тогда

$$|\boldsymbol{g}_1| = \frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)}}|\boldsymbol{e}_1| = \frac{\sqrt{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)}}{\sqrt{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)}}$$

и, следовательно,

$$|\boldsymbol{g}_1| = 1.$$

Рассмотрим вектор

$$\boldsymbol{g}_2' = \boldsymbol{e}_2 + \lambda \boldsymbol{g}_1,$$

где λ—некоторое вещественное число. Подберем λ так, чтобы

$$(\boldsymbol{g}_2', \boldsymbol{g}_1) = 0,$$

т. е.

$$(\boldsymbol{e}_2 + \lambda \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1) = 0.$$

Отсюда

$$\lambda = -\frac{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{g}_1)}{(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1)} = -(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{g}_1).$$

Обозначим через $|\boldsymbol{g}_2'|$ длину вектора $\boldsymbol{g}_2'$. Векторы $\boldsymbol{g}_1$ и $\boldsymbol{g}_2 = \frac{1}{|\boldsymbol{g}_2'|}\boldsymbol{g}_2'$, очевидно, образуют ортонормированный базис.

Теорема доказана.

Из определения ортогонального преобразования вытекает, что такое преобразование всегда ортонормированный базис переводит в ортонормированный.

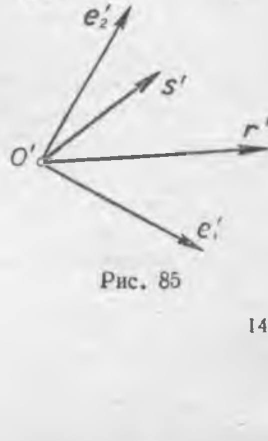


Рис. 85

Теорема 3. *Если аффинное преобразование ψ переводит некоторый ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ в ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, то ψ есть ортогональное преобразование.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{r} = \overline{AB}$ и $\boldsymbol{s} = \overline{CD}$ — два произвольных вектора и $\boldsymbol{r}' = \overline{A'B'}$, $\boldsymbol{s}' = \overline{C'D'}$ — их образы при преобразовании ψ (рис. 85).

Пусть

$$r = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \quad s = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2$$

— разложения векторов r, s по базису e_1, e_2, а

$$r' = \xi_1' e_1' + \xi_2' e_2',$$

$$s' = \eta_1' e_1' + \eta_2' e_2'$$

— разложения r', s' по базису e_1', e_2'.

Так как векторы e_1 и e_2, e_1' и e_2' образуют ортонормированные базисы, то

$$\xi_1 = (r, e_1), \ \xi_2 = (r, e_2); \ \eta_1 = (s, e_1), \ \eta_2 = (s, e_2),$$
$$\xi_1' = (r', e_1'), \ \xi_2' = (r', e_2'); \ \eta_1' = (s', e_1'), \ \eta_2' = (s', e_2').$$

Поскольку скалярное произведение векторов равно произведению длин векторов на косинус угла между ними, то

$$\xi_1 = |r| \cos\varphi_1, \ \xi_2 = |r| \cos\varphi_2; \ \eta_1 = |s| \cos\theta_1, \ \eta_2 = |s| \cos\theta_2;$$
$$\xi_1' = |r'| \cos\varphi_1', \ \xi_2' = |r'| \cos\varphi_2'; \ \eta_1' = |s'| \cos\theta_1', \ \eta_2' = |s'| \cos\theta_2';$$
$$\varphi_1 = \angle(r, e_1), \ \varphi_2 = \angle(r, e_2); \ \theta_1 = \angle(s, e_1), \theta_2 = \angle(s, e_2);$$
$$\varphi_1' = \angle(r', e_1'), \varphi_2' = \angle(r', e_2'); \ \theta_1' = \angle(s', e_1'), \ \theta_2' = \angle(s', e_2').$$

Отсюда вытекает, что проекции вектора r на оси Ox_1, Ox_2, для которых векторы e_1, e_2 суть орты, равны произведению длины вектора r на косинус угла между вектором и соответствующей осью. Поэтому если $R = \overline{OM}$ — радиус-вектор точки M с координатами ξ_1, ξ_2 относительно базиса e_1, e_2, то

$$R = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2.$$

Поэтому аффинные координаты точки M относительно ортонормированного базиса являются декартовыми. Аналогично если η_1, η_2 — координаты точки N относительно базиса e_1, e_2, то в силу ортонормированности этого базиса числа η_1, η_2 есть декартовы координаты точки N.

Пусть концы ортов e_1, e_2; e_1', e_2' находятся в точках E_1, E_2, E_1', E_2', а M_1 и M_2, M_1' и M_2'—соответственно проекции точки M на оси Ox_1 и Ox_2 и точки M'—ее образа—на оси $O'x_1'$ и $O'x_2'$.

Тогда

$$\xi_1 = (M_1, E_1; O), \quad \xi_2 = (M_2, E_2; O);$$
$$\xi_1' = (M_1', E_1'; O'), \quad \xi_2' = (M_2', E_2'; O').$$

Поскольку при аффинном преобразовании простое отношение трех точек сохраняется, а ψ есть аффинное преобразование, то

$$\xi_1 = \xi_1', \quad \xi_2 = \xi_2',$$
$$\eta_1 = \eta_1', \quad \eta_2 = \eta_2'.$$

В декартовой системе координат проекция вектора на координатную ось равна разности координат конца и начала вектора. Поэтому

$$\overline{(AB)}_{x_1} = \xi_1, \ \overline{(AB)}_{x_2} = \xi_2; \ \overline{(CD)}_{x_1} = \eta_1, \ \overline{(CD)}_{x_2} = \eta_2;$$
$$\overline{(A'B')}_{x_1'} = \xi_1', \ \overline{(A'B')}_{x_2'} = \xi_2', \overline{(C'D')}_{x_1'} = \eta_1', \ \overline{(C'D')}_{x_2'} = \eta_2'.$$

Находим скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, используя их разложения по ортонормированному базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$:

$$(\overline{AB}, \ \overline{CD}) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2.$$

Аналогично находим скалярное произведение векторов $\overline{A'B'}$ и $\overline{C'D'}$ через их разложения по ортонормированному базису $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$:

$$(\overline{A'B'}, \ \overline{C'D'}) = \xi_1'\eta_1' + \xi_2'\eta_2'.$$

Отсюда

$$(\overline{AB}, \ \overline{CD}) = (\overline{A'B'}, \overline{C'D'}).$$

Так как векторы $\boldsymbol{r} = \overline{AB}$ и $\boldsymbol{s} = \overline{CD}$ были взяты произвольно, то преобразование ψ есть ортогональное.

Теорема доказана.

Т е о р е м а 4. *Во всяком ортонормированном базисе* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ *координатное представление ортогонального преобразования имеет вид*:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi + d_1, \\ x_2' = x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi + d_2, \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} x_1' = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi + d_1, \\ x_2' = x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi + d_2. \end{cases} \quad (*)$$

Обратно, всякое аффинное преобразование ψ, *которое в ортонормированном базисе* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ *задается формулами* $(*)$, *является ортогональным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ψ — ортогональное преобразование и $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ — произвольный ортонормированный базис. Так как ψ — аффинное преобразование, то в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ оно имеет координатное представление

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + d_1, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + d_2. \end{aligned}\right\}$$

Как было показано в § 3 гл. II, элементы базиса $\boldsymbol{e}_1 = \overline{OE}_1$ и $\boldsymbol{e}_2 = \overline{OE}_2$ переходят в векторы $\boldsymbol{e}_1' = \overline{O'E_1'}$ и $\boldsymbol{e}_2' = \overline{O'E_2'}$, причем для радиус-векторов точек O', E_1', E_2' справедливы разложения:

$$\overline{OO'} = d_1\boldsymbol{e}_1 + d_2\boldsymbol{e}_2,$$
$$\overline{OE_1'} = (a_{11} + d_1)\boldsymbol{e}_1 + (a_{21} + d_2)\,\boldsymbol{e}_2, \ \overline{OE_2'} = (a_{12} + d_1)\,\boldsymbol{e}_1 + (a_{22} + d_2)\,\boldsymbol{e}_2.$$

Так как

$$e_1' = \overline{O'E_1'} = \overline{OE_1'} - \overline{OO'}, \quad e_2' = \overline{O'E_2'} = \overline{OE_2'} - \overline{OO'},$$

то векторы e_1' и e_2' относительно базиса e_1, e_2 имеют разложения:

$$e_1' = a_{11}e_1 + a_{21}e_2, \; e_2' = a_{12}e_1 + a_{22}e_2.$$

Отсюда

$$\left\{\begin{aligned} a_{11} &= (e_1', e_1) = |e_1'||e_1|\cos\angle(e_1', e_1) = |e_1'|\cos\angle(\overline{e}_1', \overline{e}_1), \\ a_{21} &= (e_1', e_2) = |e_1'|\cos\angle(e_1', e_2), \\ a_{12} &= (e_2', e_1) = |e_2'|\cos\angle(e_2', e_1), \\ a_{22} &= (e_2', e_2) = |e_2'|\cos\angle(e_2', e_2). \end{aligned}\right. \tag{*}$$

Так как ψ—ортогональное преобразование, то

$$|e_1'| = |e_2'| = 1,$$

и векторы e_1' и e_2' ортогональны. Если мы обозначим через φ угол между векторами e_1 и e_1', то

$$\angle(e_1', e_2) = \frac{\pi}{2} - \varphi; \; \angle(e_2', e_1) = \frac{\pi}{2} + \varphi; \; \angle(e_2', e_2) = \varphi,$$

если пары векторов e_1, e_2 и e_1', e_2' ориентированы одинаково (см. § 2 гл. II), и

$$\angle(e_1', e_2) = \varphi - \frac{\pi}{2}; \; \angle(e_2', e_1) = \varphi - \frac{\pi}{2}; \; \angle(e_2', e_2) = \pi - \varphi,$$

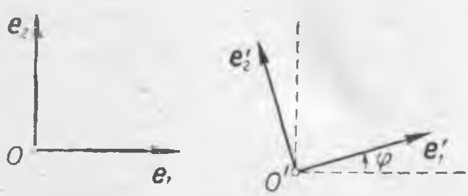


Рис. 86

если пары векторов e_1, e_2 и e_1', e_2' ориентированы противоположно (см. рис. 86 и 87).

Поэтому из формул (*) следует, что

$$a_{11} = \cos\varphi, \quad a_{12} = \sin\varphi,$$
$$a_{21} = \sin\varphi, \quad a_{22} = \cos\varphi,$$

если пары e_1, e_2 и e_1', e_2' ориентированы одинаково, и

$$a_{11} = \cos\varphi, \quad a_{12} = \sin\varphi,$$
$$a_{21} = \sin\varphi, \quad a_{22} = -\cos\varphi,$$

если пары e_1, e_2 и e_1', e_2' ориентированы противоположно.

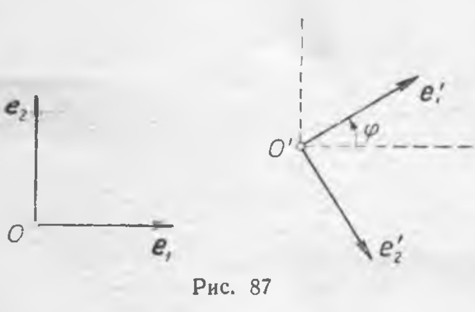


Рис. 87

Обратное утверждение с помощью теоремы 3 сводится к проверке следующего факта: пусть $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ — образы векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ при отображении ψ, которое задано формулами:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi + d_1, \\ x_2' = x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi + d_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi + d_1, \\ x_2' = x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi + d_2; \end{cases}$$

тогда векторы $\boldsymbol{e}_1'$ и $\boldsymbol{e}_2'$ образуют ортонормированный базис.

В первом случае векторы $\boldsymbol{e}_1'$ и $\boldsymbol{e}_2'$ имеют разложения:

$$\boldsymbol{e}_1' = \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{e}_2' = -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2.$$

Отсюда

$$|\boldsymbol{e}_1'| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1,$$
$$|\boldsymbol{e}_2'| = \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = 1,$$
$$(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2') = -\cos\varphi \sin\varphi + \sin\varphi \cos\varphi = 0.$$

Таким образом, векторы $\boldsymbol{e}_1'$ и $\boldsymbol{e}_2'$ действительно образуют ортонормированный базис. Аналогично устанавливается, что и во втором случае векторы $\boldsymbol{e}_1'$ и $\boldsymbol{e}_2'$ также образуют ортонормированный базис.

Теорема доказана.

В § 15 гл. I было выяснено, что преобразование, имеющее в ортонормированном базисе координатное представление

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi + d_1, \\ x_2' = x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi + d_2, \end{cases}$$

сводится к вращению евклидовой плоскости на угол φ и параллельному переносу на вектор $\boldsymbol{d} = \{d_1, d_2\}$. Если же координатное представление рассматриваемого преобразования имеет вид:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi + d_1, \\ x_2' = x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi + d_2, \end{cases}$$

то это преобразование есть произведение вращения на угол φ параллельного переноса на вектор $\boldsymbol{d} = \{d_1, d_2\}$ и отражения от прямой. В обоих случаях речь идет о движениях евклидовой плоскости, которые были изучены в § 15 гл. I. Из теоремы 4 и проведенных только что рассмотрений вытекает, что группа ортогональных преобразований H изоморфна группе движений евклидовой плоскости. Отсюда и вытекает основная теорема о связи аффинной и евклидовой геометрий.

Теорема 5. Пусть $\mathscr{A}$ — *группа аффинных преобразований евклидовой плоскости и* H — *ее подгруппа, состоящая из ортогональных преобразований.*

Теория инвариантов группы ортогональных преобразований H *составляет евклидову геометрию, а теория инвариантов группы аффинных преобразований составляет аффинную геометрию.*

Так как подгруппа H не совпадает со всей группой $\mathscr{A}$, то любой инвариант группы $\mathscr{A}$ есть инвариант группы H, но существуют инварианты подгруппы H, не являющиеся инвариантами группы $\mathscr{A}$.

Напомним, что речь о конкретных инвариантах групп $\mathscr{A}$ и H шла в § 6, 7 гл. II, куда мы и отсылаем читателя.

§ 8 К вопросу об аксиоматике аффинной и евклидовой геометрий

В этом параграфе будет дана аксиоматика аффинной и евклидовой геометрий, основанная на свойствах линейных операций над математическими объектами.

Множество R элементов x, y, z произвольной природы называется ***аффинным (линейным) пространством****, если:*

а) *каждым двум элементам x и y поставлен в соответствие элемент z, называемый* ***суммой элементов*** *x и y; сумма элементов обозначается через $x + y$;*

б) *каждому элементу x и каждому вещественному числу λ поставлен в соответствие элемент λx, называемый произведением числа λ на элемент x.*

Эти операции должны удовлетворять следующим требованиям:

I. а) $x + y = y + x$.

б) $(x + y) + z = x + (y + z)$.

в) *Существует элемент θ такой, что $x + \theta = x$ для любого x. Элемент θ называется нулевым элементом.*

г) *Для каждого x существует элемент, обозначаемый через $-x$, такой, что*

$$x + (-x) = \theta.$$

II. а) $1 \cdot x = x$.

б) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta) x$.

III. а) $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$.

б) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Точно так же, как и в приведенных выше системах аксиом евклидовой и аффинной геометрий, элементы, а также операции сложения и умножения их на вещественные числа никакого конкретного смысла не имеют. Поэтому всякий раз, когда мы встречаемся с операциями, удовлетворяющими перечисленным выше требованиям, мы вправе считать их операциями сложения и умножения на числа, а совокупность элементов, для которых эти операции установлены, — аффинным (линейным) пространством.

Элементы аффинного пространства будем называть *векторами*.

Пусть R — аффинное пространство. Векторы $x, y, \ldots, v$ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\alpha, \beta, \ldots, \mu$, не все одновременно равные нулю, такие, что

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \mu v = \theta.$$

Векторы, не являющиеся линейно зависимыми, называются *линейно независимыми*. Другими словами, векторы $x, y, \ldots, v$ линейно независимы, если равенство

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \mu v = \theta$$

возможно лишь при $\alpha = \beta = \ldots = \mu = 0$.

С помощью понятия линейной зависимости строится важное понятие *размерности* аффинного пространства.

Аффинное пространство R называется n-мерным, если в нем существует n линейно независимых векторов и нет большего числа линейно независимых векторов.

Двумерное аффинное пространство называется *аффинной плоскостью*.

Как было показано в § 6, из аксиом аффинной планиметрии можно вывести понятие вектора, сложение векторов и умножение их на вещественные числа. При этом все аксиомы аффинного (линейного) пространства относительно операций над векторами будут выполненными. Таким образом, аффинная плоскость в смысле аксиоматики § 6 есть двумерное аффинное пространство.

Можно доказать (на этом мы останавливаться не будем), что всякое двумерное аффинное пространство есть аффинная плоскость в смысле аксиоматики § 6.

Перейдем теперь к аксиоматике евклидова пространства.

Будем говорить, что в аффинном пространстве R определено *скалярное произведение*, если каждой паре векторов $x, y \in R$ поставлено в соответствие вещественное число, которое мы обозначим через (x, y), причем указанное соответствие обладает следующими свойствами.

1. $(x, y) = (y, x)$ для всех векторов x и y (симметрия скалярного произведения).
2. $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$ для всех чисел λ и всех $x, y \in R$.
3. $$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$$

для любых $x_1, x_2, y \in R$.

4. Скалярное произведение вектора самого на себя неотрицательно:

$$(x,\ x) \geqslant 0$$

и обращается в нуль, лишь если $x = \theta$.

Аффинное пространство, в котором определено скалярное произведение, удовлетворяющее свойствам 1—4, называется *евклидовым пространством.*

Если исходить из аксиоматики евклидовой геометрии, данной в §§ 4, 5, 7, 11, 15 гл. I, то на евклидовой плоскости можно ввести понятие векторов и линейных операций над ними, а также понятие скалярного произведения векторов, благодаря чему евклидова плоскость есть двумерное евклидово пространство в смысле определения, данного в настоящем параграфе.

В § 7 было показано, что, отправляясь от аксиоматики двумерного евклидова пространства, связанного с введением скалярного произведения в аффинном пространстве, мы приходим к понятию евклидовой плоскости, базирующейся на аксиоматике §§ 4, 5, 7, 11, 15 гл. I.

В настоящее время во многих разделах современной математики находят постоянное применение понятия аффинного и евклидова пространств. При этом в подавляющем большинстве случаев используется аксиоматика этих пространств, приведенная в настоящем параграфе. Это объясняется в первую очередь ее компактностью и удобством проверки в приложениях.

Г Л А В А III. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В начале XIX века параллельно с активным развитием оснований геометрии возникла и стала успешно развиваться новая ветвь геометрии — проективная геометрия. Источником ее явились потребности архитектуры и графики. Первое время проективная геометрия имела довольно ограниченную сферу приложений. Постепенно были замечены и прослежены глубокие связи между проективной геометрией и вопросами обоснования элементарной геометрии, что привело к тесному объединению обоих отделов геометрии в конце XIX века. Результатом этого объединения было построение в рамках проективной геометрии глубокой теории, которая включила в единую схему геометрии Евклида и Лобачевского.

Создание проективной геометрии связано с работой известного французского геометра Понселе (1788—1867) «Трактат о проективных свойствах фигур», в которой впервые в качестве самостоятельного объекта исследования выделены геометрические свойства фигур, не изменяющиеся при центральном проектировании. Важную роль в развитии проективной геометрии сыграли работы М. Шаля (1793—1880), Я. Штейнера (1769—1863) и Х. Штаудта (1798—1867).

§ 1. Центральная проекция

В этом параграфе описывается подробно определение и свойства центральной проекции, которые на протяжении всего последующего изложения играют существенную роль.

В евклидовом пространстве рассмотрим две пересекающиеся плоскости α и β. Пусть l — прямая, по которой пересекаются плоскости α и β, и S — точка в пространстве, не принадлежащая плоскостям α и β. Проведем прямую SM через точку S и точку M, лежащую на плоскости α. Обозначим через M' точку пересечения прямой SM с плоскостью β (см. рис. 88). Соответствие, относящее точке M плоскости α точку M' плоскости β, называется *центральной проекцией*, или *центральным проектированием из точки* S. Ясно, что центральное проектирование определено для любой па-

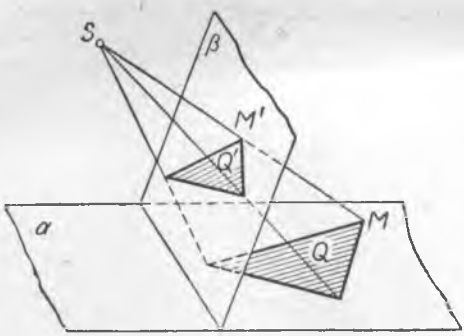


Рис. 88

ры плоскостей α и β, не проходящих через точку S. Далее, если Q — некоторая фигура на плоскости α, то центральное проектирование из точки S переводит Q в некоторую фигуру Q' на плоскости β. Фигура Q' называется *центральной проекцией* Q. Если фиксировать фигуру Q и варьировать выбор точки S и плоскости β, то при помощи центрального проектирования фигуры Q мы получим бесконечное множество фигур Q', в некоторых отношениях похожих на Q, но во многих других существенно отличающихся от нее. Например, проектируя равносторонний треугольник, мы можем, вообще говоря, получить треугольник произвольной формы; проектируя окружность, мы можем получить эллипс, параболу (рис. 89, *а*)) или даже гиперболу (рис. 89, *б*)). Точно так же многие величины, связанные с фигурой, будут изменяться при центральном проектировании. В первую очередь это относится к длинам отрезков и площадям треугольников.

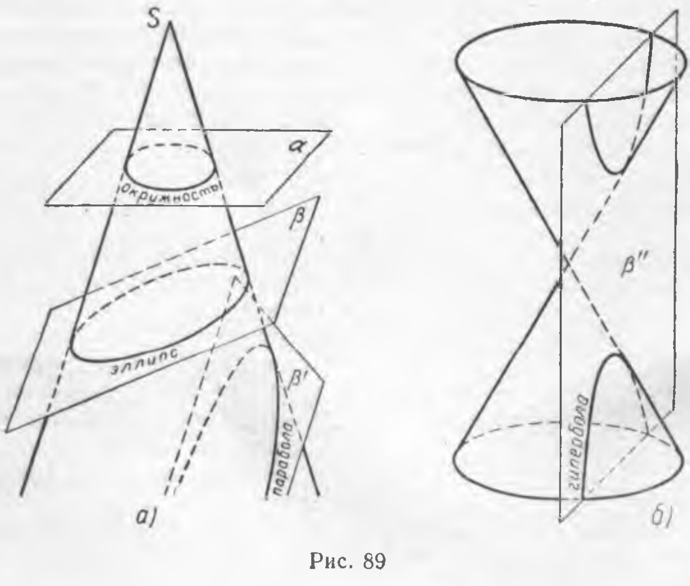


Рис. 89

С другой стороны, фигуры обладают и такими свойствами, которые сохраняются при центральном проектировании. Кроме того, как мы увидим ниже, с геометрическими фигурами могут быть сопоставлены величины, также не изменяющиеся при любых центральных проектированиях. Такие свойства и величины называются *инвариантами* центрального проектирования. Именно эти свойства фигур Понселе и назвал проективными, определив их как объекты исследования в проективной геометрии, понимая под последней отдел геометрии, в котором изучаются свойства фигур при нескольких последовательно выполненных центральных проекциях. Кроме того, объектами проективной геометрии являются также величины, инвариантные относительно проектирований.

Примеры. 1. Если точки A_1, $A_2, \ldots,$ A_n некоторой фигуры Q лежат на прямой, то после центрального проектирования их образы — точки A_1', $A_2', \ldots,$ A_n' — также лежат на одной прямой. Следовательно, свойство точек лежать на одной прямой является проективным, *т. е. прямая есть объект проективной геометрии*.

2. Если точки A_1, $A_2, \ldots,$ A_n фигуры Q лежат на каком-нибудь коническом сечении (кривой второго порядка), то образы этих точек при центральном проектировании также лежат на некотором коническом сечении. Следовательно, *коническое сечение есть объект проективной геометрии*. При этом надо иметь в виду, что свойства, присущие только окружности, или только эллипсу, или только гиперболе, или только параболе, не являются проективными. Поэтому в проективной геометрии не делается различия между коническими сечениями, как это делается в евклидовой и аффинной геометриях.

Из сказанного выше видно, что между проективной, аффинной и евклидовой геометриями есть много общего. Именно, все эти геометрии изучают инварианты некоторого класса преобразований. Особая роль проективной геометрии, как мы увидим ниже, состоит в том, что она позволяет воедино соединить разные геометрические системы: аффинную геометрию, геометрию Евклида и геометрию Лобачевского.

Для того чтобы осуществить указанные построения, нужно прежде всего изучить класс так называемых проективных преобразований. Важную роль при этом играют понятия бесконечно удаленных элементов, к рассмотрению которых мы и переходим.

§ 2. Бесконечно удаленные элементы евклидова пространства. Проективное пространство

Пусть S — произвольная точка евклидова пространства и s — прямая, не проходящая через точку S. Проведем через точку S и прямую s плоскость α и рассмотрим всевозможные прямые, проходящие через точку S в плоскости α. Эти прямые образуют плоский пучок с центром в точке S, обозначать который будем $P(S)$. Между прямыми пучка $P(S)$ и точками прямой s установим соот-

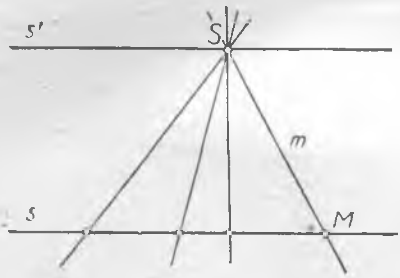


Рис. 90

ветствие, относя каждой точке M прямой s ту прямую m пучка $P(S)$ (рис. 90), которая пересекает s в точке M. Прямую m называют прямой, проектирующей точку M.

Очевидно, что всякой точке M прямой s в пучке $P(S)$ соответствует определенная прямая. Обратное утверждение не имеет места, так как прямой s' пучка $P(S)$, которая параллельна s, не соответствует никакая точка прямой s. Таким образом, соответствие между прямыми пучка $P(S)$ и точками прямой s не является взаимно однозначным. Это обстоятельство при рассмотрении центральных проектирований геометрических фигур постоянно вызывает затруднения и неудобства. Поэтому условились рассматривать параллельные прямые как прямые, пересекающиеся на бесконечности. Тогда прямая s' в пучке $P(S)$, параллельная прямой s, так же как и всякая другая прямая пучка $P(S)$, будет иметь с s общую точку. Только эта точка не обыкновенная, а *несобственная*; ее принято называть *бесконечно удаленной точкой прямой s*.

Бесконечно удаленная точка прямой s считается принадлежащей также каждой плоскости, которая проходит через прямую s. Далее считают, что все параллельные прямые в пространстве имеют одну и ту же бесконечно удаленную точку. В соответствии с этим систему параллельных прямых, лежащих в одной плоскости, называют *пучком прямых с бесконечно удаленным центром*.

Отметим, что при центральном проектировании пучок прямых с бесконечно удаленным центром может перейти в обыкновенный пучок (см. рис. 91, *а*)); здесь пучок с бесконечно удаленным центром S_∞ на плоскости α проектированием из точки S_0 переводится в обыкновенный пучок на плоскости β с центром в точке S.

Далее, при той же центральной проекции обыкновенный пучок с центром A, лежащим на линии пересечения плоскостей α и β_1, переходит в пучок прямых с бесконечно удаленным центром (рис. 91, *б*)); через β_1 обозначена плоскость, проходящая через точку S_0 параллельно плоскости β.

Бесконечно удаленные точки непараллельных прямых считаются различными. Таким образом, каждая плоскость содержит бесконечно много различных бесконечно удаленных точек.

Совокупность всех бесконечно удаленных точек плоскости называют *бесконечно удаленной прямой*, а совокупность всех бесконечно удаленных точек пространства — *бесконечно удаленной плоскостью*.

Введенная терминология оправдана следующими соображениями:

1. Две параллельные плоскости имеют общие бесконечно удаленные точки, поэтому совокупность бесконечно удаленных точек плоскости можно рассматривать как множество, состоящее из точек пересечения двух параллельных плоскостей. В связи с этим естественно назвать совокупность бесконечно удаленных точек плоскости бесконечно удаленной прямой.

2. Совокупность всех бесконечно удаленных точек пространства при пересечении с любой обыкновенной плоскостью определяет бесконечно удаленную прямую. Поэтому указанное множество точек естественно назвать бесконечно удаленной плоскостью.

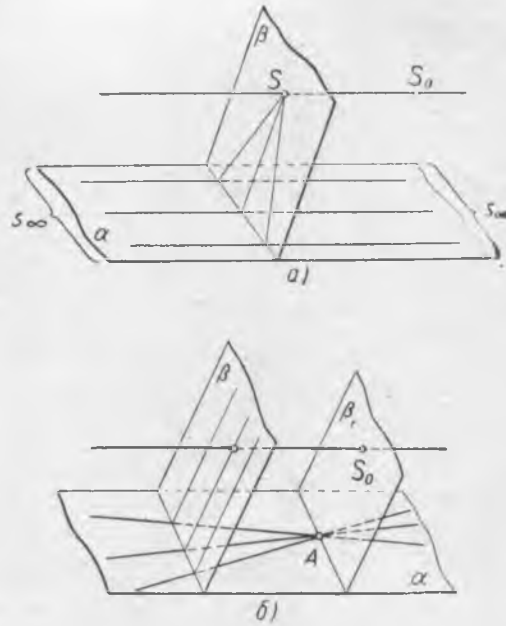


Рис. 91

Итак, к множеству основных объектов евклидова пространства присоединяются новые элементы: «бесконечно удаленная плоскость», «бесконечно удаленные прямые» и «бесконечно удаленные точки». При этом присоединение новых элементов, как легко видеть, осуществляется с выполнением следующих условий:

1. К множеству точек каждой прямой прибавляется одна бесконечно удаленная точка, к совокупности прямых каждой плоскости добавляется одна бесконечно удаленная прямая и, наконец, к множеству плоскостей пространства добавляется одна бесконечно удаленная плоскость.

2. Свойства взаимной принадлежности расширенного множества основных геометрических образов удовлетворяют требованиям всех аксиом связи (см. § 4 гл. I).

3. Для расширенного множества основных объектов свойства взаимной принадлежности таковы, что каждые две плоскости имеют общую прямую, каждые прямая и плоскость имеют общую точку и, наконец, всякие две прямые, лежащие в одной плоскости, имеют общую точку.

Прямая, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется *проективной прямой*. Плоскость, дополненная бесконечно удаленной прямой, называется *проективной плоскостью*, пространство, дополненное бесконечно удаленной плоскостью, называется *проективным пространством.*

В евклидовой геометрии иногда прибегают к рассмотрениям, связанным с бесконечно удаленными элементами. Но по существу эти элементы используются лишь для описания ряда специфических фактов. Например, вместо того чтобы говорить о параллельности прямых, говорят, что они пересекаются в бесконечно удаленной точке, или парабола есть эллипс, проходящий через бесконечно удаленную точку и т. п. В проективном пространстве бесконечно удаленные элементы играют ту же роль, что и обыкновенные, и всякое их особое выделение неестественно.

Причина различия между ролью бесконечно удаленных элементов в евклидовом и проективном пространствах состоит в том, что евклидова геометрия посвящена изучению так называемых метрических свойств фигур, т. е. связана с измерением отрезков и углов. Указанные понятия имеют смысл, если фигуры не содержат бесконечно удаленных элементов; поэтому в евклидовой геометрии бесконечно удаленные элементы по необходимости играют особую роль.

В противоположность этому в проективной геометрии, где метрические свойства фигур не являются объектами исследования, обстоятельства, вызывающие различия между обыкновенными точками и бесконечно удаленными, отпадают. Более того, так как при центральных проектированиях бесконечно удаленные элементы могут переходить в обыкновенные и наоборот, то они не обладают никакими проективными свойствами, которые бы отличали их от обыкновенных элементов. Поэтому в проективном пространстве нет различия между обыкновенными и бесконечно удаленными элементами.

§ 3. Интерпретация проективной прямой и проективной плоскости в связке прямых

В предыдущем параграфе было введено понятие проективного пространства и было подчеркнуто, что при переходе от евклидова пространства к проективному отпадает различие между обыкновенными и бесконечно удаленными точками. Ниже мы строим интерпретацию проективной прямой и проективной плоскости, в которой все элементы равноправны.

Пусть S — некоторая точка евклидова пространства. Рассмотрим совокупность всех прямых пространства, проходящих через точку S. Указанная совокупность прямых называется *связкой прямых с центром в точке* S; в дальнейшем она обозначается $V(S)$.

Интерпретацию проективной плоскости строим следующим образом: «точками» проективной плоскости объявляются прямые связки $V(S)$, «прямыми» проективной плоскости — плоские пучки прямых с центром в точке S, т. е. совокупности прямых связки $V(S)$, лежащие в одной плоскости, и, наконец, за проективную «плоскость» принимается сама связка $V(S)$. При этом, как легко видеть, отношение взаимной принадлежности точек и прямых на проективной плоскости удовлетворяет свойствам 1, 2, 3, сформулированным выше (§ 2, стр. 157). Отметим, что в рассмотренной интерпретации проективной плоскости все точки и прямые равноправны, т. е. нет различия между обыкновенными и бесконечно удаленными точками и прямыми.

С интерпретацией проективной плоскости с помощью связки прямых $V(S)$ тесно связана еще одна интерпретация проективной плоскости. Пусть K — некоторая сфера с центром в точке S. Тогда всякая прямая связки $V(S)$ пересекает K в двух диаметрально противоположных точках. Поверхность, получающаяся из сферы K в результате отождествления диаметрально противоположных точек K, будет, очевидно, интерпретацией проективной плоскости.

Проективная прямая в этой интерпретации представляет собой кривую, которая получается в результате отождествления диаметрально противоположных точек окружности большого круга L сферы K. Непосредственно легко убедиться в том, что проективная прямая L' есть простая замкнутая кривая (см. рис. 92).

Для того чтобы построить интерпретацию проективного пространства, нужно использовать либо связку прямых в четырехмерном пространстве, либо поверхность, получаемую в результате отождествления диаметрально противоположных точек трехмерной сферы.

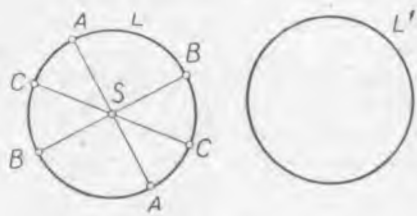


Рис. 92

Остановимся теперь на аналитическом описании проективной плоскости, исходя из интерпретации с помощью связки $V(S)$.

Введем в евклидовом пространстве систему декартовых координат x_1, x_2, x_3 с началом в точке S. Тогда любая прямая связки $V(S)$ будет иметь уравнение

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{x_2}{p_2} = \frac{x_3}{p_3},$$

где x_1, x_2, x_3 — текущие координаты точки прямой, а p_1, p_2, p_3 — направляющие коэффициенты прямой. Известно, что направляющие коэффициенты прямой p_1, p_2, p_3 определяются с точностью до общего множителя $\rho \neq 0$ и

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \neq 0.$$

Другими словами, класс ненулевых пропорциональных троек чисел $p = (p_1, p_2, p_3)$, который мы будем обозначать $[p]$, однозначно определяет прямую связки $V(S)$, и обратно, прямая связки $V(S)$ однозначно определяет класс таких троек.

Следовательно, класс пропорциональных троек можно отождествить с прямой связки $V(S)$, а так как прямая связки есть точка проективной плоскости, то в качестве точек проективной плоскости можно взять классы ненулевых пропорциональных между собой троек вещественных чисел $p = (p_1, p_2, p_3)$. Числа p_1, p_2, p_3 называются *однородными координатами* точки на проективной плоскости.

Однородные координаты обладают следующими свойствами:

1. Каждая точка проективной плоскости имеет однородные координаты.

2. Если p_1, p_2, p_3 — однородные координаты точки M, то ρp_1, ρp_2, ρp_3, где $\rho \neq 0$, также однородные координаты точки M.

3. Разным точкам проективной плоскости соответствуют всегда разные отношения $p_1 : p_2 : p_3$ их однородных координат.

4. Ни для какой точки проективной плоскости все три ее однородные координаты не обращаются в нуль одновременно.

5. Если $p_1^{(n)} \to \overset{0}{p}_1$, $p_2^{(n)} \to \overset{0}{p}_2$, $p_3^{(n)} \to \overset{0}{p}_3$ и $(p_1^0)^2 + (p_2^0)^2 + (p_3^0)^2 \neq 0$, то переменная точка M_n с однородными координатами $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, p_3^{(n)}$ стремится к точке M_0 с однородными координатами $\overset{0}{p}_1, \overset{0}{p}_2, \overset{0}{p}_3$.

Из свойства 2 вытекает, что каждая точка проективной плоскости имеет бесконечно много троек однородных координат, которые сами по себе не определяются соответствующей им точкой; определяются лишь их отношения. Поэтому совокупность всех наборов однородных координат точки M удобно записывать в виде $(\rho p_1, \rho p_2, \rho p_3)$, где ρ принимает любое вещественное значение, кроме $\rho = 0$. Любую из трех координат ρp_1, ρp_2, ρp_3 точки M, если она отлична от нуля, можно сделать равной единице за счет надлежащего выбора множителя ρ.

Если α — некоторая плоскость, проходящая через центр связки $V(S)$, то для любой прямой

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{x_2}{p_2} = \frac{x_3}{p_3}$$

связки $V(S)$, лежащей в этой плоскости, выполнено соотношение

$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0,$$

где

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

— уравнение плоскости α в евклидовом пространстве относительно декартовой системы координат x_1, x_2, x_3. Так как проективная прямая есть совокупность прямых связки $V(S)$, лежащих в одной плоскости, то проективной прямой, соответствующей плоскому пучку прямых, лежащих в плоскости α, будет множество точек проективной плоскости, однородные координаты которых удовлетворяют уравнению

$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0. \tag{*}$$

Уравнение (*) мы будем называть *уравнением проективной прямой в однородных координатах* p_1, p_2, p_3. Для симметрии изменим обозначения коэффициентов A, B, C на u_1, u_2, u_3 и уравнение прямой будем записывать в виде

$$u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0.$$

Отметим, что одной и той же проективной прямой l

$$u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0$$

отвечает целый класс уравнений

$$(\sigma u_1)p_1 + (\sigma u_2)p_2 + (\sigma u_3)p_3 = 0,$$

где $\sigma \neq 0$ — произвольное вещественное число. Так как

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0,$$

то числа u_1, u_2, u_3 одновременно не обращаются в нуль. Числа u_1, u_2, u_3 называются *однородными координатами проективной прямой*.

Далее, если тройка чисел p_1, p_2, p_3 удовлетворяет соотношению

$$u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0,$$

то при любом $\rho \neq 0$ тройка чисел ρp_1, ρp_2, ρp_3 также удовлетворяет соотношению

$$u_1\rho p_1 + u_2\rho p_2 + u_3\rho p_3 = 0.$$

Отсюда следует, что если для одного набора однородных координат точки M выполнено соотношение

$$u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0,$$

то оно выполнено для всех наборов $(\rho p_1, \rho p_2, \rho p_3)$ однородных координат этой точки, и потому точка M принадлежит проективной прямой, имеющей однородные координаты

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3.$$

Рассмотрим однородные координаты точки на проективной прямой. На евклидовой плоскости фиксируем некоторую точку S и рассматриваем систему декартовых координат x_1, x_2 с центром в этой точке. Любая прямая из пучка P (S) имеет уравнение

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{x_2}{p_2},$$

где x_1, x_2 — текущие координаты точки на прямой, а p_1, p_2 — направляющие коэффициенты прямой. Известно, что направляющие коэффициенты прямой p_1, p_2 определяются с точностью до общего множителя $\rho \neq 0$, и числа p_1 и p_2 одновременно не равны нулю.

Следовательно, класс ненулевых пропорциональных пар чисел $p = (p_1, p_2)$, который мы будем обозначать $[p]$, однозначно определяет прямую пучка P (S), и обратно, прямая пучка P (S) однозначно определяет класс таких пар.

Так же, как и в рассмотренном выше случае проективной плоскости, точками проективной прямой будут классы ненулевых пропорциональных между собой пар вещественных чисел $p = (p_1, p_2)$. Числа p_1, p_2 называются *однородными координатами точки на проективной прямой*.

Однородные координаты точки на проективной прямой обладают следующими свойствами:

1. Каждая точка проективной прямой имеет однородные координаты.

2. Если p_1, p_2 — однородные координаты точки M, то ρp_1, ρp_2, где $\rho \neq 0$, — также однородные координаты точки M.

3. Разным точкам проективной прямой соответствуют всегда разные отношения $p_1 : p_2$.

4. Ни для какой точки проективной прямой обе ее однородные координаты не равны одновременно нулю.

5. Если $p_1^{(n)} \to p_1^0$, $p_2^{(n)} \to p_2^0$ и $(p_1^0)^2 + (p_2^0)^2 \neq 0$, то переменная точка M_n с однородными координатами $p_1^{(n)}$, $p_2^{(n)}$ стремится к точке M_0 с однородными координатами p_1^0, p_2^0.

Из свойства 2 вытекает, что каждая точка проективной прямой имеет бесконечно много пар однородных координат, которые сами по себе не определяются заданием соответствующей точки; определяется лишь отношение этих координат. Поэтому совокупность всех наборов однородных координат точки M удобно записывать в виде $(\rho p_1, \rho p_2)$, где ρ принимает любое вещественное значение, кроме $\rho = 0$. Любую из двух координат ρp_1, ρp_2 точки M, если она отлична от нуля, можно сделать равной единице за счет надлежащего выбора множителя ρ.

На евклидовой плоскости с декартовыми координатами x_1, x_2 рассмотрим пучок прямых P (S), полагая, что центр пучка S

находится в начале координат (см. рис. 93). Пусть a — евклидова прямая, имеющая уравнение

$$x_2 = 1.$$

Рассмотрим проективную прямую l, точки которой находятся во взаимно однозначном соответствии с прямыми пучка $P(S)$. Пусть M — точка проективной прямой, имеющая однородные координаты (p_1, p_2), причем $p \neq 0$. Тогда точке M также соответствует пара однородных координат $\left(\frac{p_1}{p_2}, 1\right)$. Точке M проективной прямой l в пучке $P(S)$ соответствует прямая

$$m: \frac{x_1}{p_1} = \frac{x_2}{p_2}.$$

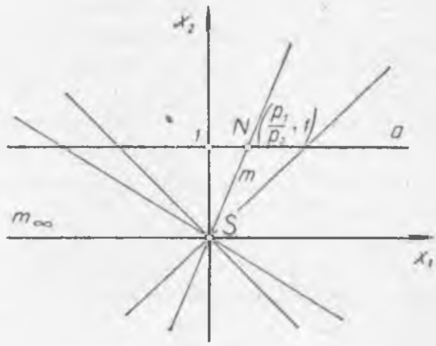


Рис. 93

Прямая m пересекает прямую a в точке $N\left(\frac{p_1}{p_2}, 1\right)$. Таким образом, точке $M(p_1, p_2)$ проективной прямой l на евклидовой прямой a соответствует точка $N\left(\frac{p_1}{p_2}, 1\right)$. Обратно, каждой точке $N(p_1, 1)$ евклидовой прямой a соответствует точка $M(p_1, 1)$ проективной прямой l. Пусть теперь M_∞ — точка проективной прямой, имеющая однородные координаты $(p_1, 0)$. Тогда прямая m_∞ пучка $P(S)$, соответствующая точке M_∞, имеет уравнение

$$x_2 = 0.$$

Прямая m_∞, очевидно, параллельна евклидовой прямой a и, следовательно, пересекается с ней в бесконечно удаленной точке. Поэтому точке M_∞ на евклидовой прямой a отвечает бесконечно удаленная точка.

Таким образом, если на проективной прямой l введены однородные координаты точек p_1, p_2 и установлено соответствие между точками проективной прямой l и евклидовой прямой a, пополненной бесконечно удаленной точкой, по формуле:

$$x = \frac{p_1}{p_2},$$

где x — декартова координата на прямой a, то точкам (p_1, p_2), где $p_2 \neq 0$, отвечают обыкновенные точки евклидовой прямой a, а точке M_∞ $(p_1, 0)$ отвечает бесконечно удаленная точка прямой a.

Аналогичные связи можно установить между точками проективной плоскости и евклидовой плоскости.

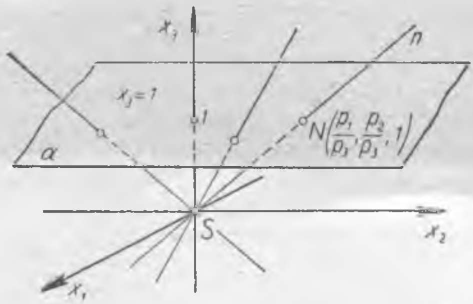


Рис. 94

Пусть $V\ (S)$ — связка прямых в евклидовом пространстве. Рассмотрим в пространстве декартову систему координат x_1, x_2, x_3, начало которой находится в точке S. Через α обозначим евклидову плоскость, уравнение которой таково:

$$x_3 = 1$$

(см. рис. 94).

Пусть λ — проективная плоскость, точки которой находятся во взаимно однозначном соответствии с прямыми связки $V\ (S)$. Именно точке M проективной плоскости λ, имеющей однородные координаты $(p_1,\ p_2,\ p_3)$, ставится в соответствие прямая m связки $V\ (S)$, уравнения которой суть

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{x_2}{p_2} = \frac{x_3}{p_3}.$$

Если $p_3 \neq 0$, то прямая m пересекает евклидову плоскость в обыкновенной точке $N\left(\frac{p_1}{p_3},\ \frac{p_2}{p_3},\ 1\right)$; если же $p_3 = 0$, то прямая m параллельна евклидовой плоскости α и пересекает ее в бесконечно удаленной точке. Отсюда следует, что все бесконечно удаленные точки евклидовой плоскости α соответствуют тем точкам проективной плоскости λ, у которых однородная координата p_3 равна нулю.

Так как условие

$$p_3 = 0$$

на проективной плоскости λ определяет прямую

$$0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 = 0,$$

то можно сказать, что при указанном соответствии прямая $p_3 = 0$ переходит в бесконечно удаленную прямую плоскости α.

Описанные выше соответствия между точками проективной прямой и проективной плоскости, с одной стороны, и соответствующими евклидовыми прямой и плоскостью, пополненными бесконечно удаленными точками, — с другой, показывают, что для точек проективной прямой может быть введена неоднородная координата

$$x = \frac{p_1}{p_2},$$

а для точек проективной плоскости пара неоднородных координат

$$x_1 = \frac{p_1}{p_3}, \quad x_2 = \frac{p_2}{p_3}.$$

С помощью этих координат на проективной прямой и проективной плоскости условно можно выделить бесконечно удаленные точки, которые характеризуются тем, что для них значения неоднородных координат x на проективной прямой и по крайней мере одной из x_1 и x_2 на проективной плоскости равны условно ∞.

Координаты

$$x = \frac{p_1}{p_2}$$

на проективной прямой и

$$x_1 = \frac{p_1}{p_3}, \quad x_2 = \frac{p_2}{p_3}$$

на проективной плоскости называют *неоднородными проективными координатами точки*.

Ниже, в §§ 5 и 9, мы остановимся более подробно на различных способах введения на проективной прямой и проективной плоскости однородных и неоднородных проективных координат.

§ 4. Принцип двойственности

На проективной плоскости рассматриваются два основных типа объектов: точки и прямые. Оказывается, что с каждым предложением может быть сопоставлено некоторое утверждение так, что если эти предложения сформулировать надлежащим образом, то одно из них переходит в другое при замене слова «точка» словом «прямая» и слова «прямая» словом «точка». Это обстоятельство и составляет содержание *принципа двойственности* на проективной плоскости.

Рассмотрим принцип двойственности по отношению к аксиомам связи проективной плоскости. Об этих аксиомах мы уже говорили в § 2 гл. III. Они описывают отношение принадлежности точек и прямых, которые мы выражали словами «точка лежит на прямой», или «прямая проходит через точку». Ниже нам будет более удобно говорить «точка принадлежит прямой», или «прямая принадлежит точке».

Учитывая эту терминологию, мы можем аксиомы связи проективной плоскости записать в следующей форме (мы будем одновременно приводить предложение, которое сопоставляется соответствующей аксиоме; текст аксиомы приводится на левой половине страницы, текст предложения, сопоставленного с аксиомой, — на правой половине страницы; впредь такие два предложения будем называть *двойственными* друг другу):

1. Каковы бы ни были две точки A и B, существует прямая a, принадлежащая точке A и точке B.

Каковы бы ни были две прямые a и b, существует точка A, принадлежащая прямой a и прямой b. (Это есть не что иное, как аксиома 4.)

2. Каковы бы ни были две различные точки A и B, существует не более одной прямой, принадлежащей и точке A, и точке B.

Каковы бы ни были две различные прямые a и b, существует не более одной точки, принадлежащей и прямой a, и прямой b. (Это предложение непосредственно следует из аксиомы 2.)

3. Каждой прямой принадлежит не менее трех точек. Существует по крайней мере три точки, не принадлежащие одной прямой.

Каждой точке принадлежит не менее трех прямых. Существует по крайней мере три прямые, не принадлежащие одной точке. (Это утверждение легко вытекает из аксиом 1—3.)

4. Каждые две прямые имеют общую точку.

Каждые две точки имеют общую прямую. (Это есть не что иное, как аксиома 1.)

Таким образом, с каждой аксиомой связи проективной плоскости можно сопоставить утверждение, вытекающее из этих аксиом, так, что сопоставляемые предложения двойственны друг другу.

Следовательно, если какое-либо предложение проективной плоскости использует только понятие принадлежности точек и прямых, то справедливо также двойственное ему предложение.

Рассмотрим выражение принципа двойственности на проективной плоскости с помощью однородных координат. Пусть на проективной плоскости введены однородные координаты точек. Тогда каждая точка определяется отношением трех чисел (p_1, p_2, p_3), а каждая прямая — уравнением вида

$$u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0. \qquad (*)$$

Выше мы условились коэффициенты уравнения (*) называть однородными координатами прямой, которая этим уравнением определяется. Как мы отмечали, для определения прямой достаточно задать отношения ее однородных координат $u_1 : u_2 : u_3$, причем числа u_1, u_2, u_3 не могут одновременно равняться нулю.

Если (p_1, p_2, p_3) — однородные координаты некоторой точки M, а (u_1, u_2, u_3) — координаты некоторой прямой m, то соотношение

$$u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0$$

является условием принадлежности точки M и прямой m друг другу. Отсюда имеем два двойственных друг другу предложения:

При постоянных (u_1, u_2, u_3) и текущих (p_1, p_2, p_3) соотношение

$$u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0 \qquad (*)$$

определяет всевозможные точки, принадлежащие прямой (u_1, u_2, u_3); в этом смысле оно называется *уравнением прямой*.

При постоянных (p_1, p_2, p_3) и текущих (u_1, u_2, u_3) соотношение

$$u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0 \qquad (*)$$

определяет всевозможные прямые, принадлежащие точке (p_1, p_2, p_3); в этом смысле оно называется *уравнением точки*.

Часто при постоянных p_1, p_2, p_3 и переменных u_1, u_2, u_3 соотношение (*) называют *уравнением пучка с центром* (p_1, p_2, p_3).

§ 5. Сложное отношение четырех точек проективной прямой

1. Сложное отношение четырех точек на евклидовой прямой, пополненной бесконечно удаленной точкой. В этом пункте сложное отношение четырех точек проективной прямой будет введено, отправляясь от того факта, что проективная прямая есть евклидова прямая, пополненная бесконечно удаленной точкой.

Итак, пусть a — евклидова прямая, на которой введено определенное направление и декартова координата x. Пополним прямую a бесконечно удаленной точкой M_∞. Декартову координату точки M_∞ на прямой a будем считать равной ∞. Пусть, далее, A и B — две обыкновенные точки прямой a и x_A и x_B — их декартовы координаты. Так же, как и в главе II, через AB будем обозначать проекцию вектора $\overline{AB}$ на прямую a с учетом выбранного на ней направления. Тогда, как мы знаем,

$$AB = x_B - x_A.$$

В главе II было введено важное понятие простого отношения трех точек, лежащих на одной прямой. Напомним определение и некоторые свойства этого понятия. Пусть A, B, M — обыкновенные точки прямой a. Простым отношением трех точек A, B, M называется число

$$(A, B; M) = \frac{AM}{BM}.$$

Точки A и B называются основными, точка M — делящей. Как было установлено в главе II, каждой точке M прямой a, в том числе и точке M_∞, отвечает определенное значение простого отношения и, обратно, каждому значению простого отношения $(A, B; M)$ соответствует определенное положение точки M на прямой a; при этом, конечно, точки A и B считаются фиксированными. Поэтому с помощью простого отношения можно ввести координату точки M на прямой a:

$$\lambda_M = (A,\ B;\ M).$$

Координата λ_M отлична от евклидовой координаты x_M. Отметим, что при построении координат λ_M для точек прямой a базисные точки A и B фиксированы, но выбор их произволен.

Для точек M, лежащих вне отрезка, будем иметь:

$$\lambda_M = (A,\ B;\ M) > 0;$$

для точек M, лежащих внутри отрезка AB, имеем:

$$\lambda_M = (A,\ B;\ M) < 0,$$

в частности, для середины C отрезка AB имеем:

$$\lambda_C = (A,\ B;\ C) = \frac{AC}{BC} = -1.$$

Далее, для точек A, B и M_∞ полагаем:

$$\lambda_A = 0, \quad \lambda_B = \infty, \quad \lambda_{M_\infty} = 1.$$

Эти определения естественны, ибо они позволяют рассматривать λ_M как непрерывную функцию точки M. Действительно,

$$\lambda_A = \frac{AA}{BA} = 0; \quad \lambda_B = \lim_{M \to B} \lambda_M = \lim_{M \to B} \frac{AM}{BM} = \infty;$$

$$\lambda_{M_\infty} = \lim_{M \to M_\infty} \frac{AM}{BM} = \lim_{M \to M_\infty} \left(\frac{AB}{BM} + 1\right) = 1.$$

Схематически значения координат λ_M для некоторых точек M прямой a даны на рис. 95.

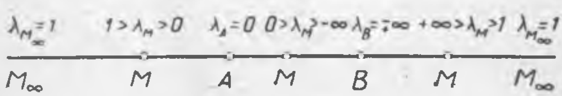


Рис. 95

Из сказанного выше вытекает следующее важное замечание: с помощью координаты λ_M обыкновенной точке B прямой a приписывается координата ∞, а бесконечно удаленной точке той же прямой a — координата 1. Если стать на ту точку зрения, что бесконечно удаленная точка прямой характеризуется координатой ∞, то ясно, что любая точка M_0 прямой a может рассматриваться как бесконечно удаленная. Для этого достаточно точку M_0 взять в качестве второй базисной точки B при введении координаты λ_M на прямой a с помощью равенства $\lambda_M = (A,\ M_0;\ M)$. Тем самым введение координаты точек на прямой с помощью простого отношения снимает с понятия бесконечно удаленной точки M_∞ прямой

a ее особое положение и делает все точки прямой a, пополненной бесконечно удаленной точкой M_∞, равноправными. Таким образом, мы опять приходим к тому положению, что все точки проективной прямой равноправны и любая точка этой прямой может быть принята за бесконечно удаленную, после чего все остальные точки M проективной прямой с помощью координаты λ_M находятся во взаимно однозначном соответствии с точками евклидовой прямой.

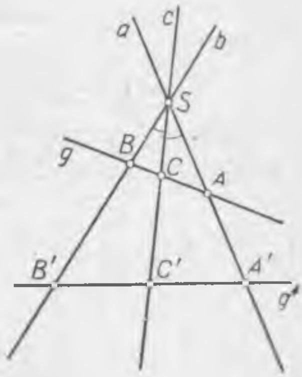


Рис. 96

Простое отношение, как показывают примеры, может изменять свое значение при центральных проектированиях.

Действительно, пусть центральное проектирование происходит из точки S как из центра и a, b, c — три прямые пучка $P(S)$, причем прямая c есть биссектриса угла между прямыми a и b (все построение происходит в некоторой плоскости α). Пусть, далее, g и g' — непараллельные между собой прямые (рис. 96), не проходящие через точку S. Очевидно, эти прямые можно выбрать так, чтобы

$$|AS| > |BS| \quad \text{и} \quad |A'S| < |B'S|;$$

здесь через $|MN|$ обозначена длина отрезка MN. Тогда

$$|(A,\ B;\ C)| = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AS|}{|BS|} > 1,$$

$$|(A',\ B';\ C')| = \left|\frac{A'C'}{B'C'}\right| = \frac{|A'S|}{|B'S|} < 1.$$

Так как точки A', B', C' являются образами точек A, B, C при центральной проекции из центра S, то написанные соотношения показывают, что простое отношение трех точек может изменить свое значение при центральном проектировании.

Сейчас мы введем понятие сложного отношения четырех точек одной прямой, которое будет инвариантом центральных проектирований.

Сложное отношение четырех точек *A, B, C, D одной прямой a определяется формулой:*

$$(A,\ B;\ C,\ D) = \frac{(A,\ B;\ C)}{(A, B;\ D)};$$

оно представляет собой число, равное частному простых отношений точек A, B, C и точек A, B, D.

Точки A и B в обоих простых отношениях являются базисными, а точки C и D — делящими. Поэтому пара точек A, B называется *базисной* (или *основной*) *парой* сложного отношения, а пара точек C, D — *делящей парой*. Из определения сложного отношения легко вытекает формула:

$$(A,\ B;\ C,\ D)=\frac{(A,\ B;\ C)}{(A,\ B;\ D)}=\frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AD}{BD}}=\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}.$$

Рассмотрим теперь наиболее важные свойства сложного отношения, непосредственно вытекающие из его определения.

Теорема 1. *Сложное отношение не изменяется от перестановки пар базисных и делящих точек, т. е.*

$$(A,\ B;\ C,\ D)=(C,\ D;\ A,\ B).$$

Доказательство. Действительно,

$$(C,\ D;\ A,\ B)=\frac{CA\cdot DB}{DA\cdot CB}=\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}=(A,\ B;\ C,\ D).$$

Теорема 2. *Сложное отношение не изменяется от одновременной перестановки точек внутри каждой пары, т. е.*

$$(A,\ B;\ C,\ D)=(B,\ A;\ D,\ C).$$

Доказательство. Действительно,

$$(B,\ A;\ D,\ C)=\frac{BD\cdot AC}{AD\cdot BC}=\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}=(A,\ B;\ C,\ D).$$

Теорема 3. *Перестановка точек в одной паре изменяет величину сложного отношения на обратную*:

$$(B,\ A;\ C,\ D)=\frac{1}{(A,\ B;\ C,\ D)};\quad (A,\ B;\ D,\ C)=\frac{1}{(A,\ B;\ C,\ D)}.$$

Доказательство. Действительно,

$$(A,\ B;\ D,\ C)=\frac{AD\cdot BC}{AC\cdot BD}=\frac{(A,\ B;\ D)}{(A,\ B;\ C)}=\frac{1}{(A,\ B;\ C,\ D)},$$

если переставлены точки второй пары, и

$$(B,\ A;\ C,\ D)=\frac{BC\cdot AD}{AC\cdot BD}=\frac{(A,\ B;\ D)}{(A,\ B;\ C)}=\frac{1}{(A,\ B;\ C,\ D)},$$

если переставлены точки первой пары.

Теорема 4. *Перестановка двух крайних или двух средних точек в сложном отношении изменяет его значение следующим образом*:

$$(D,\ B;\ C,\ A)=1-(A,\ B;\ C,\ D),$$
$$(A,\ C;\ B,\ D)=1-(A,\ B;\ C,\ D).$$

Доказательство. Если переставлены местами средние точки, то

$$(A, C; B, D) = \frac{AB \cdot CD}{CB \cdot AD} = \frac{AB \cdot (CA + AD)}{CB \cdot AD} =$$

$$= \frac{AB \cdot CA + AB \cdot AD}{CB \cdot AD} = \frac{AB \cdot CA + (AC + CB) \cdot AD}{CB \cdot AD} =$$

$$= \frac{AB \cdot CA + AC \cdot AD}{CB \cdot AD} + 1 = \frac{AC \cdot (BA + AD)}{CB \cdot AD} + 1 =$$

$$= 1 - \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = 1 - (A, B; C, D).$$

Если же переставлены крайние точки, то

$$(D, B; C, A) = (B, D; A, C) = 1 - (B, A; D, C) = 1 - (A, B; C, D).$$

Теорема 5. *Положим,*

$$(A, B; C, D) = \nu,$$

тогда при всевозможной перестановке местами точек A, B, C, D в сложном отношении оно будет принимать только шесть различных значений, которые даны таблицей:

1. $(A, B; C, D) = \nu.$
2. $(A, C; B, D) = 1 - \nu.$
3. $(A, D; B, C) = 1 - \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{\nu - 1}{\nu}.$
4. $(A, B; D, C) = \dfrac{1}{\nu}.$
5. $(A, C; D, B) = \dfrac{1}{1 - \nu}.$
6. $(A, D; C, B) = \dfrac{\nu}{\nu - 1}.$

Доказательство. Из данных четырех точек A, B, C, D можно составить 24 различные перестановки. Но среди всех этих перестановок будут такие, которые дают равные значения сложного отношения. Из теорем 1 и 2 легко вытекает, что для каждой перестановки найдутся еще три, порождающие то же значение сложного отношения, что и исходная перестановка. Например, для перестановки $(A, B; C, D)$ имеем:

$$(A, B; C, D) = (C, D; A, B) = (D, C; B, A) = (B, A; D, C).$$

Таким образом, все перестановки делятся на 6 групп, по 4 перестановки в каждой, причем перестановки одной группы порождают одинаковые сложные отношения. Если

$$\nu = (A, B; C, D),$$

то, пользуясь теоремами 3 и 4, после простых вычислений получим таблицу, которая фигурирует в формулировке теоремы 5.

Покажем теперь, как вводить координаты точек на прямой с помощью сложного отношения. Рассмотрим на евклидовой прямой a, пополненной бесконечно удаленной точкой M_∞, т. е. на проективной прямой a, четыре точки A, B, C, M. Предположим, что точки A, B и C фиксированы, а точка M перемещается по прямой a. Каждому положению точки M на прямой a соответствует определенное значение сложного отношения $(A, B; C, M)$. Пусть теперь для двух точек M_1 и M_2 прямой a имеем:

$$(A, B; C, M_1) = (A, B; C, M_2).$$

Докажем, что точки M_1 и M_2 совпадают. Действительно, из соотношения

$$(A, B; C, M_1) = (A, B; C, M_2)$$

следует, что

$$\frac{(A, B; C)}{(A, B; M_1)} = \frac{(A, B; C)}{(A, B; M_2)}.$$

Поэтому

$$(A, B; M_1) = (A, B; M_2).$$

А тогда, как было доказано в главе II, точки M_1 и M_2 совпадают.

Таким образом, при фиксированных точках A, B, C каждому положению точки M на прямой a отвечает определенное сложное отношение $(A, B; C, M)$ и, обратно, каждому значению сложного отношения при фиксированных A, B и C однозначно отвечает некоторая точка M прямой a. Поэтому число

$$\nu_M = (A, B; C, M)$$

может быть принято за координату точки M на прямой a. Введенная нами координата точек на прямой a называется *проективной*. Смысл этого будет раскрыт ниже.

Итак, для построения проективных координат на прямой a фиксируются три произвольные точки A, B, C, а сама проективная координата ν_M любой точки M тогда определяется по формуле:

$$\nu_M = (A, B; C, M).$$

Если точка M совпадает с C, то

$$\nu_C = (A, B; C, C) = \frac{(A, B; C)}{(A, B; C)} = 1.$$

Если M совпадает с точкой B, то

$$\nu_B = (A, B; C, B) = \frac{(A, B; C)\,BB}{AB} = 0.$$

Наконец, если M совпадает с точкой A, то, рассматривая этот случай как предельный, имеем:

$$\nu_A = \lim_{M \to A} (A, B; C, M) = \lim_{M \to A} \frac{(A, B; C)}{(A, B; M)} = \infty.$$

Таким образом, основным точкам A, B, C соответствуют проективные координаты, равные соответственно ∞, 0, 1.

Здесь так же, как и в случае простого отношения, точку A можно рассматривать как бесконечно удаленную точку прямой a, считая, что a пополнена бесконечно удаленной точкой M_∞, или, что то же, проективной прямой a. Так как точка A может быть фиксирована произвольно, то любая точка A может быть взята за бесконечно удаленную, и мы снова приходим к тому, что все точки проективной прямой равноправны.

Точке M_∞ соответствует проективная координата

$$\nu_{M_\infty} = (A, B; C, M_\infty) = \frac{(A, B; C)}{(A, B; M_\infty)} = \frac{\lambda}{\lambda_{M_\infty}} = \lambda,$$

где $\lambda = (A, B; C)$, а $\lambda_{M_\infty} = 1$. Таким образом, если точка M_∞ есть четвертая точка в сложном отношении $(A, B; C, M_\infty)$, то сложное отношение $(A, B; C, M_\infty)$ равно простому отношению трех точек $(A, B; C)$. Это приводит к следующей важной формуле:

$$(A, B; C) = (A, B; C, M_\infty).$$

2. Простое и сложное отношение в пучке прямых. Простое и сложное отношение точек проективной прямой, которое было построено в предыдущем пункте, существенно опиралось на тот факт, что под проективной прямой мы понимали евклидову прямую, пополненную бесконечно удаленной точкой. Благодаря этому обстоятельству мы постоянно пользовались метрическими понятиями — длиной евклидовых отрезков. На проективной прямой, в силу ее замкнутости, каждая пара точек A, B определяет два отрезка AB и $A\infty B$. Из этих отрезков мы всегда выбирали евклидов отрезок AB. Другими словами, мы брали тот отрезок, который не содержит бесконечно удаленной точки евклидовой прямой.

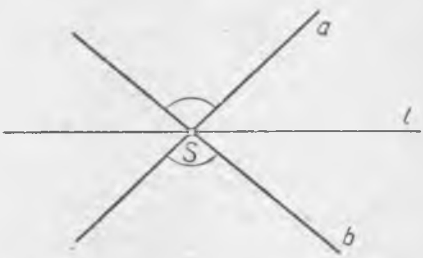


Рис. 97

При построении понятий простого и сложного отношения прямых в пучке мы встретимся с тем же положением вещей. Именно всякие две прямые a и b пучка P (S) (рис. 97) образуют два угла. Для того чтобы указать правило выбора определенного угла между прямыми пучка P (S), поступим следующим образом. Пусть l — некоторая произвольная прямая пучка P (S), которую мы в дальнейшем считаем фиксированной. Из двух углов, который образован прямыми a и b, всегда будем выбирать тот, который не содержит прямой l. Очевидно, что прямая l при выборе угла играет ту же роль, которую на евклидовой прямой играла бесконечно удаленная точка. После того как однозначно определен выбор угла между прямыми пучка $P(S)$, приписываем ему знак $+$ или $-$ в зависимости от того, совпадает ли порядок его сторон с направлением движения против часовой стрелки или с направлением движения по часовой стрелке. На рис. 98 $\measuredangle(a, b)$ положителен, а $\measuredangle(b, a)$ — отрицателен.

Пусть в пучке $P(S)$ даны три прямые a, b, c. *Простым отношением прямых* a, b, c назовем число

$$(a, b; c) = \frac{\sin\angle(a, c)}{\sin\angle(b, c)}. \qquad (*)$$

Прямые a и b называются *базисными*, а прямая c — *делящей*. Если делящая прямая c проходит внутри угла между прямыми a и b, то

$$(a, b; c) < 0;$$

если она проходит вне этого угла, то

$$(a, b; c) > 0;$$

если она совпадает с a, то

$$(a, b; a) = 0;$$

если же она совпадает с b, то

$$(a, b; b) = \infty$$

и, наконец, если c совпадает с l, то

$$(a, b; l) = +1.$$

Отсюда видно, что простое отношение прямых пучка $P(S)$ по своим свойствам вполне аналогично простому отношению трех точек прямой.

Далее, если прямые a и b фиксировать, то между прямыми m пучка $P(S)$ и числами

$$\mu_m = (a, b; m)$$

устанавливается взаимно однозначное соответствие. Поэтому число μ_m может быть принято за координату прямой m в пучке $P(S)$.

Пусть теперь a, b, c, d — четыре прямых пучка $P(S)$, тогда сложным отношением этих прямых называется число

$$(a, b; c, d) = \frac{(a, b; c)}{(a, b; d)} = \frac{\sin\angle(a, c)\cdot\sin\angle(b, d)}{\sin\angle(a, d)\cdot\sin\angle(b, c)}. \qquad \binom{*}{*}$$

Прямые a, b называются *базисными*, а прямые c, d — *делящими*.

Оба отношения прямых пучка $P(S)$ — простое и сложное — выражаются через синусы углов, которые образуют делящие и базисные прямые. Зависимость простого и сложного отношений прямых пучка от фиксированной нами прямой l проявляется в том, что в формулах $(*)$ и $\binom{*}{*}$ участвуют либо $\measuredangle(a, c)$, $\measuredangle(b, c)$,..., либо их дополнения до π. Поэтому абсолютная величина правых частей в формулах (*) и ($\overset{*}{*}$) не зависит от выбора прямой l. Следовательно, абсолютная величина простого и сложного отношений прямых в пучке не зависит от выбора прямой l.

Знак простого отношения зависит от выбора прямой l. Действительно, если делящая прямая c находится внутри угла между базисными прямыми a и b, то

$$(a,\ b;\ \ c) < 0$$

(при этом прямая l находится вне $\measuredangle\ (a,\ b)$), и

$$(a,\ b;\ \ c) > 0,$$

если делящая прямая c находится вне $\measuredangle\ (a,\ b)$ (рис. 98, *а*), *б*), *в*)).

Если мы теперь прямую l заменим прямой l', лежащей внутри прежнего угла между базисными прямыми a и b, то для построения простого отношения придется использовать другую пару вертикаль-

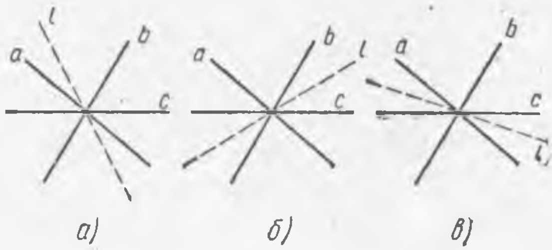


Рис. 98

ных углов, образованную базисными прямыми a и b. А тогда прямая c будет проходить вне нового угла между прямыми a и b, если она при старой ситуации находилась внутри угла между a и b; аналогично изменится роль прямой c, если она проходила вне старого угла между прямыми a и b. Следовательно, простое отношение прямых a, b, c:

$$(a,\ b;\ \ c)$$

— при переходе от одной прямой l к другой l' может изменить знак.

Теорема 6. *Сложное отношение четырех прямых пучка P (S) не зависит от выбора прямой l.*

Доказательство. Из формулы ($\overset{*}{*}$) для сложного отношения видно, что знак сложного отношения зависит от того, имеют ли простые отношения $(a,\ b;\ c)$ и $(a,\ b;\ d)$ одинаковые знаки или нет. Из предыдущих рассуждений ясно, что при переходе от прямой l к прямой l' либо оба простых отношения меняют знаки одновременно, либо оба простых отношения $(a,\ b;\ c)$ и $(a,\ b;\ d)$ знака не меняют. Так как абсолютная величина простых отношений при этом не меняется, то сложное отношение $(a,\ b;\ c,\ d)$ не зависит от выбора прямой l в пучке P (S). Теорема доказана.

Отметим, что все построения, которые проводились в пункте 2, относились к пучку прямых на евклидовой плоскости.

3. Перспективные соответствия прямых и пучков. Мы будем рассматривать проективную плоскость как евклидову плоскость, пополненную бесконечно удаленными точками и бесконечно удаленной прямой.

Пусть сначала S — обыкновенная точка евклидовой плоскости α и p — обыкновенная прямая на этой плоскости, не проходящая через точку S. Пусть, далее, A — точка пересечения прямой a пучка $P(S)$ с прямой p. Соответствие, относящее каждой прямой a пучка $P(S)$ точку A прямой p и наоборот, будем называть *перспективным*. Употребляя наглядные термины, можно сказать, что перспективное соответствие между пучком $P(S)$ и прямой a получается в результате сечения пучка $P(S)$ прямой a, а перспективное соответствие между прямой a и пучком $P(S)$ с помощью проектирования прямой a пучком $P(S)$.

Теорема 7. *Сложное отношение четырех прямых пучка $P(S)$ равно сложному отношению четырех соответственных точек прямой a.*

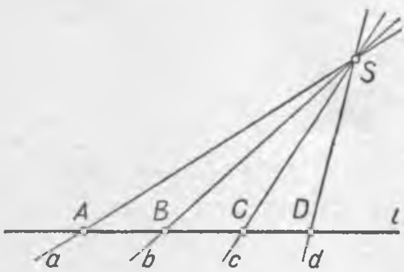


Рис. 99

Доказательство. Пусть A, B, C, D — четыре точки прямой l, соответствующие прямым a, b, c, d пучка $P(S)$. Обозначим через h расстояние точки S до прямой l (рис. 99). *Ориентированной площадью треугольника* XYS назовем число

$$\sigma_{XYS} = \frac{1}{2} XY \cdot h,$$

где X и Y — точки прямой l, а XY — проекция вектора $\overline{XY}$ на прямую l (предполагается, что на прямой l фиксировано определенное направление).

Тогда для треугольника ABS будем иметь:

$$2\sigma_{ABS} = AB \cdot h, \quad 2\sigma_{ABS} = |AS| \cdot |BS| \sin\measuredangle(a, b),$$

где $|AS|$, $|BS|$ — длины отрезков AS и BS. Отсюда

$$AB = \frac{|AS| \cdot |BS|}{h} \sin\measuredangle(a, b).$$

Аналогичные формулы для величин AC, AD получаем из рассмотрения треугольников ACS, ADS, ... :

$$AC = \frac{|AS| \cdot |CS|}{h} \sin\measuredangle(a, c); \; AD = \frac{|AS| \cdot |DS|}{h} \sin\measuredangle(a, d);$$

$$BD = \frac{|BS| \cdot |DS|}{h} \sin \measuredangle (b, d); \quad BC = \frac{|BS| \cdot |CS|}{h} \sin \measuredangle (b, c).$$

Отсюда

$$(A, B; C, D) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = \frac{\sin \measuredangle (a, c) \cdot \sin \measuredangle (b, d)}{\sin \measuredangle (b, c) \cdot \sin \measuredangle (a, d)} = (a, b; c, d).$$

Теорема доказана.

До сих пор введенные в пунктах 1 и 2 настоящего параграфа понятия сложного отношения четырех точек на прямой и четырех прямых в пучке прямых существенно опирались на то, что прямая и центр пучка были обыкновенными образами евклидовой плоскости. Распространим теперь понятие сложного отношения на тот случай, когда прямая является бесконечно удаленной и центр пучка лежит в бесконечно удаленной точке.

Итак, пусть a_∞ — бесконечно удаленная прямая, а A_∞, B_∞, C_∞, D_∞ — четыре произвольные точки этой прямой. Пусть S — обыкновенная точка пространства и $P(S)$ — пучок прямых с центром в этой точке. Обозначим через a, b, c, d прямые пучка $P(S)$, для которых соответственно точки A_∞, B_∞, C_∞, D_∞ (рис. 100) являются бесконечно удаленными. Положим

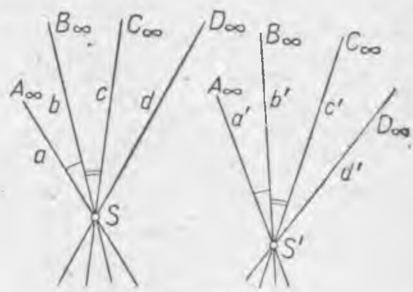


Рис. 100

$$(A_\infty, B_\infty; C_\infty, D_\infty) = (a, b; c, d).$$

Легко видеть, что число $(A_\infty, B_\infty; C_\infty, D_\infty)$ не зависит от выбора пучка $P(S)$. Действительно, если $P(S')$ — пучок с центром в обыкновенной точке S', а a', b', c', d' — прямые этого пучка, проходящие через точки A_∞, B_∞, C_∞, D_∞, то, так как прямые a и a', b и b', c и c', d и d' параллельны, углы между парами соответствующих прямых равны. Поэтому (рис. 100)

$$(a, b; c, d) = (a', b'; c', d'),$$

и, следовательно

$$(A_\infty, B_\infty; C_\infty, D_\infty) = (a', b'; c', d').$$

Пусть теперь S_∞ — бесконечно удаленная точка плоскости α и a, b, c, d — четыре прямые из пучка $P(S_\infty)$. Тогда прямые a, b, c, d параллельны между собой (см. рис. 101). Пусть обыкновенная прямая s не проходит через S_∞. Тогда положим

$$(a, b; c, d) = (A, B; C, D).$$

Очевидно, что для всякой прямой s', не проходящей через S_∞, имеем (см. рис. 101):

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D'),$$

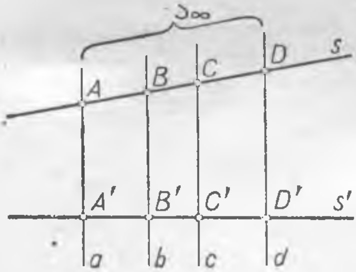


Рис. 101

так как простые отношения трех точек $(A, B; C)$ и $(A, B; D)$ не меняются при параллельном проектировании.

Пусть a и a' — различные прямые плоскости и S — точка, не принадлежащая обеим этим прямым. Тогда каждая прямая p пучка $P(S)$ пересекает a и a' соответственно в точках A и A'. Соответствие между точками A и A' прямых a и a', которое при этом возникает, называют *перспективным соответствием между прямыми a и a' с центром S* (рис. 102). Двойственное определение для только что приведенного следующее. Пусть $P(S)$ и $P(S')$ — различные пучки плоскости и a — прямая, не принадлежащая ни одному из этих пучков. Тогда каждая точка A прямой a вместе с точками S и S' определяет две прямые AS и AS'. Сопоставляя одну из этих прямых другой, мы получаем перспективное соответствие между пучками $P(S)$ и $P(S')$ (рис. 103).

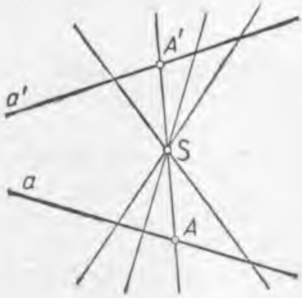


Рис. 102

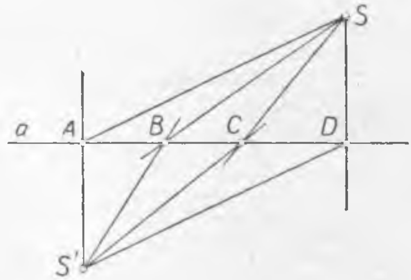


Рис. 103

Из теоремы 1 вытекает, что при перспективных соответствиях между прямыми a и a' или между пучками $P(S)$ и $P(S')$ сложное отношение четырех точек или четырех прямых остается неизменным.

4. Однородные и неоднородные проективные координаты на проективной прямой. В § 3 однородные координаты для точек проективной прямой были введены с помощью соответствия между прямыми некоторого пучка $P(S)$ и точками проективной прямой a. В основе наших построений лежала некоторая фиксированная декартова система координат на евклидовой плоскости. Оказывается, что однородные координаты для точек проективной прямой могут быть введены бесконечным множеством различных способов. Ниже дается описание соответствующей конструкции и устанавливаются формулы перехода от одной системы однородных координат к другой.

Итак, пусть $P(S)$ — пучок прямых на евклидовой плоскости α. Рассмотрим базис, состоящий из векторов (см. рис. 104).

$$\boldsymbol{e}_1 = \overline{SE_1}, \ \boldsymbol{e}_2 = \overline{SE_2}$$

Обозначим через x_1, x_2 аффинные координаты точки M относительно базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$. Если $M(x_1, x_2)$ — текущая точка на прямой l, проходящей через точку S, то уравнение прямой l имеет вид:

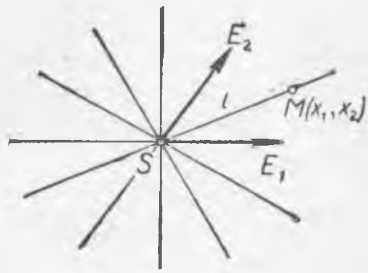


Рис. 104

$$\widetilde{p}_1 x_1 + \widetilde{p}_2 x_2 = 0, \qquad (*)$$

где числа $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{p}_2$ одновременно не равны нулю, а отношение $\widetilde{p}_1 : \widetilde{p}_2$ однозначно определяется прямой l.

Рассмотрим теперь на плоскости α другой базис, состоящий из векторов

$$\boldsymbol{e}_1' = \overline{SE_1'}, \boldsymbol{e}_2' = \overline{SE_2'},$$

и пусть точка $M(x_1, x_2)$ относительно этого базиса имеет аффинные координаты x_1', x_2'. Как известно из главы II, формулы, выражающие связь между координатами x_1, x_2 точки M в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и координатами x_1', x_2' той же точки в базисе $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, таковы:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1' + a_{21}x_2', \\ x_2 = a_{12}x_1' + a_{22}x_2', \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отсюда следует, что относительно базиса $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ прямая l будет иметь уравнение:

$$(\widetilde{p}_1 a_{11} + \widetilde{p}_2 a_{12})\, x_1' + (\widetilde{p}_1 a_{21} + \widetilde{p}_2 a_{22})\, x_2' = 0$$

(мы предполагаем, что в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ прямая l задается уравнением $(*)$).

Отметим, что если элементы базисов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ связаны соотношениями

$$\boldsymbol{e}_1' = k\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_2' = k\boldsymbol{e}_2,$$

где $k \neq 0$— некоторое постоянное число, то прямая в базисе $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ будет иметь уравнение

$$\frac{1}{k}\widetilde{p}_1 x_1' + \frac{1}{k}\widetilde{p}_2 x_2' = 0,$$

или

$$\tilde{p}_1 x_1' + \tilde{p}_2 x_2' = 0.$$

Следовательно, для базисов, которые получаются друг из друга подобным преобразованием, прямая l имеет эквивалентные или совпадающие уравнения.

Из рассмотрений, проведенных выше, вытекает, что если l — прямая пучка $P(S)$ — имеет уравнение

$$\tilde{p}_1 x_1 + \tilde{p}_2 x_2 = 0$$

относительно базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, а

$$\tilde{p}_1' x_1' + \tilde{p}_2' x_2' = 0$$

— уравнение l относительно базиса $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'$, то

$$\tilde{p}_1' = a_{11}\tilde{p}_1 + a_{12}\tilde{p}_2,$$
$$\tilde{p}_2' = a_{21}\tilde{p}_1 + a_{22}\tilde{p}_2.$$

Так как коэффициенты $\tilde{p}_1$ и $\tilde{p}_2$, определяющие положение прямой l относительно базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, и коэффициенты $\tilde{p}_1', \tilde{p}_2'$, определяющие положение той же прямой относительно базиса $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'$, характеризуются с точностью до общего множителя ρ, то можно сказать, что формулы

$$\begin{cases} \tilde{\rho}'\tilde{p}_1' = a_{11}\tilde{p}_1 + a_{12}\tilde{p}_2, \\ \tilde{\rho}'\tilde{p}_2' = a_{21}\tilde{p}_1 + a_{22}\tilde{p}_2 \end{cases} \qquad (\ast)$$

определяют закон изменения коэффициентов $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ прямой l пучка $P(S)$ при переходе от аффинной системы координат x_1, x_2 к новой аффинной системе координат x_1', x_2'.

Пусть теперь b — проективная прямая; тогда можно считать, что точки прямой b находятся во взаимно однозначном соответствии с прямыми пучка $P(S)$, т. е. каждой точке $B \in b$ соответствует определенная прямая l пучка $P(S)$. Выбираем теперь произвольный базис

$$\boldsymbol{e}_1 = \overline{SE_1}; \quad \boldsymbol{e}_2 = \overline{SE_2}$$

на плоскости α. В аффинной системе координат, порожденной этим базисом, прямая l определяется уравнением

$$\tilde{p}_1 x_1 + \tilde{p}_2 x_2 = 0.$$

Положим

$$p_1 = \tilde{p}_2, \quad p_2 = -\tilde{p}_1.$$

Пара чисел p_1, p_2 называется *однородными проективными* (или просто *однородными*) *координатами*[1] точки B проективной прямой b. Однородные проективные координаты точки на проективной прямой обладают свойствами 1—5, о которых шла речь в § 3. Напомним их:

1. Каждая точка проективной прямой имеет однородные координаты.

2. Если p_1, p_2 — однородные координаты точки B, то ρp_1, ρp_2, где $\rho \neq 0$, — также однородные координаты точки B.

3. Разным точкам проективной прямой соответствуют всегда разные отношения $p_1 : p_2$.

4. Ни для какой точки проективной прямой обе ее однородные координаты не равны одновременно нулю.

5. Если $p_1^{(n)} \to p_1^0$, $p_2^{(n)} \to p_2^0$ и $(p_1^0)^2 + (p_2^0)^2 \neq 0$, то переменная точка B с однородными координатами $p_1^{(n)}$, $p_2^{(n)}$ стремится к точке B_0 с однородными координатами p_1^0, p_2^0.

Из свойства 2 вытекает, что каждая точка проективной прямой имеет бесконечно много пар однородных проективных координат, которые сами по себе не определяются заданием соответствующей точки; определяется лишь отношение этих координат. Поэтому совокупность всех наборов однородных координат точки B удобно записывать в виде $(\rho p_1, \rho p_2)$, где ρ принимает любое вещественное значение, кроме $\rho = 0$. Любую из двух координат ρp_1, ρp_2 точки B, если она отлична от нуля, можно сделать равной единице за счет надлежащего выбора множителя ρ.

Если на плоскости α выбрать другой базис

$$\boldsymbol{e}_1' = \overline{SE_1'}, \boldsymbol{e}_2' = \overline{SE_2'},$$

то в системе аффинных координат x_1', x_2', порожденных этим базисом, прямая l будет иметь уравнение

$$\tilde{p}_1' x_1' + \tilde{p}_2' x_2' = 0.$$

Положим

$$p_1' = \tilde{p}_2'; \quad p_2' = -\tilde{p}_1'.$$

Пара чисел p_1', p_2' называется также однородными проективными координатами точки B на проективной прямой l.

Формулы перехода от однородных координат p_1, p_2 точки B к новым однородным координатам имеют вид:

$$\begin{cases} \rho' p_1' = c_{11} p_1 + c_{12} p_2, \\ \rho' p_2' = c_{21} p_1 + c_{22} p_2, \end{cases}$$

[1] Такое определение однородных координат согласовано с определением, данным выше на стр. 162 в § 3 гл. III.

где

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = A^{-1}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};$$

$$\rho' = \frac{1}{\Delta}\tilde{\rho}' \text{ и } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (см. формулы } (\substack{*\\*})).$$

Геометрический смысл матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

и определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

был выявлен выше. Именно матрица A описывает переход от новых аффинных координат x_1', x_2' точки M к ее старым аффинным координатам x_1, x_2.

Если для точек проективной прямой введены однородные проективные координаты p_1, p_2, то от них часто бывает полезно перейти к так называемым *неоднородным проективным координатам*, которые вводятся по следующей формуле:

$$q = \frac{p_1}{p_2}.$$

Если p_1', p_2' — другая система проективных однородных координат на прямой b, то по ней можно ввести проективные неоднородные координаты тем же приемом

$$q' = \frac{p_1'}{p_2'}.$$

Связь между разными системами неоднородных проективных координат осуществляется с помощью формулы

$$q' = \frac{\rho' p_1'}{\rho' p_2'} = \frac{c_{11}p_1 + c_{12}p_2}{c_{21}p_1 + c_{22}p_2} = \frac{c_{11}q + c_{12}}{c_{21}q + c_{22}},$$

причем $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, так как $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}$.

Из последней формулы видно, что если $c_{21} \neq 0$, то с помощью разных систем неоднородных проективных координат на проективной прямой b выделяются в качестве бесконечно удаленных различные точки. Более того, надлежащим выбором базиса

$$\boldsymbol{e}_1' = \overline{SE_1'}, \quad \boldsymbol{e}_2' = \overline{SE_2'}$$

можно добиться того, что любая точка проективной прямой b станет бесконечно удаленной. Для этого векторы $\boldsymbol{e}_1'$ и $\boldsymbol{e}_2'$ надо выбрать так, чтобы

$$c_{21}\, q + c_{22} = 0.$$

5. Сложное отношение четырёх точек проективной прямой и его выражение через неоднородные проективные координаты точек. Пусть на проективной прямой b введены однородные проективные координаты p_1, p_2 и

$$q = \frac{p_1}{p_2}$$

— неоднородная проективная координата, построенная по координатам p_1, p_2.

Тогда на евклидовой плоскости α, согласно способу построения однородных проективных координат p_1, p_2 на проективной прямой, b соответствует некоторый пучок $P\ (S)$ такой, что если некоторые неколлинеарные векторы

$$\boldsymbol{e}_1 = \overline{SE_1}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \overline{SE_2}$$

принять за базис на плоскости α, то точки проективной прямой с координатами p_1, p_2 находятся во взаимно однозначном соответствии с прямыми

$$\tilde{p}_1 x_1 + \tilde{p}_2 x_2 = 0$$

пучка $P\,(S)$; здесь $p_1 = \tilde{p}_2$, $p_2 = -\tilde{p}_1$. Отсюда следует, что точке $B \in b$ с неоднородной проективной координатой

$$q = \frac{p_1}{p_2}$$

в пучке $P\ (S)$ соответствует прямая

$$l: \quad x_1 - qx_2 = 0.$$

Если $q = \infty$ $(p_2 = 0)$, то точке $B \in b$ в пучке $P\,(S)$ соответствует прямая $x_2 = 0$.

На плоскости α рассмотрим прямую a, имеющую относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ уравнение $x_2 = 1$.

Прямая $x_1 - qx_2 = 0$, принадлежащая пучку $P\,(S)$, пересекает прямую a в точке $(q, 1)$, а прямая $x_2 = 0$ пересекается с прямой a в точке $(\infty, 1)$, т. е. в бесконечно удаленной точке прямой a. Поэтому, если прямой

$$l: \quad x_1 - q\, x_2 = 0$$

сопоставить точку

$$L\ (q,\ 1)$$

прямой a:

$$x_2 = 1,$$

то мы получим перспективное соответствие между пучком $P\,(S)$ и прямой a. Так как

$$x_1 = q$$

— декартова координата на прямой a, то сложное отношение любых четырех точек L_1, L_2, L_3, L_4 прямой a находится по формуле:

$$(L_1, L_2; L_3, L_4) = \frac{L_1L_3 \cdot L_2L_4}{L_2L_3 \cdot L_1L_4} = \frac{q_3 - q_1}{q_3 - q_2} \cdot \frac{q_4 - q_2}{q_4 - q_1}.$$

Пусть l_1, l_2, l_3, l_4 — прямые пучка $P(S)$, отвечающие, в силу установленного выше перспективного соответствия, точкам L_1, L_2, L_3, L_4, тогда по теореме 1 § 5 будем иметь:

$$(l_1, l_2; l_3, l_4) = (L_1, L_2; L_3, L_4) = \frac{q_3 - q_1}{q_3 - q_2} \cdot \frac{q_4 - q_2}{q_4 - q_1}.$$

Определение 1. *Пусть точкам B_1, B_2, B_3, B_4 проективной прямой b в пучке $P(S)$ отвечают прямые l_1, l_2, l_3, l_4, причем соответствие осуществляется с помощью построения однородных проективных координат p_1, p_2 по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$. Тогда сложным отношением четырех точек B_1, B_2, B_3, B_4 проективной прямой b называется число $(B_1, B_2; B_3, B_4)$, равное сложному отношению четырех прямых l_1, l_2, l_3, l_4 в пучке $P(S)$ (см. п.2 настоящего параграфа), т. е.*

$$(B_1, B_2; B_3, B_4) = (l_1, l_2; l_3, l_4).$$

Из проведенных выше рассмотрений вытекает следующая

Теорема 8. *Если*

$$q_1 = \frac{p_1^{(1)}}{p_2^{(1)}}, \quad q_2 = \frac{p_1^{(2)}}{p_2^{(2)}}, \quad q_3 = \frac{p_1^{(3)}}{p_2^{(3)}}, \quad q_4 = \frac{p_1^{(4)}}{p_2^{(4)}}$$

— неоднородные проективные координаты точек B_1, B_2, B_3, B_4 прямой b, то справедлива формула

$$(B_1, B_2; B_3, B_4) = \frac{q_3 - q_1}{q_3 - q_2} \cdot \frac{q_4 - q_2}{q_4 - q_1}.$$

Для того чтобы определение 1 было корректным, нам надлежит установить, что оно не зависит от выбора базиса в пучке $P(S)$.

Теорема 9. *Пусть для точек проективной прямой b с помощью двух базисов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ построены две неоднородные проективные координаты q и q'. Пусть далее B_1, B_2, B_3, B_4 — четыре произвольные точки проективной прямой b, имеющие в двух указанных системах проективных координат координаты q_1, q'_1; q_2, q'_2; q_3, q'_3; q_4, q'_4. Тогда*

$$\frac{q_3 - q_1}{q_3 - q_2} \cdot \frac{q_4 - q_2}{q_4 - q_1} = \frac{q'_3 - q'_1}{q'_3 - q'_2} \cdot \frac{q'_4 - q'_2}{q'_4 - q'_1}.$$

Доказательство. Из результатов п. 4 § 5 гл. III вытекает, что если q и q' — неоднородные проективные координаты одной и той же точки B прямой b, построенные соответственно по базисам $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, то

$$q' = \frac{\alpha q + \beta}{\gamma q + \delta},$$

причем

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отсюда

$$\frac{q_3' - q_1'}{q_3' - q_2'} \cdot \frac{q_4' - q_2'}{q_4' - q_1'} = \frac{(\alpha q_3 + \beta)(\gamma q_1 + \delta) - (\alpha q_1 + \beta)(\gamma q_3 + \delta)}{(\alpha q_3 + \beta)(\gamma q_2 + \delta) - (\alpha q_2 + \beta)(\gamma q_3 + \delta)} \times$$

$$\times \frac{(\alpha q_4 + \beta)(\gamma q_2 + \delta) - (\alpha q_2 + \beta)(\gamma q_4 + \delta)}{(\alpha q_4 + \beta)(\gamma q_1 + \delta) - (\alpha q_1 + \beta)(\gamma q_4 + \delta)} =$$

$$= \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(q_3 - q_1)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)(q_3 - q_2)} \cdot \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(q_4 - q_2)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)(q_4 - q_1)} = \frac{q_3 - q_1}{q_3 - q_2} \cdot \frac{q_4 - q_2}{q_4 - q_1}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 3 вытекает, что определение сложного отношения четырех точек проективной прямой не зависит от способа введения неоднородных проективных координат на проективной прямой.

6. Введение неоднородных проективных координат с помощью сложного отношения. Пусть на проективной прямой b введена неоднородная проективная координата q. Фиксируем на прямой b три различные точки B_1, B_2, B_3 и рассмотрим сложное отношение

$$(B_1, B_2; B_3, M),$$

где M — переменная точка прямой b.

Как было выяснено в п. 1 § 5, число

$$\nu_M = (B_1, B_2; B_3, M)$$

однозначно характеризует положение точки M на проективной прямой b. Это число мы назвали проективной координатой точки M. Покажем, что число

$$\nu_M = (B_1, B_2; B_3, M)$$

является также неоднородной проективной координатой точек прямой b.

Действительно, если q_1, q_2, q_3, q — соответственно неоднородные проективные координаты точек B_1, B_2, B_3, M, то, как следует из теоремы 2 п. 5 § 5 гл. III,

$$\nu_M = (B_1, B_2; B_3, M) = \frac{q_3 - q_1}{q_3 - q_2} \cdot \frac{q - q_2}{q - q_1}.$$

Полагая здесь

$$\alpha = \frac{q_3 - q_1}{q_3 - q_2}; \ \beta = -\frac{q_3 - q_1}{q_3 - q_2} q_2; \ \gamma = 1, \quad \delta = -q_1,$$

будем иметь, что

$$\nu_M = \frac{\alpha q + \beta}{\gamma q + \delta}$$

и

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \frac{q_3 - q_1}{q_3 - q_2} \begin{vmatrix} 1 & -q_2 \\ 1 & -q_1 \end{vmatrix} = \frac{(q_3 - q_1)(q_2 - q_1)}{q_3 - q_2} \neq 0.$$

Отсюда следует, что система чисел

$$\nu_M = (B_1, \ B_2; \ B_3, \ M)$$

представляет собой систему неоднородных проективных координат на прямой b.

Итак, если на проективной прямой b фиксированы три различные точки B_1, B_2, B_3, то для любой точки M этой прямой с помощью сложного отношения определена неоднородная проективная координата

$$\nu_M = (B_1, \ B_2; \ B_3, \ M).$$

Как мы знаем (см. п. 1 § 5 гл. III),

$$\nu_{B_1} = \infty, \qquad \nu_{B_2} = 0, \qquad \nu_{B_3} = 1.$$

Отсюда вытекает, что если на проективной прямой b произвольно фиксировать три различные точки B_1, B_2, B_3 и отнести в качестве значений неоднородных проективных координат точке B_1 — ∞, точке B_2 — 0 и точке B_3 — 1, то для произвольной точки M прямой b значение неоднородной проективной координаты ν_M находится по формуле:

$$\nu_M = (B_1, \ B_2; \ B_3, \ M).$$

Имеет место следующая основная теорема, полностью описывающая структуру множества всех систем неоднородных проективных координат q, которые могут быть построены для точек проективной прямой.

Т е о р е м а 10. *Пусть b — проективная прямая. Тогда, какова бы ни была система неоднородных проективных координат q, построенная для точек b, ее можно получить следующим построением: обозначим через B_1 точку, для которой $q_1 = \infty$, через B_2 точку, для которой $q_2 = 0$, и, наконец, через B_3 точку, для которой $q_3 = 1$. Для любой точки M прямой b положим*

$$\nu_M = (B_1, \ B_2; \ B_3, \ M),$$

тогда

$$\nu_M = q.$$

Доказательство. Как мы знаем, любая система неоднородных проективных координат q может быть получена через однородные проективные координаты p_1, p_2 точек прямой b, отправляясь от некоторого базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ в пучке прямых $P(S)$ на евклидовой плоскости α. Если B_1, B_2, B_3, M — точки, о которых идет речь в условии теоремы 4, и числа q_1, q_2, q_3, q — соответственно их неоднородные проективные координаты, то по теореме 2 будем иметь:

$$\nu_M = (B_1, B_2; B_3, M) = \lim_{B \to B_1}(B, B_2; B_3, M) =$$

$$= \lim_{q_B \to \infty} \frac{q_3 - q_B}{q_3 - q_2} \cdot \frac{q - q_2}{q - q_B} = \frac{q - q_2}{q_3 - q_2};$$

здесь через B и q_B обозначена точка прямой b и ее проективная координата. Отсюда

$$\nu_M = \frac{q - q_2}{q_3 - q_2} = q,$$

так как

$$q_2 = 0, \quad q_3 = 1.$$

Теорема полностью доказана.

§ 6. Проективные преобразования проективной прямой

1. Понятие проективного преобразования. Пусть для точек проективной прямой b введена проективная координата q. Рассмотрим соотношение

$$q' = \frac{a_{11}q + a_{12}}{a_{21}q + a_{22}}, \qquad (*)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} — некоторые постоянные числа и

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

На формулу (*) можно смотреть с двух разных точек зрения. Во-первых, соотношение (*) можно рассматривать как формулу перехода от одной проективной координаты q точки B к другой проективной координате q' той же точки. Вторая точка зрения состоит в том, что каждой точке B проективной прямой b, имеющей неоднородную проективную координату q, сопоставляется точка B' той же прямой b, имеющая неоднородную проективную координату

$$q' = \frac{a_{11}q + a_{12}}{a_{21}q + a_{22}}.$$

Тем самым на проективной прямой b определяется некоторое точечное преобразование φ. Оно и называется проективным.

Таким образом, ***проективное преобразование прямой*** b *можно кратко охарактеризовать как преобразование, которое задается дробно-линейной функцией неоднородных проективных координат точек прямой* b:

$$q' = \frac{a_{11}q + a_{12}}{a_{21}q + a_{22}}$$

при условии, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

2. Свойства проективных преобразований прямой.

Теорема 1. *Проективное преобразование прямой есть взаимно однозначное отображение этой прямой на себя.*

Доказательство. Пусть на проективной прямой b введена неоднородная проективная координата q. Пусть, далее, φ — проективное преобразование прямой b. Тогда φ аналитически описывается формулой

$$q' = \frac{a_{11}q + a_{12}}{a_{21}q + a_{22}},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Очевидно, что φ — однозначное отображение прямой b в себя. Докажем, что преобразование φ преобразует прямую b на себя и у преобразования φ есть обратное φ^{-1}, которое также преобразует прямую b на себя.

Прежде всего выясним, в какую точку переходит при преобразовании φ точка с координатой $q = \infty$. Ее мы ниже будем называть бесконечно удаленной и обозначать B_∞. Могут представиться два случая:

а) $a_{21} \neq 0$. В этом случае точка B_∞ имеет образом точку B'_∞ с координатой $q' = \frac{a_{11}}{a_{21}}$.

б) $a_{21} = 0$. Так как

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} \neq 0$. Поэтому преобразование в этом случае задается формулой

$$q' = \frac{a_{11}}{a_{22}} q + \frac{a_{12}}{a_{22}},$$

из которой следует, что бесконечно удаленная точка B_∞ переходит сама в себя.

Из формулы ($\begin{smallmatrix}*\\*\end{smallmatrix}$) следует также, что преобразование φ является аффинным преобразованием прямой b. Поэтому оно взаимно однозначно.

Таким образом, аффинное преобразование получается из проективного при условии, что $a_{21}=0$. В дальнейшем мы будем предполагать, что $a_{21}\neq 0$.

Тогда прообразом бесконечно удаленной точки B_∞, очевидно, будет точка B_0 с координатой $q_0=-\dfrac{a_{22}}{a_{21}}$. Действительно, так как

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то отношения $a_{11}:a_{12}$ и $a_{21}:a_{22}$ не равны между собой, и поскольку

$$a_{21}q_0+a_{22}=a_{21}\left(-\frac{a_{22}}{a_{21}}\right)+a_{22}=0,$$

то точка B_0 переходит в точку прямой b, у которой

$$q'=\infty,$$

т. е. в бесконечно удаленную точку B_∞.

Пусть теперь B' — произвольная точка прямой b с координатой q', которая не равна ∞ и не равна $\dfrac{a_{11}}{a_{21}}$.

Рассмотрим на прямой b точку B с координатой

$$q=\frac{\dfrac{a_{22}}{\Delta}q'-\dfrac{a_{12}}{\Delta}}{-\dfrac{a_{21}}{\Delta}q'+\dfrac{a_{11}}{\Delta}}.$$

Так как $q'\neq\infty$ и $q'\neq\dfrac{a_{11}}{a_{21}}$, то точка B отлична от точек B_0 и B_∞. Далее, легко проверить, что

$$\frac{a_{11}q+a_{12}}{a_{21}q+a_{22}}=q'.$$

Поэтому образом точки B при преобразовании φ будет точка B'. Таким образом, доказано, что проективное преобразование φ:

$$q'=\frac{a_{11}q+a_{12}}{a_{21}q+a_{22}}$$

переводит прямую b на себя. Далее, формула

$$q=\frac{\dfrac{a_{22}}{\Delta}q'-\dfrac{a_{12}}{\Delta}}{-\dfrac{a_{21}}{\Delta}q'+\dfrac{a_{11}}{\Delta}}, \qquad \begin{pmatrix} * \\ ** \end{pmatrix}$$

очевидно, задает обратное преобразование φ^{-1} для преобразования φ, которое также является проективным, поскольку

$$\begin{vmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta} & \frac{-a_{12}}{\Delta} \\ \frac{-a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \neq 0.$$

Из формулы $\left(*{*\atop *}*\right)$ следует, что φ^{-1} — однозначное отображение проективной прямой b на себя.

Итак, нами доказано, что φ есть взаимно однозначное отображение проективной прямой b на себя.

Отметим две теоремы, которые были попутно установлены при доказательстве теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть на прямой b задано в неоднородных проективных координатах проективное преобразование φ:*

$$q' = \frac{a_{11}q + a_{12}}{a_{21}q + a_{22}}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad \left(*{*\atop *}*\right)$$

Для того чтобы это преобразование было аффинным, необходимо и достаточно, чтобы $a_{21} = 0$.

Так как условие $a_{21} = 0$ эквивалентно условию, что при преобразовании φ бесконечно удаленная точка переходит сама в себя, то теорема 2 допускает следующую эквивалентную формулировку:

Теорема 2а. *Пусть на прямой b задано проективное преобразование φ. Для того чтобы φ было аффинным преобразованием, необходимо и достаточно, чтобы бесконечно удаленная точка переводилась этим преобразованием сама в себя.*

(Подразумевается, что φ задано формулой $\left(*{*\atop *}*\right)$ и бесконечно удаленной точке соответствует координата $q = \infty$).

Теорема 3. *Пусть φ — проективное преобразование прямой b, заданное в неоднородных проективных координатах формулой*

$$q' = \frac{a_{11}q_1 + a_{12}}{a_{21}q + a_{22}}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда φ имеет обратное отображение φ^{-1}, которое является проективным и которое в тех же координатах задается формулой

$$q' = \frac{\frac{a_{22}}{\Delta}q + \frac{-a_{12}}{\Delta}}{\frac{-a_{21}}{\Delta}q + \frac{a_{11}}{\Delta}}.$$

При этом если прямому отображению соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то обратному отображению соответствует матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta} & \frac{-a_{12}}{\Delta} \\ \frac{-a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{pmatrix},$$

являющаяся обратной для матрицы A.

Теорема 4. *При проективных преобразованиях проективной прямой сложное отношение четырех точек не меняется.*

Доказательство. Пусть φ — проективное преобразование прямой b, заданнсе в неоднородных проективных координатах формулой

$$q' = \frac{a_{11}q + a_{12}}{a_{21}q + a_{22}}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пусть B_1, B_2, B_3, B_4—четыре произвольные точки прямой b, а q_1, q_2, q_3, q_4—их координаты. Обозначим через B_1', B_2', B_3', B_4' образы этих точек, а через q_1', q_2', q_3', q_4' координаты точек B_1', B_2', B_3', B_4'. Тогда при $k = 1, 2, 3, 4$ имеют место равенства:

$$q_k' = \frac{a_{11}q_k + a_{12}}{a_{21}q_k + a_{22}}.$$

Далее,

$$(B_1, B_2; B_3, B_4) = \frac{q_3 - q_1}{q_3 - q_2} \cdot \frac{q_4 - q_2}{q_4 - q_1};$$

$$(B_1', B_2'; B_3', B_4') = \frac{q_3' - q_1'}{q_3' - q_2'} \cdot \frac{q_4' - q_2'}{q_4' - q_1'}.$$

Повторяя дословно вычисления, проведенные в доказательстве теоремы 9 п. 5 § 5 гл. III, и пользуясь условием, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

получим:

$$\frac{q_3 - q_1}{q_3 - q_2} \cdot \frac{q_4 - q_2}{q_4 - q_1} = \frac{q_3' - q_1'}{q_3' - q_2'} \cdot \frac{q_4' - q_2'}{q_4' - q_1'}.$$

Таким образом, $(B_1, B_2; B_3, B_4) = (B_1', B_2'; B_3', B_4')$.
Теорема доказана.

Т е о р е м а 5. *Всякое проективное преобразование проективной прямой полностью определяется, если известны образы трех различных точек при этом преобразовании.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть φ — проективное преобразование проективной прямой b. Пусть B_1, B_2, B_3 — три различные точки прямой, для которых известны их образы — точки B_1', B_2', B_3', также лежащие на прямой b. Пусть M — произвольная точка прямой b, тогда ее положение полностью определяется числом

$$\nu_M = (B_1,\ B_2;\ B_3,\ M).$$

Пусть M' — образ точки M, тогда ее положение на прямой b полностью определяется числом

$$\nu_M' = (B_1',\ B_2';\ B_3',\ M').$$

По теореме 4

$$\nu_M = (B_1,\ B_2;\ B_3,\ M) = (B_1',\ B_2';\ B_3',\ M') = \nu_{M'}.$$

Так как точки B_1', B_2', B_3' известны, а число $\nu_{M'}$ определяется заданием точки M, то по точкам B_1', B_2', B_3', M точка M' находится однозначно.

Теорема доказана.

Из теорем 4 и 5 вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 6. *Для того чтобы взаимно однозначное точечное отображение проективной прямой b на себя было проективным, необходимо и достаточно, чтобы оно сохраняло сложное отношение любых четырех точек прямой b.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условия теоремы непосредственно вытекает из теоремы 4, а его достаточность — из теоремы 5.

Теорема 6 дает геометрическое описание проективного преобразования прямой, которое уже не использует координатного представления проективного преобразования.

3. Проективное преобразование в однородных координатах. Пусть b — проективная прямая. Для точек B прямой b введем однородные проективные координаты p_1, p_2. Обозначим через q неоднородную проективную координату для точек $B \in b$, которая строится по координатам p_1, p_2 обычным образом:

$$q = \frac{p_1}{p_2}.$$

Пусть, далее, φ — проективное преобразование прямой b, которое в координатах q описывается формулой:

$$q' = \frac{a_{11}q + a_{12}}{a_{21}q + a_{22}}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Так как

$$q' = \frac{p'_1}{p'_2}, \quad q = \frac{p_1}{p_2},$$

то

$$\frac{p'_1}{p'_2} = \frac{a_{11}p_1 + a_{12}p_2}{a_{21}p_1 + a_{22}p_2}.$$

Отсюда следует, что существует число ρ', отличное от нуля, такое, что

$$\begin{cases} \rho' p_1' = a_{11}p_1 + a_{12}p_2, \\ \rho' p_2' = a_{21}p_1 + a_{22}p_2. \end{cases} \qquad (*)$$

Соотношения (*) называются *координатным представлением проективного преобразования* φ *в однородных координатах* p_1, p_2.

Таким образом, в однородных координатах p_1, p_2 всякое проективное преобразование φ с точностью до постоянного множителя ρ' представляется линейным невырожденным преобразованием:

$$\begin{cases} \rho' p_1' = a_{11}p_1 + a_{12}p_2, \\ \rho' p_2' = a_{21}p_1 + a_{22}p_2, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

4. Группа проективных преобразований прямой. Под произведением двух проективных преобразований φ и ψ проективной прямой b будем понимать результат их последовательного применения.

Теорема 7. *Совокупность проективных преобразований проективной прямой* b *образует группу относительно операции умножения.*

Доказательство. Проективное преобразование прямой b можно определить, согласно теореме 6 п. **2** настоящего параграфа, как взаимно однозначное преобразование точек этой прямой, при котором сохраняется сложное отношение. Отсюда непосредственно следует, что произведение двух проективных преобразований прямой есть снова проективное преобразование.

Так как для произведения трех преобразований справедлив закон ассоциативности, то произведение трех проективных преобразований прямой подчиняется закону ассоциативности (см. § 9 гл. I).

Тождественное преобразование точек прямой b, относящее каждой точке $B \in b$ ее саму, представляет собой проективное преобразование. Его мы будем обозначать, как обычно, через ε. Преобразование ε играет роль единицы относительно операции умножения проективных преобразований.

Согласно теореме 3 п. **2** настоящего параграфа, каждое проективное преобразование φ прямой b имеет обратное φ^{-1}, которое также является проективным. Далее, если в неоднородных проективных координатах q преобразование φ имеет представление

$$q' = \frac{a_{11}q + a_{12}}{a_{21}q + a_{22}},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то φ^{-1} в тех же координатах имеет представление

$$q' = \frac{\frac{a_{22}}{\Delta} q + \frac{-a_{12}}{\Delta}}{\frac{-a_{21}}{\Delta} q + \frac{a_{11}}{\Delta}}.$$

Так как матрица преобразования φ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

обратна к матрице преобразования φ^{-1}, то справедливо соотношение

$$\varphi\varphi^{-1} = \varepsilon.$$

Выполнение этого соотношения легко проверяется непосредственными вычислениями. Справедливость того же соотношения можно установить также и несколько более изящным способом, не прибегая к вычислениям.

Записав преобразование φ в однородных проективных координатах p_1, p_2:

$$\begin{cases} \rho' p_1' = a_{11}p_1 + a_{12}p_2, \\ \rho' p_2' = a_{21}p_1 + a_{22}p_2, \end{cases}$$

и преобразование φ^{-1} в тех же координатах:

$$\begin{cases} \rho'' p_1' = \frac{a_{22}}{\Delta} p_1 + \frac{-a_{12}}{\Delta} p_2, \\ \rho'' p_2' = \frac{-a_{21}}{\Delta} p_1 + \frac{a_{11}}{\Delta} p_2, \end{cases}$$

и заметив, что произведению преобразований φ и φ^{-1} соответствует проективное преобразование с матрицей, равной произведению матриц преобразований φ и φ^{-1}, получим, что проективному преобразованию $\varphi\varphi^{-1}$ соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\varphi\varphi^{-1} = \varepsilon$.

Теорема доказана.

Отметим ряд важных следствий, вытекающих из построений, которые были использованы в доказательстве теоремы 7.

Следствие 1. *Пусть на проективной прямой b введены однородные координаты p_1, p_2. Тогда любое проективное преобразование φ прямой b в координатах p_1, p_2 можно записать в виде*

$$\begin{cases} \rho' p_1' = a_{11}p_1 + a_{12}p_2, \\ \rho' p_2' = a_{21}p_1 + a_{22}p_2, \end{cases}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

— неособенная матрица.

Обратно, каждой неособенной матрице A с помощью однородных координат p_1, p_2 отвечает некоторое проективное преобразование

$$\begin{cases} \rho' p_1' = a_{11}p_1 + a_{12}p_2, \\ \rho' p_2' = a_{21}p_1 + a_{22}p_2 \end{cases}$$

прямой b.

Две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

называются *пропорциональными*, если существует число $\lambda \neq 0$ такое, что

$$B = \lambda A,$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что пропорциональные неособенные матрицы, и только они, порождают с помощью однородных проективных координат p_1, p_2 одно и то же проективное преобразование φ. Таким образом, между проективными преобразованиями прямой b и классами, состоящими из неособенных пропорциональных квадратных матриц второго порядка, устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Поэтому матрица вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \qquad a \neq 0$$

порождает тождественное преобразование, а матрица

$$\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

порождает преобразование φ^{-1}, обратное к преобразованию φ:

$$\begin{cases} \rho' p_1' = a_{11}p_1 + a_{12}p_2, \\ \rho' p_2' = a_{21}p_1 + a_{22}p_2. \end{cases}$$

Следствие 2. *При последовательном выполнении проективных преобразований φ_1 и φ_2 прямой b, т. е. при построении произведения преобразований φ_1 и φ_2 матрицы A_1 и A_2, отвечающие этим преобразованиям, перемножаются. Проективному преобразованию $\varphi_2\varphi_1$, таким образом, соответствует матрица A_2A_1.*

Квадратная неособенная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется *положительно унимодулярной*, если

$$a_{11} > 0 \text{ и } \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1.$$

В каждом классе неособенных пропорциональных квадратных матриц второго порядка есть только одна положительная унимодулярная матрица. Далее для краткости такую матрицу будем называть просто унимодулярной.

Обозначим группу квадратных неособенных матриц второго порядка относительно умножения через $\mathfrak{M}_2$. Совокупность всех унимодулярных матриц второго порядка, очевидно, образует некоторую группу $\mathfrak{U}_2$, которая является подгруппой $\mathfrak{M}_2$.

Группу всех проективных преобразований проективной прямой b будем обозначать $\mathfrak{P}_b$.

Из следствий 1 и 2 вытекает следующая важная

Теорема 8. *Если каждому проективному преобразованию $\varphi \in \mathfrak{P}_b$ проективной прямой b поставить в соответствие унимодулярную матрицу*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

которая в данной фиксированной системе однородных координат p_1, p_2 задает преобразование φ, то указанное соответствие есть изоморфизм между группами $\mathfrak{P}_b$ и $\mathfrak{U}_2$.

§ 7. Инволюции

Проективное преобразование φ проективной прямой b называется *инволюцией*, если оно удовлетворяет условию

$$\varphi^2 = \varepsilon$$

и отлично от тождественного преобразования ε. Это условие эквивалентно требованию, чтобы

$$\varphi = \varphi^{-1},$$

т. е. чтобы преобразование φ совпадало со своим обратным.

Пусть на прямой b введены однородные координаты p_1, p_2 и преобразование φ определено формулами:

$$\begin{cases} \rho' p_1' = a_{11}p_1 + a_{12}p_2, \\ \rho' p_2' = a_{21}p_1 + a_{22}p_2, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Найдем условия, которые нужно наложить на матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

чтобы преобразование φ было инволюцией.

В силу следствия 2 п. 4 § 6 гл. III преобразованию φ^2 соответствует матрица

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица будет соответствовать тождественному преобразованию, если она имеет вид:

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix},$$

где $g \neq 0$ — некоторое число ($g = 1$, если преобразование φ задать с помощью унимодулярной матрицы).

Достаточным условием для того, чтобы было

$$A^2 = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix},$$

является равенство

$$a_{11} = -a_{22}.$$

Одновременно условие $a_{11} = -a_{22}$ гарантирует, что φ не есть тождественное преобразование. Таким образом, равенство

$$a_{11} + a_{22} = 0$$

есть достаточное условие того, чтобы преобразование

$$\varphi : \begin{cases} \rho' p_1' = a_{11}p_1 + a_{12}p_2, \\ \rho' p_2' = a_{21}p_1 + a_{22}p_2 \end{cases}$$

было инволюцией.

Пусть теперь φ — инволюция. Тогда необходимо выполняются условия

$$a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = a_{21}a_{12} + a_{22}^2,$$
$$a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} = a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} = 0.$$

Эти соотношения можно записать в виде:

$$(a_{11} - a_{22})(a_{11} + a_{22}) = 0,$$
$$a_{21}(a_{11} + a_{22}) = a_{12}(a_{11} + a_{22}) = 0,$$

Если бы $a_{11} + a_{22} \neq 0$, то мы имели бы

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = a_{21} = 0,$$

и φ было бы тождественным преобразованием, что невозможно, так как мы предположили, что φ — инволюция.

Поэтому необходимо выполняется условие

$$a_{11} + a_{22} = 0.$$

Итак, доказана

Теорема 1. *Проективное преобразование φ прямой b, заданное в однородных координатах формулами*

$$\begin{cases} \rho' p_1' = a_{11}p_1 + a_{12}p_2, \\ \rho' p_2' = a_{21}p_1 + a_{22}p_2, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

будет инволюцией тогда и только тогда, когда $a_{11} + a_{22} = 0$.

Если проективное преобразование φ прямой b является инволюцией, то оно обратно самому себе; следовательно, из равенства

$$B' = \varphi\ (B)$$

вытекает

$$B = \varphi\ (B'),$$

где B и B' — точки прямой b. Оказывается, что если это обстоятельство имеет место хотя бы для одной пары несовпадающих точек, то проективное преобразование φ есть инволюция.

Теорема 2. *Пусть φ — проективное преобразование прямой b и пусть существуют различные точки $B_1 \in b$ и $B_2 \in b$ такие, что*

$$B_2 = \varphi\ (B_1),$$
$$B_1 = \varphi\ (B_2);$$

тогда преобразование φ есть инволюция.

Доказательство. Так как φ переставляет две различные точки B_1 и B_2 прямой b, то φ не есть тождественное преобразование. Далее, если C — произвольная точка прямой b и $C' = \varphi\ (C)$, то точки B_1, B_2, C, C' переходят в точки B_2, B_1, C', $\varphi\ (C')$. Так как преобразование φ сохраняет сложное отношение, то

$$(B_1, B_2; C, C') = (B_2, B_1; C', \varphi\ (C')) = (B_1, B_2; \varphi\ (C'), C').$$

Отсюда $C = \varphi\ (C') = \varphi^2\ (C)$. Так как C — произвольная точка прямой b, то теорема доказана.

Из теоремы 2 в свою очередь вытекает

Теорема 3. *Если B_1, B_2, B_3, B_4 — четыре различные точки прямой b, то существует только одна инволюция φ прямой b, при которой*

$$B_2 = \varphi\ (B_1)$$

и

$$B_4 = \varphi\ (B_3).$$

Доказательство. Действительно, по теореме 5 п. 2 § 6 гл. III существует только одно проективное преобразование φ прямой b, переводящее точки B_3, B_4 и B_1 в точки B_4, B_3 и B_2. По теореме 2 это преобразование будет инволюцией.

Докажем теперь основную теорему настоящего параграфа, которая позволяет свести любое проективное преобразование прямой b к произведению инволюций.

Теорема 4. *Проективное преобразование φ прямой b, не являющееся инволюцией, представимо в виде произведения двух инволюций.*

Доказательство. Отметим вначале, что при любой инволюции φ_1 прямой b имеем: $\varphi_1^2 = \varepsilon$.

Пусть теперь $\varphi \in \mathcal{P}_b$ и φ не является ни тождественным преобразованием, ни инволюцией. Тогда найдется по крайней мере одна точка B, которая при преобразовании φ не остается на месте и не переставляется со своим образом. Положим

$$C = \varphi\ (B) \text{ и } D = \varphi\ (C).$$

Тогда C не совпадает с B, а D не совпадает ни с точкой B, ни с точкой C. Далее, существует проективное отображение φ_1, переводящее точки C, B, D в точки C, D, B. По теореме 2 настоящего параграфа φ_1 есть инволюция. Преобразование $\varphi_2 = \varphi\varphi_1$ переставляет точки D и C и потому также является инволюцией.

Отсюда вытекает, что

$$\varphi = \varphi \cdot \varepsilon = \varphi \cdot \varphi_1{}^2 = (\varphi\varphi_1)\, \varphi_1 = \varphi_2\varphi_1$$

есть произведение двух инволюций. Теорема доказана.

§ 8. Неподвижные точки проективных преобразований прямой и их связь с инволюциями

Пусть φ — проективное преобразование прямой b, заданное в однородных координатах p_1, p_2 формулами

$$\begin{aligned} \rho' p_1{}' &= a_{11}p_1 + a_{12}p_2, \\ \rho' p_2{}' &= a_{21}p_1 + a_{22}p_2, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Рассмотрим вопрос об отыскании *неподвижных точек преобразования* φ, т. е. таких точек, которые преобразованием φ переводятся сами в себя.

Если p_1^0, p_2^0 — координаты неподвижной точки, то для чисел p_1^0, p_2^0 имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \rho' p_1^0 = a_{11}p_1^0 + a_{12}p_2^0, \\ \rho' p_2^0 = a_{21}p_1^0 + a_{22}p_2^0, \end{cases}$$

причем $\rho' \neq 0$. Подставляя в тождество $p_1^0\, p_2^0 - p_2^0\, p_1^0 = 0$ вместо p_1^0 и p_2^0 их значения, получим:

$$p_1^0\, (a_{21}\, p_1^0 + a_{22}p_2^0) - p_2^0\, (a_{11}p_1^0 + a_{12}p_2^0) = 0.$$

Последнее соотношение представляет собой квадратное уравнение

$$a_{21}q_0^2 + (a_{22} - a_{11})\, q_0 - a_{12} = 0 \qquad (*)$$

для неоднородной проективной координаты $q_0 = \dfrac{p_1^0}{p_2^0}$ неподвижной точки.

Пусть

$$\Delta = (a_{22} - a_{11})^2 + 4\, a_{12}\, a_{21}$$

— дискриминант уравнения (*).

Если φ — тождественное преобразование, то $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{11} = a_{22}$ и левая часть уравнения (*) есть тождественный нуль. Это означает, что каждая точка при тождественном преобразовании φ остается неподвижной. Если φ отлично от тождественного преобразования, то оно называется:

а) ***эллиптическим**, если $\Delta < 0$, — в этом случае преобразование φ не имеет неподвижных точек;*

б) ***параболическим**, если $\Delta = 0$, — в этом случае имеется одна неподвижная точка;*

в) ***гиперболическим**, если $\Delta > 0$, — в этом случае преобразование φ имеет две различные неподвижные точки.*

Теорема 1. *Параболических инволюций не существует.*

Доказательство. Если φ — инволюция прямой b, то $a_{11} = -a_{22}$. Поэтому дискриминант Δ уравнения (*) принимает вид:

$$\Delta = 4\,(a_{11}^2 + a_{12}a_{21}) = -4\,(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -4 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Так как φ — параболическое преобразование, то

$$\Delta = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

что невозможно. Поэтому параболическое проективное преобразование φ не может быть инволюцией.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если B_1, B_2 —неподвижные точки гиперболического проективного преобразования φ, то сложное отношение $(B_1, B_2; C, \varphi(C))$ постоянно для всех точек $C \in b$, отличных от B_1 и B_2.*

Доказательство. Пусть φ — гиперболическое проективное преобразование прямой b, имеющее две различные неподвижные точки B_1 и B_2. Для любой пары точек C и D, не являющихся неподвижными и переходящих в точки C', D', из инвариантности сложного отношения вытекает, что

$$(B_1, B_2; C, D) = (B_1, B_2; C', D').$$

Пусть q_1, q_2, c, d, c', d'— неоднородные проективные координаты точек B_1, B_2, C, D, C', D', тогда

$$\frac{c - q_1}{c - q_2} \cdot \frac{d - q_2}{d - q_1} = \frac{c' - q_1}{c' - q_2} \cdot \frac{d' - q_2}{d' - q_1}.$$

Перестановкой сомножителей в этом равенстве получаем:

$$(B_1, B_2; C, C') = \frac{c - q_1}{c - q_2} \cdot \frac{c' - q_2}{c' - q_1} = \frac{d - q_1}{d - q_2} \cdot \frac{d' - q_2}{d' - q_1} = (B_1, B_2; D, D').$$

Так как точки C и D были взяты на прямой b произвольно, то теорема доказана.

Пусть на проективной прямой b фиксированы точки B_1 и B_2. Точку $M' \in b$ будем называть *гармонически сопряженной* с точкой M относительно точек B_1 и B_2, если $(B_1, B_2; M, M') = -1$.

Четверку точек B_1, B_2, M, M' проективной прямой b, для которых выполнено соотношение

$$(B_1, B_2; M, M') = -1,$$

называют *гармонической*.

Наглядно четверку гармонических точек B_1, B_2; M, M' на прямой b удобно интерпретировать на евклидовой плоскости следующим образом (см. рис. 105).

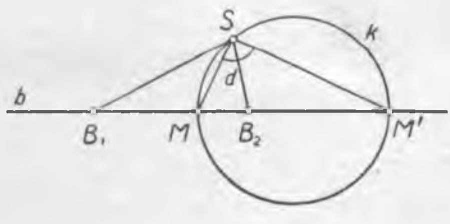


Рис. 105

Если базисные точки B_1 и B_2 фиксированы, а точка M задана, то из условия

$$(B_1, B_2; M, M') = -1$$

вытекает, что

$$\frac{(B_1,\ B_2;\ M)}{(B_1,\ B_2;\ M')} = -1,$$

т. е.

$$(B_1,\ B_2;\ M) = -(B_1,\ B_2;\ M').$$

Если теперь на евклидовой плоскости взять точку S так, чтобы прямая SM была биссектрисой внутреннего (внешнего) угла S треугольника B_1SB_2, то прямая SM' будет биссектрисой внешнего (внутреннего) угла при вершине S того же треугольника B_1SB_2. Так как угол между прямыми SM и SM' прямой, то точка S лежит на окружности k, для которой отрезок MM' является диаметром. Отсюда вытекает простой способ построения точки M', гармонически сопряженной с точкой M, лежащей внутри отрезка B_1B_2, относительно точек B_1 и B_2. Пусть k — любая окружность, проходящая через точки B_1 и B_2 (см. рис. 106) и C — середина дуги B_1B_2. Пусть точка M лежит внутри отрезка B_1B_2. Тогда проводим прямую CM и через точку пересечения S прямой CM с окружностью k проводим прямую l перпендикулярно CM. Точка пересечения прямых l и b и есть точка M', гармонически сопряженная с точкой M относительно точек B_1 и B_2. Если M — середина отрезка B_1B_2, то прямые l и b параллельны, и точка M' в этом случае будет бесконечно удаленной (см. рис. 107).

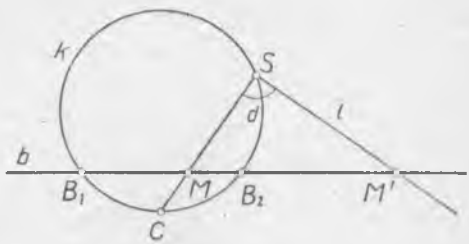


Рис. 106

Описанные построения опираются на понятие евклидовой окружности, т. е. используют понятия конгруэнтных отрезков и углов. Оказывается, что можно дать простой способ построения гармонически сопряженной точки, который не использует этих понятий. Это построение основано на свойствах полного четырехвершинника. Оно было положено немецким математиком Штаудтом в основу чисто геометрического определения проективного преобразования (см. по этому поводу гл. V книги Н. В. Ефимова «Высшая геометрия»).

Полным четырехвершинником называется фигура, образованная четырьмя точками (*вершинами*), из которых никакие три не лежат на одной прямой, и шестью прямыми (*сторонами*), определяемыми парами точек (вершин) (см. рис. 108).

В полном четырехвершиннике содержатся три простых $ABCD$, $ABDC$ и $ACBD$ (рис. 109).

Две стороны полного четырехвершинника, проходящие через одну вершину, называются *смежными*, а две стороны, не имеющие общей вершины, называются *противоположными*. Так как в полном четырехвершиннике только четыре вершины, то каждая сторона имеет только одну противоположную. Шесть сторон полного четырехвершинника образуют три пары противоположных сторон:

$$AB \text{ и } CD;\ AC \text{ и } BD;\ AD \text{ и } BC.$$

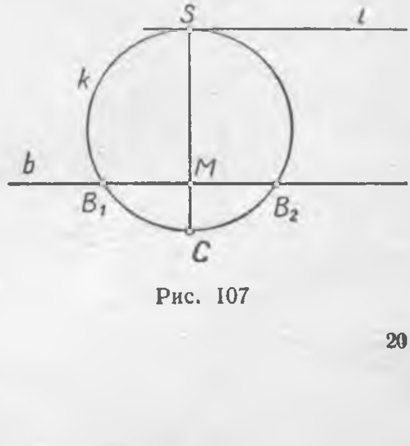


Рис. 107

Пусть K, L, M — точки пересечения этих пар (см. рис. 108). Точки K, L, M называются *диагональными*, а прямые KL, LM и MK, их соединяющие, *диагоналями* четырехвершинника.

В полном четырехвершиннике $ABCD$ точки пересечения диагонали KL со сторонами BD и AC обозначим соответственно через F и G (рис. 110). Проектируя четверку точек K, L, F, G из центра D на прямую AC, получим четверку точек A, C, M, G, при этом

$$(K,\ L;\ F,\ G) = (A,\ C;\ M,\ G).$$

Проектируя обратно четверку точек A, C, M, G из точки B на прямую KL, получим четверку точек L, K, F, G. Отсюда

$$(K,\ L;\ F,\ G) = (L,\ K;\ F,\ G) = \frac{1}{(K,\ L;\ F,\ G)}.$$

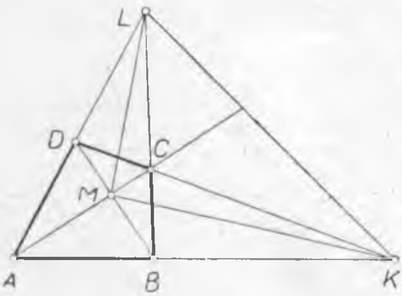


Рис. 108

Таким образом,

$$(K,\ L;\ F,\ G)^2 = 1,$$

или

$$(K,\ L;\ F,\ G) = \pm 1.$$

Так как F не совпадает с G, то

$$(K,\ L;\ F,\ G) \neq 1,$$

и, следовательно,

$$(K,\ L;\ F,\ G) = -1,$$

т. е. точки K, L, F, G образуют гармоническую четверку.

Спроектировав из точки D на прямую AC точки K, L, F, G, получим гармоническую четверку точек A, C, M, G:

$$(A,\ C;\ M,\ G) = (K,\ L;\ F,\ G) = -1.$$

Итак, приходим к следующему выводу: *на каждой диагонали полного четырехвершинника имеется гармоническая четверка точек, образованная двумя диагональными точками K, L и точками пересечения этой диагонали с парой сторон, проходящих через третью диагональную точку M.* На рис. 110 точки этой четверки суть K, L, F, G, и для них имеет место соотношение

$$(K,\ L;\ F,\ G) = -1.$$

Далее, *на каждой стороне полного четырехвершинника имеем гармоническую четверку точек, образованную парой вершин A, C, диагональной точкой M и точкой пересечения G этой стороны с диагональю, проходящей через две другие диагональные точки.*

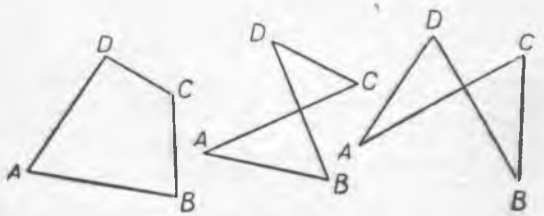


Рис. 109

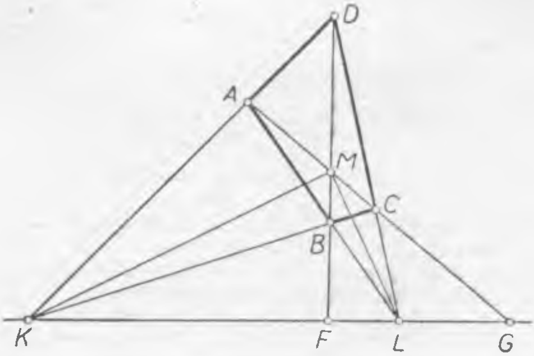


Рис. 110

Если гармоническую четверку точек K, L, F, G спроектировать из диагональной точки M, то получим гармоническую четверку прямых MK, ML, MF, MG. Первые две из них являются диагоналями, а две последние — сторонами полного четырехвершинника.

Переходя от полного четырехвершинника к двойственной ему фигуре, получим фигуру, которая называется *полным четырехсторонником*. Мы предлагаем читателю в качестве полезного упражнения сформулировать понятие и свойства полного четырехсторонника, а также сделать чертеж этой фигуры.

Перейдем теперь к построению четвертой гармонической точки G по трем данным. Это построение легко проследить по черт. 110. Пусть нам даны точки K, L, F. Построим гармонически сопряженную точку G для точки F относительно точек K и L. Для этого проведем через точку K пару произвольных прямых KA и KB. Пересекаем их произвольной прямой, проходящей через точку F. Точки пересечения обозначим через B и D. Проводим прямые LB и LD. Точки пересечения этих прямых с прямыми KD и KB обозначаем A и C. Тогда прямая AC пересекает прямую KL в искомой точке G.

Важно отметить, что все построения проводятся с помощью лишь одной линейки, т. е. не используют никаких аксиом, кроме аксиом связи.

Вернемся теперь к рассмотрению свойств гиперболических инволюций.

Теорема 3. *Гиперболическая инволюция отображает каждую точку в точку, гармонически сопряженную с ней относительно двух неподвижных точек.*

Доказательство. Пусть φ — гиперболическая инволюция проективной прямой b. Обозначим через B_1 и B_2 две ее неподвижные точки. Так как для любой точки $C \in b$ имеем

$$C = \varphi^2 (C),$$

то из теоремы 2 настоящего параграфа имеем:

$$(B_1, B_2; C, \varphi (C)) = (B_1, B_2; \varphi (C), C).$$

Из общих свойств сложного отношения имеем:

$$(B_1, B_2; C, \varphi (C)) = \frac{1}{(B_1, B_2; \varphi (C), C)}.$$

Поэтому

$$(B_1, B_2; C, \varphi (C))^2 = 1,$$

или

$$(B_1, B_2; C, \varphi (C)) = \pm 1.$$

Если бы

$$(B_1, B_2; C, \varphi(C)) = +1,$$

то точка C была бы неподвижной точкой инволюции φ и совпадала бы или с точкой B_1, или с точкой B_2. Так как C — произвольная точка прямой b, то $(B_1, B_2; C, \varphi(C))$ не равно $+1$ и потому

$$(B_1, B_2; C, \varphi(C)) = -1.$$

Следовательно, четверка точек B_1, B_2, C, $\varphi(C)$ гармоническая.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает, что гиперболическая инволюция полностью определяется своими неподвижными точками.

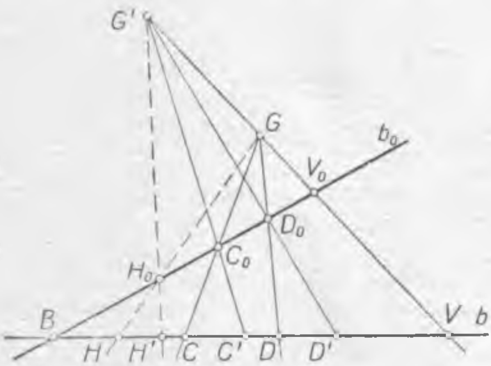


Рис. 111

Поскольку всякое проективное преобразование прямой b полностью определяется заданием образов трех точек B_1, B_2, B_3, то гиперболическое проективное преобразование определяется заданием двух его неподвижных точек B_1 и B_2 и одной пары соответственных точек B_3 и B'_3. Аналогично гиперболическое и параболическое проективные преобразования можно определить заданием одной неподвижной точки B и двух пар соответственных точек C, C' и D, D'.

Проиллюстрируем геометрический смысл двух последних утверждений с помощью следующего построения (рис. 111). Пусть на прямой b заданы неподвижная точка B и две пары соответственных точек C, C' и D, D' проективного преобразования φ. Через точку B проведем прямую b_0, отличную от b, и фиксируем на ней две любые точки C_0 и D_0, отличные от B. Пусть G — точка пересечения прямых CC_0 и DD_0 и G' — точка пересечения прямых $C'C_0$ и $D'D_0$. Рассмотрим перспективное соответствие φ_1 между b и b_0 с центром G и перспективное соответствие φ_2 между b_0 и b с центром G'. Преобразование $\varphi_2\varphi_1$ переводит точки B, C, D через их промежуточное положение B, C_0, D_0 в точки B, C', D'. Следовательно, $\varphi_2\varphi_1$ является искомым проективным преобразованием φ. Образ $H' = \varphi(H)$ произвольной точки $H \in b$ получается так: сначала находится точка пересечения H_0 прямых b_0 и GH, после чего H' получается как точка пересечения прямых b и $G'H_0$.

В указанном построении точка $V \in b$, отличная от B, будет неподвижной тогда и только тогда, когда прямые GV и $G'V$ пересекают прямую b_0 в одной и той же точке V_0. Второй неподвижной точкой V будет, следовательно, точка пересечения прямых GG' и b. Ясно, что рассматриваемое проективное преобразование будет параболическим, если прямая GG' проходит через точку B; в противном случае наше преобразование гиперболическое. Из всех рассуждений, проведенных выше, вытекает следующая

Теорема 4. *Гиперболическое или параболическое преобразование проективной прямой представимо в виде произведения двух перспективных соответствий.*

Относительно эллиптических проективных преобразований справедлива следующая

Т е о р е м а 5. *Эллиптическое проективное преобразование прямой b может быть представлено в виде произведения трех перспективных соответствий и не может быть представлено произведением меньшего числа перспективных соответствий.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы мы опускаем. По этому поводу см. книгу: Г. Б у з е м а н и П. К е л л и, Проективная геометрия и проективные метрики (М., Изд-во иностранной литературы, 1957), гл. I, §§ 7 и 8.

§ 9. Проективные преобразования плоскости

Свойства проективных преобразований плоскости представляют собой прямое обобщение свойств проективных преобразований прямой. Важную роль при этом играют однородные и неоднородные координаты точек на проективной плоскости, которые также являются естественными обобщениями однородных и неоднородных координат точек проективной прямой.

1. Однородные и неоднородные проективные координаты. В § 3, исходя из интерпретации проективной плоскости как связки прямых $V(S)$ с центром в точке S, для точек проективной плоскости было введено понятие однородных координат p_1, p_2, p_3. Построение однородных координат в § 3 опиралось на то, что мы фиксировали в пространстве некоторую декартову систему координат с началом в точке S. В п. 4 § 5 при введении однородных координат на проективной прямой было показано, что можно пользоваться не только декартовой, но вообще любой аффинной системой координат на плоскости. Этот факт естественно использовать при определении различных систем однородных проективных координат на проективной плоскости.

Итак, пусть $V(S)$ — связка прямых с центром S в трехмерном евклидовом пространстве. Пусть, далее,

$$\boldsymbol{e}_1 = \overline{SE_1}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \overline{SE_2}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \overline{SE_3}$$

— три некомпланарных вектора. Будем говорить, что тройка таких некомпланарных векторов образует базис в трехмерном евклидовом пространстве. Если теперь M—некоторая точка пространства, то для радиус-вектора $\boldsymbol{r} = \overline{SM}$ справедливо разложение

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3.$$

Числа x_1, x_2, x_3 называют *аффинными координатами точки* M. Они же одновременно называются *координатами радиус-вектора* $\boldsymbol{r} = \overline{SM}$ относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Если l — прямая из связки $V(S)$, а x_1, x_2, x_3 — координаты текущей точки M на l, то канонические уравнения прямой l относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ будут иметь вид:

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{x_2}{p_2} = \frac{x_3}{p_3},$$

где числа p_1, p_2, p_3 одновременно не равны нулю. Отметим, что если p_1, p_2, p_3 и p_1', p_2', p_3' — пропорциональные тройки чисел:

$$p_1 : p_2 : p_3 = p_1' : p_2' : p_3',$$

то уравнения

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{x_2}{p_2} = \frac{x_3}{p_3}$$

и

$$\frac{x_1}{p_1'} = \frac{x_2}{p_2'} = \frac{x_3}{p_3'}$$

определяют одну и ту же прямую l связки $V(S)$. Так как прямая l связки $V(S)$ может одновременно рассматриваться как точка проективной плоскости, то числа p_1, p_2, p_3 принимаются за координаты точки проективной плоскости. При этом введенные только что координаты, которые называются *однородными проективными координатами точки*, обладают рядом важных особенностей (см. п. 4 § 5). Именно:

1. *Каждая точка проективной плоскости имеет однородные координаты.*

2. *Если p_1, p_2, p_3 — однородные координаты точки M, то ρp_1, ρp_2, ρp_3, где $\rho \neq 0$, — также однородные координаты точки M.*

3. *Разным точкам проективной плоскости отвечают всегда разные отношения $p_1 : p_2 : p_3$ их однородных координат.*

4. *Ни для какой точки проективной плоскости все три ее однородные координаты не обращаются в нуль одновременно.*

5. *Если $p_1^{(n)} \to p_1^0$, $p_2^{(n)} \to p_2^0$, $p_3^{(n)} \to p_3^0$ и $(p_1^0)^2 + (p_2^0)^2 + (p_3^0)^2 \neq 0$, то переменная точка M_n с однородными координатами $p_1^{(n)}$, $p_2^{(n)}$, $p_3^{(n)}$ стремится к точке M_0 с однородными координатами p_1^0, p_2^0, p_3^0.*

Поэтому каждая точка проективной плоскости имеет бесконечно много троек однородных координат, которые сами по себе не определяются заданием точки: определяются лишь отношения однородных координат. Совокупность всех наборов однородных координат точки M удобно записывать в виде $(\rho p_1, \rho p_2, \rho p_3)$, где множитель ρ может принимать любое вещественное значение, кроме $\rho = 0$.

Числа q_1, q_2, которые получаются из однородных координат p_1, p_2, p_3 точки M по формулам

$$q_1 = \frac{p_1}{p_3}, \quad q_2 = \frac{p_2}{p_3},$$

называются *неоднородными проективными координатами точки M*.

Однородные p_1, p_2, p_3 и неоднородные q_1, q_2 проективные координаты для точек проективной плоскости введены нами с помощью базиса $e_1 = \overline{SE_1}$, $e_2 = \overline{SE_2}$, $e_3 = \overline{SE_3}$ в евклидовом пространстве. Поэтому ясно, что, исходя из любого базиса $e'_1 = \overline{SE'_1}$, $e'_2 = \overline{SE'_2}$, $e'_3 = \overline{SE'_3}$ в евклидовом пространстве, можно построить соответствующие системы однородных p'_1, p'_2, p'_3 и неоднородных

$$q'_1 = \frac{p'_1}{p'_3}, \quad q'_2 = \frac{p'_2}{p'_3}$$

проективных координат точек проективной плоскости.

Рассмотрим формулы перехода от проективных координат p_1, p_2, p_3 точки M проективной плоскости к ее новым проективным координатам p'_1, p'_2, p'_3. Если разложения векторов e_1, e_2, e_3, образующих старый базис, по элементам нового базиса e'_1, e'_2, e'_3 имеют вид

$$\begin{cases} e_1 = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + a_{31}e'_3, \\ e_2 = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + a_{32}e'_3, \\ e_3 = a_{13}e'_1 + a_{23}e'_2 + a_{33}e'_3, \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то между аффинными координатами x_1, x_2, x_3 точки M относительно базиса e_1, e_2, e_3 и аффинными координатами x'_1, x'_2, x'_3 той же точки относительно нового базиса e'_1, e'_2, e'_3 имеют место соотношения

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3, \\ x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3, \\ x_3 = a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3. \end{cases}$$

(Доказательство этого факта проводится точно так же, как это было сделано в § 2 гл. II для аффинных координат точек плоскости.) Отсюда простыми вычислениями легко установить, что прямая l, имеющая относительно базиса e_1, e_2, e_3 уравнения

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{x_2}{p_2} = \frac{x_3}{p_3},$$

относительно нового базиса будет иметь уравнения

$$\frac{x'_1}{b_{11}p_1 + b_{12}p_2 + b_{13}p_3} = \frac{x'_2}{b_{21}p_1 + b_{22}p_2 + b_{23}p_3} = \frac{x'_3}{b_{31}p_1 + b_{32}p_2 + b_{33}p_3},$$

где матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

есть обратная для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Действительно, положим

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{x_2}{p_2} = \frac{x_3}{p_3} = \rho.$$

Тогда

$$\begin{cases} \rho p_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3', \\ \rho p_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3', \\ \rho p_3 = a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3'. \end{cases}$$

Так как

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то, обозначая через

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

матрицу, обратную для матрицы A, получим:

$$x_1' = \rho\,(b_{11}p_1 + b_{12}p_2 + b_{13}p_3); \quad x_2' = \rho\,(b_{21}p_1 + b_{22}p_2 + b_{23}p_3);$$
$$x_3' = \rho\,(b_{31}p_1 + b_{32}p_2 + b_{33}p_3).$$

Отсюда уравнения

$$\frac{x_1'}{b_{11}p_1 + b_{12}p_2 + b_{13}p_3} = \frac{x_2'}{b_{21}p_1 + b_{22}p_2 + b_{23}p_3} =$$
$$= \frac{x_3'}{b_{31}p_1 + b_{32}p_2 + b_{33}p_3} = \rho$$

суть уравнения прямой l.

Поэтому между числами p_1, p_2, p_3 и p_1', p_2', p_3' имеют место следующие соотношения:

$$\rho' p_1' = b_{11}p_1 + b_{12}p_2 + b_{13}p_3,$$
$$\rho' p_2' = b_{21}p_1 + b_{22}p_2 + b_{23}p_3,$$
$$\rho' p_3' = b_{31}p_1 + b_{32}p_2 + b_{33}p, \quad \rho' = \rho,$$

которые и представляют собой формулы перехода от старых однородных проективных координат точки M (p_1, p_2, p_3) к ее новым однородным проективным координатам; при этом важно отметить, что матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

описывающая этот переход, неособенная, т. е. ее определитель

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Если

$$q_1 = \frac{p_1}{p_3}, \quad q_2 = \frac{p_2}{p_3}$$

и

$$q'_1 = \frac{p'_1}{p'_3}, \quad q'_2 = \frac{p'_1}{p'_3}$$

— неоднородные координаты на проективной плоскости, построенные по однородным проективным координатам p_1, p_2, p_3 и p'_1, p'_2, p'_3, то соответствующие формулы перехода имеют вид:

$$\begin{cases} q'_1 = \dfrac{b_{11}q_1 + b_{12}q_2 + b_{13}}{b_{31}q_1 + b_{32}q_2 + b_{33}}, \\ q'_2 = \dfrac{b_{21}q_1 + b_{22}q_2 + b_{23}}{b_{31}q_1 + b_{32}q_2 + b_{33}}. \end{cases}$$

Таким образом, мы имеем здесь полную аналогию с формулами преобразований для однородных и неоднородных проективных координат точек проективной прямой. Именно, если на проективной плоскости введены две любые системы однородных проективных координат p_1, p_2, p_3 и p'_1, p'_2, p'_3, то формулы перехода от одних координат к другим имеют вид:

$$\begin{cases} \rho' p'_1 = b_{11}p_1 + b_{12}p_2 + b_{13}p_3, \\ \rho' p'_2 = b_{21}p_1 + b_{22}p_2 + b_{23}p_3, \\ \rho' p'_3 = b_{31}p_1 + b_{32}p_2 + b_{33}p_3, \end{cases}$$

где $\rho \neq 0$ — некоторый множитель, а

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

— неособенная матрица. При этом переход от неоднородных проективных координат

$$q_1 = \frac{p_1}{p_3}, \quad q_2 = \frac{p_2}{p_3}$$

к неоднородным проективным координатам

$$q_1' = \frac{p_1'}{p_3'}; \quad q_2' = \frac{p_2'}{p_3'}$$

осуществляется по формулам:

$$q_1' = \frac{b_{11}q_1 + b_{12}q_2 + b_{13}}{b_{31}q_1 + b_{32}q_2 + b_{33}}; \quad q_2' = \frac{b_{21}q_1 + b_{22}q_2 + b_{23}}{b_{31}q_1 + b_{32}q_2 + b_{33}},$$

которые задаются той же матрицей

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

2. Введение проективных координат на проективной плоскости с помощью сложного отношения. Пусть на проективной плоскости введены система однородных проективных координат p_1, p_2, p_3 и соответствующая ей система неоднородных координат

$$q_1 = \frac{p_1}{p_3}, \quad q_2 = \frac{p_2}{p_3}.$$

Как уже отмечалось в п. 4 § 2, всякая проективная прямая l на проективной плоскости задается уравнением

$$u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0,$$

где u_1, u_2, u_3 — ненулевая тройка чисел. Там же было показано, что класс пропорциональных ненулевых троек u_1, u_2, u_3 однозначно определяет прямую l и обратно. Числа u_1, u_2, u_3 были названы *однородными координатами прямой* l.

Как мы знаем, фиксирование на проективной плоскости некоторой однородной или неоднородной системы проективных координат позволяет условно разделить точки и прямые проективной плоскости на конечные и бесконечно удалённые.

В терминах введенных нами проективных систем координат p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2 это делается так. Точка M (q_1, q_2) с неоднородными проективными координатами q_1, q_2 называется *конечной*, если оба числа q_1 и q_2 конечны. Точка M (q_1, q_2) называется *бесконечно удаленной*, если хотя бы одна из ее неоднородных координат равна ∞. Для того чтобы точка M проективной плоскости была конечной, необходимо и достаточно, чтобы ее однородная координата $p_3 \neq 0$; для того чтобы точка M была бесконечно удаленной, необходимо и достаточно, чтобы ее однородная проективная координата $p_3 = 0$. Оба последних утверждения есть очевидные следствия соотношений

$$q_1 = \frac{p_1}{p_3}; \quad q_2 = \frac{p_2}{p_3}.$$

Отсюда ясно, что совокупность бесконечно удаленных точек плоскости имеет уравнение

$$p_3 = 0$$

и представляет собой прямую, которую мы условились называть бесконечно удаленной. Однородные координаты бесконечно удаленной прямой таковы (0, 0, 1). Все прочие прямые плоскости будем называть обыкновенными. Если $u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0$ — обыкновенная прямая на проективной плоскости, то по крайней мере одно из чисел u_1 или u_2 отлично от нуля.

Прямую, имеющую уравнение

$$p_2 = 0,$$

будем называть *осью* p_1, а прямую, имеющую уравнение

$$p_1 = 0,$$

осью p_2.

Точку E с однородными проективными координатами (1, 1, 1) будем называть *единичной*, а точку O с координатами (0, 0, 1) —*нулевой*.

Таким образом, с помощью фиксированной системы однородных координат p_1, p_2, p_3 мы ввели на проективной плоскости понятие конечных и бесконечно удаленных точек. Очевидно, что для различных систем однородных координат понятия, о которых только что шла речь, будут реализовываться на различных системах точек и прямых проективной плоскости.

Наши дальнейшие построения будут направлены на то, чтобы вскрыть геометрический смысл неоднородных проективных координат с помощью сложного отношения четырех точек на проективной прямой.

Итак, пусть по-прежнему p_1, p_2, p_3 — введенная выше система однородных координат на проективной плоскости, а q_1, q_2 — построенная по ней система неоднородных проективных координат.

Обозначим через M^1_∞ бесконечно удаленную точку оси p_1, а через M^2_∞ бесконечно удаленную точку оси p_2.

Через E_1 и E_2 обозначим точки с координатами $q_1 = 1$, $q_2 = 0$ и $q_1 = 0$, $q_2 = 1$. Точки E_1 и E_2 лежат соответственно на осях p_1 и p_2 и имеют однородные координаты (1, 0, 1) и (0, 1, 1). Прямые E_1E и E_2E имеют соответственно уравнения

$$p_2 = 1$$

и

$$p_1 = 1.$$

Так как точки M^1_∞ и M^2_∞ имеют координаты (1, 0, 0) и (0, 1, 0), то M^2_∞ лежит на прямой EE_1, а M^1_∞ на прямой EE_2 (рис. 112). Отсюда следует, что при проектировании точки E из центра M^2_∞ на ось p_1 ее проекция совпадает с точкой E_1; аналогично проекция точки E из центра M^1_∞ на ось p_2 совпадает с точкой E_2.

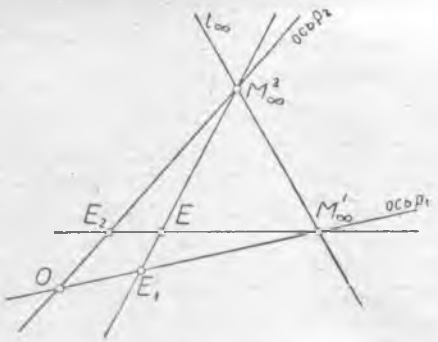


Рис. 112

Введем теперь на осях p_1 и p_2 неоднородные проективные координаты текущих точек M_{p_1} и M_{p_2}:

$$\nu_1 = (M^1_\infty, \quad 0; \quad E_1, \quad M_{p_1}),$$
$$\nu_2 = (M^2_\infty, \quad 0; \quad E_2, \quad M_{p_2}).$$

По теореме 4 § 5 гл. III будем иметь , что

$$\nu_1 = q_1 = \frac{p_1}{p_3}, \qquad \nu_2 = q_2 = \frac{p_2}{p_3}.$$

Пусть теперь M — любая точка проективной плоскости, имеющая неоднородные проективные координаты q_1 и q_2. Обозначим через M_{p_1} и M_{p_2} проекции точки M на оси p_1 и p_2 соответственно из центров M^2_∞ и M^1_∞. Тогда, очевидно,

$$q_1 = (M^1_\infty, \ 0; \quad E_1, \ M_{p_1}),$$
$$q_2 = (M^2_\infty, \quad 0; \ E_2, \quad M_{p_2}).$$

Из проведенного построения вытекает следующая теорема, характеризующая геометрический смысл неоднородных координат q_1, q_2 точки на проективной плоскости.

Теорема 1. *Если на проективной плоскости введены неоднородные проективные координаты q_1, q_2 и с помощью них введены понятия бесконечно удаленных точек, конечных точек, осей p_1, p_2, точек O, E, E_1, E_2, то для любой точки M с координатами q_1, q_2 справедливы формулы*

$$q_1 = (M^1_\infty, \quad 0; \quad E_1, \quad M_{p_1}),$$
$$q_2 = (M^2_\infty, \quad 0; \quad E_2, \quad M_{p_2}).$$

Весьма важным фактом является возможность обращения настоящей теоремы. Наметим прежде всего необходимые для этого геометрические построения.

Фиксируем на проективной плоскости произвольную прямую, которую мы будем считать бесконечно удаленной и обозначать через l_∞. Далее фиксируем некоторую произвольную точку O, не лежащую на прямой l_∞ (см. рис. 112). Пусть далее через точку O проведены две произвольные прямые, одну из которых назовем осью

p_1, а другую — осью p_2. Через M^1_∞ и M^2_∞ обозначим соответственно точки пересечения осей p_1 и p_2 с бесконечно удаленной прямой l_∞. Пусть, наконец, E — произвольная точка проективной плоскости, не принадлежащая ни одной из прямых l_∞, OM^1_∞, OM^2_∞.

Обозначим через E_1 проекцию точки E на ось p_1 из центра M^2_∞, а через E_2 проекцию той же точки E на ось p_2 из центра M^1_∞.

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть M — произвольная точка проективной плоскости, а M_{p_1}, M_{p_2} — соответственно ее проекции на оси p_1 и p_2 из центров M^2_∞ и M^1_∞. Отнесем точкам M^1_∞, O, E_1 как точкам одной проективной прямой (оси p_1) числа*

$$q_1 = \infty, \quad q_1 = 0, \; q_1 = 1,$$

а точкам M^2_∞, O, E_2 как точкам другой проективной прямой (оси p_2) числа

$$q_2 = \infty, \quad q_2 = 0, \quad q_2 = 1.$$

Положим для точек M_{p_1} и M_{p_2} соответственно

$$\begin{cases} q_1 = (M^1_\infty,\ 0;\quad E_1,\ M_{p_1}), \\ q_2 = (M^2_\infty,\ 0;\quad E_2,\ M_{p_2}). \end{cases} \tag{*}$$

Тогда система чисел q_1, q_2, определяемых равенствами (*), есть система неоднородных проективных координат на проективной плоскости.

Доказательство. Пусть на проективной плоскости введена система неоднородных проективных координат q_1', q_2'. Пусть прямые l_∞, ось p_1 и ось p_2, о которых идет речь в условии теоремы 2, имеют соответственно уравнения

$$\begin{gathered} a_{31}q_1' + a_{32}q_2' + a_{33} = 0, \\ a_{11}q_1' + a_{12}q_2' + a_{13} = 0, \\ a_{21}q_1' + a_{22}q_2' + a_{23} = 0; \end{gathered}$$

пусть, далее, координаты единичной точки E, не лежащей ни на одной из этих прямых, суть d_1', d_2'. Допустим, что нам удалось построить систему однородных проективных координат p_1, p_2, p_3 таких, что в этих координатах прямая l_∞ имеет уравнение

$$p_3 = 0,$$

ось p_1 — уравнение

$$p_2 = 0,$$

ось p_2 — уравнение

$$p_1 = 0,$$

и, наконец, точка E — координаты

$$p_1 = 1, \; p_2 = 1, \; p_3 = 1.$$

Если мы введем неоднородные проективные координаты

$$q_1 = \frac{p_1}{p_3}, \quad q_2 = \frac{p_2}{p_3},$$

то благодаря теореме 1 мы можем утверждать, что теорема 2 справедлива. Следовательно, нам достаточно установить, что существует неособенная матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

с помощью которой можно перейти от неоднородных координат q_1', q_2' к неоднородным координатам q_1, q_2, т. е.

$$q_1 = \frac{b_{11}q_1' + b_{12}q_2' + b_{13}}{b_{31}q_1' + b_{32}q_2' + b_{33}}, \quad q_2 = \frac{b_{21}q_1' + b_{22}q_2' + b_{23}}{b_{31}q_1' + b_{32}q_2' + b_{33}}.$$

Матрицу B легко построить, если исходить из требований, которые мы предъявляем системе неоднородных проективных координат q_1, q_2. Именно в этих координатах прямая

$$a_{31}q_1' + a_{32}q_2' + a_{33} = 0$$

должна быть бесконечно удаленной, ось p_1

$$a_{11}q_1' + a_{12}q_2' + a_{13} = 0$$

должна иметь уравнение

$$q_2 = 0,$$

ось p_2

$$a_{21}q_1' + a_{22}q_2' + a_{23} = 0$$

должна иметь уравнение

$$q_1 = 0,$$

и, наконец, точка $E\ (d_1', d_2')$ должна иметь координаты

$$q_1 = 1, \quad q_2 = 1.$$

Так как прямые

$$\begin{aligned} a_{11}q_1' + a_{12}q_2' + a_{13} &= 0, \\ a_{21}q_1' + a_{22}q_2' + a_{23} &= 0, \\ a_{31}q_1' + a_{32}q_2' + a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

попарно различны, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Далее, среди коэффициентов a_{31}, a_{32}, a_{33} хотя бы один отличен от нуля. Не нарушая общности, можно считать, что это a_{31}, и положить $a_{31} = 1$.

Пусть λ_1 и λ_2 — два произвольных вещественных числа, отличных от нуля. Матрицу $B_{\lambda_1\lambda_2}$ зададим в виде

$$B_{\lambda_1\lambda_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{21} & \lambda_1 a_{22} & \lambda_1 a_{23} \\ \lambda_2 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \lambda_2 a_{13} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрица $B_{\lambda_1\lambda_2}$ неособенная. Рассмотрим преобразование неоднородных проективных координат q_1', q_2', порожденное матрицей $B_{\lambda_1\lambda_2}$:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \frac{\lambda_1 a_{21} q_1' + \lambda_1 a_{22} q_2' + \lambda_1 a_{23}}{q_1' + a_{32} q_2' + a_{33}}; \\ q_2 &= \frac{\lambda_2 a_{11} q_1' + \lambda_2 a_{12} q_2' + \lambda_2 a_{13}}{q_1' + a_{32} q_2' + a_{33}}. \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Нетрудно видеть, что в неоднородных проективных координатах q_1, q_2 прямая l_∞

$$q_1' + a_{32} q_2' + a_{33} = 0$$

будет бесконечно удаленной, прямая

$$a_{11} q_1' + a_{12} q_2' + a_{13} = 0$$

будет иметь уравнение

$$q_2 = 0,$$

т. е. будет осью p_1, и прямая

$$a_{21} q_1' + a_{22} q_2' + a_{23} = 0$$

будет иметь уравнение

$$q_1 = 0,$$

т. е. будет осью p_2.

Так как точка E (d_1', d_2') не лежит ни на одной из прямых

$$\begin{aligned} a_{11} q_1' + a_{12} q_2' + a_{13} &= 0, \\ a_{21} q_1' + a_{22} q_2' + a_{23} &= 0, \\ q_1' + a_{32} q_2' + a_{33} &= 0, \end{aligned}$$

то ни одно из чисел

$$\begin{aligned} h_1 &= a_{11} d_1' + a_{12} d_2' + a_{13}, \\ h_2 &= a_{21} d_1' + a_{22} d_2' + a_{23}, \\ h_3 &= \quad d_1' + a_{32} d_2' + a_{33} \end{aligned}$$

не равно нулю. Выберем теперь λ_1 и λ_2 так, чтобы

$$\lambda_1 = \frac{h_3}{h_2}, \quad \lambda_2 = \frac{h_3}{h_1}.$$

Тогда, подставляя в соотношения ($\ast\atop\ast$) координаты точки E, получим:

$$q_1 = \frac{\lambda_1 h_2}{h_3} = 1, \quad q_2 = \frac{\lambda_2 h_1}{h_3} = 1$$

и, следовательно, точка E в системе координат q_1, q_2 имеет координаты 1, 1.

Таким образом, неособенная матрица

$$B_{\lambda_1 \lambda_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{21} & \lambda_1 a_{22} & \lambda_1 a_{23} \\ \lambda_2 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \lambda_2 a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

при $\lambda_1 = \frac{h_3}{h_2}$ и $\lambda_2 = \frac{h_3}{h_1}$ является искомой. Теорема доказана.

3. **Проективные преобразования плоскости.** Так же как и для проективной прямой (см. § 6, п. 1), формулы

$$\left|\begin{aligned} q_1' &= \frac{b_{11}q_1 + b_{12}q_2 + b_{13}}{b_{31}q_1 + b_{32}q_2 + b_{33}}, \\ q_2' &= \frac{b_{21}q_1 + b_{22}q_2 + b_{23}}{b_{31}q_1 + b_{32}q_2 + b_{33}}, \end{aligned}\right. \tag{*}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

— некоторая неособенная матрица, с одной стороны, описывают на проективной плоскости переход от системы одних неоднородных координат q_1, q_2 к другим q_1', q_2', а с другой стороны, в фиксированной системе неоднородных координат q_1, q_2 описывают некоторое точечное преобразование проективной плоскости. Это точечное преобразование проективной плоскости и называют *проективным*.

Если на плоскости введена система однородных проективных координат p_1, p_2, p_3, соответствующая неоднородным координатам q_1, q_2, т. е.

$$q_1 = \frac{p_1}{p_3}, \quad q_2 = \frac{p_2}{p_3},$$

то проективное преобразование плоскости, заданное формулами (*), в однородных координатах будет записываться так:

$$\begin{cases} \rho' p_1' = b_{11}p_1 + b_{12}p_2 + b_{13}p_3, \\ \rho' p_2' = b_{21}p_1 + b_{22}p_2 + b_{23}p_3, \\ \rho' p_3' = b_{31}p_1 + b_{32}p_2 + b_{33}p_3. \end{cases}$$

Ниже мы сформулируем без доказательства ряд свойств проективных преобразований плоскости, которые являются прямыми обобщениями соответствующих свойств проективных преобразований прямой:

Теорема 3. *Проективное преобразование проективной плоскости есть взаимно однозначное отображение.*

Теорема 4. *Для того чтобы проективное преобразование* φ

$$\left| \begin{aligned} q_1' &= \frac{b_{11}q_1 + b_{12}q_2 + b_{13}}{b_{31}q_1 + b_{32}q_2 + b_{33}}, \\ q_2' &= \frac{b_{21}q_1 + b_{22}q_2 + b_{23}}{b_{31}q_1 + b_{32}q_2 + b_{33}} \end{aligned} \right.$$

было аффинным, необходимо и достаточно, чтобы

$$b_{31} = b_{32} = 0.$$

Теорема 4а. *Для того чтобы проективное преобразование плоскости было аффинным, необходимо и достаточно, чтобы бесконечно удаленная прямая переводилась этим преобразованием сама на себя.* (Здесь одни бесконечно удаленные точки могут переходить в другие; важно, что бесконечно удаленная точка не переходит в конечную и наоборот.)

Теорема 5. *Пусть* φ — *проективное преобразование плоскости, заданное в неоднородных координатах формулами:*

$$\left| \begin{aligned} q_1' &= \frac{b_{11}q_1 + b_{12}q_2 + b_{13}}{b_{31}q_1 + b_{32}q_2 + b_{33}}, \\ q_2' &= \frac{b_{21}q_1 + b_{22}q_2 + b_{23}}{b_{31}q_1 + b_{32}q_2 + b_{33}}, \end{aligned} \right. \qquad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда φ *имеет обратное преобразование* φ^{-1}, *которое является проективным и которое в тех же координатах задается формулами:*

$$\left| \begin{aligned} q_1 &= \frac{d_{11}q_1' + d_{12}q_2' + d_{13}}{d_{31}q_1' + d_{32}q_2' + d_{33}}, \\ q_2 &= \frac{d_{21}q_1' + d_{22}q_2' + d_{23}}{d_{31}q_1' + d_{32}q_2' + d_{33}}. \end{aligned} \right.$$

При этом, если отображению φ *соответствует матрица*

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

то обратному преобразованию φ^{-1} *отвечает матрица*

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix},$$

являющаяся обратной для матрицы B.

Теорема 6. *Проективное преобразование плоскости переводит прямые снова в прямые.*

Эта теорема не имеет аналога для проективных преобразований прямой. Доказательство ее непосредственно вытекает из формул:

$$\begin{cases} \rho' p_1' = b_{11}p_1 + b_{12}p_2 + b_{13}p_3, \\ \rho' p_2' = b_{21}p_1 + b_{22}p_2 + b_{23}p_3, \\ \rho' p_3' = b_{31}p_1 + b_{32}p_2 + b_{33}p_3, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

задающих проективное преобразование в однородных координатах.

Теорема 7. *При проективных преобразованиях плоскости сложное отношение четырех точек не меняется.* (В силу теоремы 6 при проективных преобразованиях прямые переходят в прямые. При этом между точками любой прямой и ее образа в неоднородных проективных координатах проективное преобразование плоскости порождает соответствие, описываемое дробно-рациональной функцией.)

Теорема 8. *Проективное преобразование полностью определяется, если известны образы четырех различных точек плоскости, из которых никакие три не лежат на одной прямой.*

Теорема 9. *Проективное преобразование плоскости полностью определяется, если известны образы трех различных прямых и точки, не лежащей ни на одной из этих прямых.*

§ 10. Группа проективных преобразований проективной плоскости

Фиксируем на проективной плоскости какую-нибудь систему неоднородных проективных координат q_1, q_2. Тогда каждому проективному преобразованию плоскости φ отвечает взаимно однозначно класс $\mathscr{L}_\varphi$ неособенных пропорциональных квадратных матриц третьего порядка:

$$\lambda B = \begin{pmatrix} \lambda b_{11} & \lambda b_{12} & \lambda b_{13} \\ \lambda b_{21} & \lambda b_{22} & \lambda b_{23} \\ \lambda b_{31} & \lambda b_{32} & \lambda b_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

— некоторая матрица из класса $\mathscr{L}_\varphi$, а λ—произвольное вещественное число. С помощью матриц λB из класса $\mathscr{L}_\varphi$ проективное преобразование φ в координатах q_1, q_2 задается формулами:

$$\begin{cases} q_1' = \dfrac{b_{11}q_1 + b_{12}q_2 + b_{13}}{b_{31}q_1 + b_{32}q_2 + b_{33}}, \\ q_2' = \dfrac{b_{21}q_1 + b_{22}q_2 + b_{23}}{b_{31}q_1 + b_{32}q_2 + b_{33}}. \end{cases}$$

Класс $\mathscr{L}_\varphi$ можно охарактеризовать таким образом. Например, если $b_{33} \neq 0$, то выбор матрицы B можно произвести, полагая b_{33} равным единице.

Как обычно, под произведением двух проективных преобразований φ и ψ мы понимаем результат их последовательного выполнения. Если даны два проективных преобразования

$$\varphi: \begin{cases} q_1' = \dfrac{a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + a_{13}}{a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}}, \\ q_2' = \dfrac{a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + a_{23}}{a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}}, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (*)$$

и

$$\psi: \begin{cases} q_1' = \dfrac{b_{11}q_1 + b_{12}q_2 + b_{13}}{b_{31}q_1 + b_{32}q_2 + b_{33}}, \\ q_2' = \dfrac{b_{21}q_1 + b_{22}q_2 + b_{23}}{b_{31}q_1 + b_{32}q_2 + b_{33}}, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \left({}^{*}_{*}\right)$$

то произведение этих преобразований

$$\eta = \psi\varphi$$

в координатах q_1, q_2 задается формулами

$$\begin{cases} q_1' = \dfrac{c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + c_{13}}{c_{31}q_1 + c_{32}q_2 + c_{33}}, \\ q_2' = \dfrac{c_{21}q_1 + c_{22}q_2 + c_{23}}{c_{31}q_1 + c_{32}q_2 + c_{33}}, \end{cases} \qquad ({}_{*}{}^{*}{}_{*})$$

где матрица C есть произведение матриц A и B:

$$C = B \cdot A.$$

Действительно, пусть точка M (q_1, q_2) преобразованием φ переводится в точку $\widetilde{M}\,(\widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2)$, а точка $\widetilde{M}$ преобразованием ψ

в точку $M'(q_1', q_2')$, тогда

$$q_1 = \frac{b_{11}\tilde{q}_1 + b_{12}\tilde{q}_2 + b_{13}}{b_{31}\tilde{q}_1 + b_{32}\tilde{q}_2 + b_{33}} =$$

$$= \frac{b_{11}\dfrac{a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + a_{13}}{a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}} + b_{12}\dfrac{a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + a_{23}}{a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}} + b_{13}}{b_{31}\dfrac{a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + a_{13}}{a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}} + b_{32}\dfrac{a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + a_{23}}{a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}} + b_{33}} =$$

$$= \frac{(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31})\,q_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32})\,q_2 + (b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33})}{(b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + b_{33}a_{31})\,q_1 + (b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} + b_{33}a_{32})\,q_2 + (b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33})}.$$

Аналогичная формула справедлива для координаты q_2'. Отсюда и вытекает наше утверждение.

Отметим, что так как

$$\det C = \det B \cdot \det A \neq 0,$$

то матрица C — неособенная, и потому η есть проективное преобразование. Итак, справедлива

Т е о р е м а 1. *Произведение проективных преобразований есть снова проективное преобразование. Если проективные преобразования φ и ψ заданы формулами* (*) *и* ($\overset{*}{*}$), *то их произведение задано формулами*($_*{}^*{}_*$), *при этом матрица произведения преобразований φ и ψ равна произведению матриц этих преобразований*:

$$C = B \cdot A.$$

Т е о р е м а 2. *Совокупность проективных преобразований плоскости относительно операции умножения образует группу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 1 вытекает, что относительно операции умножения множество проективных преобразований замкнуто. Из той же теоремы 1 следует, что операция умножения ассоциативна. Далее, роль единицы относительно умножения играет тождественное преобразование

$$\varepsilon: \begin{cases} q_1' = q_1, \\ q_2' = q_2 \end{cases}$$

с матрицей

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 5 п. 3 § 9 гл. III вытекает, что для каждого проективного преобразования φ есть обратное φ^{-1} и имеет место соотношение

$$\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \varepsilon.$$

Справедливость этого соотношения вытекает из того, что матрицы преобразований φ и φ^{-1} взаимно обратны.

Итак, совокупность проективных преобразований плоскости образует группу относительно операции умножения. Эту группу мы будем обозначать через $\mathcal{P}_2$.

Теорема доказана.

Определим теперь понятие проективной геометрии. Согласно концепции Ф. Клейна *проективная геометрия есть теория инвариантов группы проективных преобразований.*

Так как аффинные и, следовательно, ортогональные преобразования есть частные случаи проективных, то с помощью проективной геометрии можно включить в единую систему проективную, аффинную и евклидову геометрии. Это построение будет сделано ниже, в § 12 гл. III.

§ 11. Линии второго порядка. Полярные преобразования

1. Линии второго порядка. В дальнейшем рассмотрение геометрических образов на проективной плоскости мы будем проводить в однородных проективных координатах p_1, p_2, p_3. Это позволит при изучении линий второго порядка вести параллельно исследование двойственных к ним геометрических образов — пучков второго класса.

Приведем определения линий первого и второго порядков и пучков первого и второго классов.

Линией первого порядка называется совокупность точек, однородные проективные координаты которых удовлетворяют уравнению

$$u_1^0 p_1 + u_2^0 p_2 + u_3^0 p_3 = 0,$$

т. е. линия первого порядка — это совокупность точек, лежащих на одной прямой.

Пучком первого класса называется совокупность прямых, проективные однородные координаты которых удовлетворяют уравнению

$$u_1 p_1^0 + u_2 p_2^0 + u_3 p_3^0 = 0,$$

т. е. пучок первого класса — это совокупность прямых, проходящих через одну точку.

Линией второго порядка называется совокупность точек, однородные проективные координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i_1, i_2 = 1}^{3} a_{i_1 i_2} p_{i_1} p_{i_2} = 0.$$

Пучком второго класса называется совокупность прямых, проективные однородные координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i_1, i_2 = 1}^{3} a_{i_1 i_2} u_{i_1} u_{i_2} = 0.$$

Аналогично определяется понятие линий и пучков третьего, четвертого и т. д. порядков и классов. Так как в однородных координатах проективные преобразования описываются линейными однородными функциями, то при проективных преобразованиях сохраняются порядок и однородность алгебраических форм

$$\sum a_{i_1 i_2} p_{i_1} p_{i_2}.$$

Отсюда следует, что *порядок линий есть инвариант проективных преобразований.*

Рассмотрим, как описывается при проективных преобразованиях преобразование прямых. Пусть

$$u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3 = 0$$

— уравнение произвольной прямой l в однородных координатах. Пусть

$$u'_1 p'_1 + u'_2 p'_2 + u'_3 p'_3 = 0 \tag{*}$$

— уравнение образа прямой l — прямой l' при проективном преобразовании

$$\begin{cases} \rho' p'_1 = c_{11} p_1 + c_{12} p_2 + c_{13} p_3, \\ \rho' p'_2 = c_{21} p_1 + c_{22} p_2 + c_{23} p_3, \\ \rho' p'_3 = c_{31} p_1 + c_{32} p_2 + c_{33} p_3. \end{cases}$$

Отсюда уравнение прямой l' имеет вид:

$$\frac{1}{\rho'} [u'_1 (c_{11} p_1 + c_{12} p_2 + c_{13} p_3) + u'_2 (c_{21} p_1 + c_{22} p_2 + c_{23} p_3) + u'_3 (c_{31} p_1 + \\ + c_{32} p_2 + c_{33} p_3)] = 0. \qquad \left({}^{*}_{*}\right)$$

Так как уравнения (*) и $\left({}^{*}_{*}\right)$ есть уравнения одной и той же прямой, то

$$\frac{1}{\rho'} [(c_{11} u'_1 + c_{21} u'_2 + c_{31} u'_3) p_1 + (c_{12} u'_1 + c_{22} u'_2 + c_{32} u'_3) p_2 + (c_{13} u'_1 + \\ + c_{23} u'_2 + c_{33} u'_3) p_3] = \mu (u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3).$$

Полагая $\sigma = \rho' \mu$, найдем:

$$\begin{cases} \sigma u_1 = c_{11} u'_1 + c_{21} u'_2 + c_{31} u'_3, \\ \sigma u_2 = c_{12} u'_1 + c_{22} u'_2 + c_{32} u'_3, \\ \sigma u_3 = c_{13} u'_1 + c_{23} u'_2 + c_{33} u'_3. \end{cases} \qquad ({}_{*}{}^{*}{}_{*})$$

Формулы $({}_{*}{}^{*}{}_{*})$ описывают связь между однородными координатами прямой и ее образа при проективных преобразованиях. Из этих формул вытекает, что *класс пучка прямых есть инвариант проективных преобразований.*

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 1. *Понятия линии данного порядка и пучка данного класса суть инварианты проективной геометрии.*

В дальнейшем основное наше внимание будет направлено на проективную классификацию линий второго порядка. Важную роль в этом исследовании играет теория поляр.

2. Поляры и их основные свойства. Пусть на проективной плоскости введены однородные проективные координаты p_1, p_2, p_3. Рассмотрим некоторую линию L второго порядка

$$\sum_{i, k=1}^{3} a_{ik}p_ip_k = 0 \quad (a_{ik} = a_{ki}),$$

уравнение которой в подробной записи имеет вид:

$$a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 + 2a_{13}p_1p_3 + 2a_{23}p_2p_3 + a_{33}p_3^2 = 0.$$

Будем говорить, что *точки P и Q гармонически расположены относительно линии второго порядка L,* если точки P, Q, M_1, M_2 образуют гармоническую четверку. Через M_1 и M_2 (рис. 113) обозначены точки пересечения линии L с прямой PQ. Другими словами, точки P и Q гармонически расположены относительно линии L, если пара точек P, Q гармонически сопряжена с парой точек M_1, M_2.

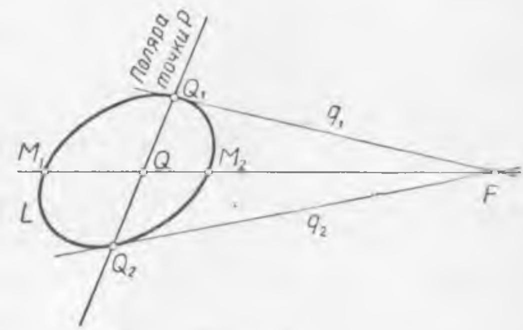


Рис. 113

Множество точек, гармонически сопряженных с фиксированной точкой P относительно линии второго порядка, называется ***полярой*** *точки P относительно этой линии.*

Ниже нам будут полезны следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть l — прямая, заданная в однородных координатах уравнением*

$$u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0.$$

Пусть, далее, A (a_1, a_2, a_3) и B (b_1, b_2, b_3) — две точки прямой l. Тогда параметрическое задание прямой l в однородных координатах имеет вид:

$$p_1 = a_1 + tb_1, \quad p_2 = a_2 + tb_2, \quad p_3 = a_3 + tb_3,$$

где $t \in (-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Так как

$$u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 = 0, \quad u_1b_1 + u_2b_2 + u_3b_3 = 0,$$

то при любом значении $t \in (-\infty, +\infty)$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{3} u_i p_i = \sum_{i=1}^{3} u_i (a_i + tb_i) = \sum_{i=1}^{3} u_i a_i + t \sum_{i=1}^{3} u_i b_i = 0.$$

Следовательно, точка P (p_1, p_2, p_3) принадлежит прямой l. Пусть теперь точка P (p_1, p_2, p_3) лежит на прямой l. Тогда из выполнения соотношений

$$\begin{cases} u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 = 0, \\ u_1 b_1 + u_2 b_2 + u_3 b_3 = 0, \\ u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3 = 0 \end{cases} \tag{*}$$

следует, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0,$$

так как система однородных уравнений (*) имеет ненулевое решение u_1, u_2, u_3. Поэтому существуют одновременно не равные нулю числа α и β такие, что

$$p_i = \alpha a_i + \beta b_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Так как точку P можно считать отличной от точек A и B, то оба числа α и β отличны от нуля. Поэтому можно записать, что

$$p_i = \alpha \left(a_i + \frac{\beta}{\alpha} b_i \right) = \alpha (a_i + tb_i),$$

где $t = \frac{\beta}{\alpha}$. Отсюда следует, что точка P имеет однородные координаты $(a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, a_3 + tb_3)$.

Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Пусть M_i (p_1^i, p_2^i, p_3^i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ — четыре точки, лежащие на одной прямой. Тогда*

$$(M_1, M_2; M_3, M_4) = \frac{\begin{vmatrix} p_1^3 & p_1^1 \\ p_3^3 & p_3^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_1^2 & p_1^3 \\ p_3^2 & p_3^3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} p_1^4 & p_1^1 \\ p_3^4 & p_3^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_1^2 & p_1^4 \\ p_3^2 & p_3^4 \end{vmatrix}},$$

$$(M_1, M_2; M_3, M_4) = \frac{\begin{vmatrix} p_2^3 & p_2^1 \\ p_3^3 & p_3^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_2^2 & p_2^3 \\ p_3^2 & p_3^3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} p_2^4 & p_2^1 \\ p_3^4 & p_3^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_2^2 & p_2^4 \\ p_3^2 & p_3^4 \end{vmatrix}}.$$

Если, кроме того,

$$p_k^3 = p_k^1 + \lambda p_k^2, \quad p_k^4 = p_k^1 + \mu p_k^2 \quad (k = 1, 2, 3),$$

то

$$(M_1,\ M_2;\ M_3,\ M_4)=\frac{\lambda}{\mu}.$$

Доказательство. Пусть

$$q_1=\frac{p_1}{p_3},\quad q_2=\frac{p_2}{p_3}$$

— неоднородные проективные координаты, построенные по координатам $p_1,\ p_2,\ p_3$. Как мы знаем,

$$(M_1,\ M_2;\ M_3,\ M_4)=\frac{q_1^3-q_1^1}{q_1^3-q_1^2}:\frac{q_1^4-q_1^1}{q_1^4-q_1^2}=\frac{q_2^3-q_2^1}{q_2^3-q_2^2}:\frac{q_2^4-q_2^1}{q_2^4-q_2^2}.$$

Заменяя в последних формулах неоднородные координаты q_1^i, q_2^i через отношение однородных координат $\frac{p_1^i}{p_3^i}$, $\frac{p_2^i}{p_3^i}$ для каждой точки M_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$, после простых вычислений получим:

$$(M_1,\ M_2;\ M_3,\ M_4)=\frac{\begin{vmatrix} p_1^3 & p_1^1 \\ p_3^3 & p_3^1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_1^2 & p_1^3 \\ p_3^2 & p_3^3\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} p_1^4 & p_1^1 \\ p_3^4 & p_3^1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_1^2 & p_1^4 \\ p_3^2 & p_3^4\end{vmatrix}}, \qquad (1)$$

$$(M_1,\ M_2;\ M_3,\ M_4)=\frac{\begin{vmatrix} p_2^3 & p_2^1 \\ p_3^3 & p_3^1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_2^2 & p_2^3 \\ p_3^2 & p_3^3\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} p_2^4 & p_2^1 \\ p_3^4 & p_3^1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_2^2 & p_2^4 \\ p_3^2 & p_3^4\end{vmatrix}}. \qquad (2)$$

Если теперь для координат точек M_3 и M_4 справедливы соотношения

$$p_k^3=p_k^1+\lambda p_k^2,$$
$$p_k^4=p_k^1+\mu p_k^2, \qquad (k=1,\ 2,\ 3),$$

то, используя формулу (1), имеем:

$$(M_1,\ M_2;\ M_3,\ M_4)=\frac{\begin{vmatrix} p_1^1+\lambda p_1^2 & p_1^1 \\ p_3^1+\lambda p_3^2 & p_3^1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_1^2 & p_1^1+\lambda p_1^2 \\ p_3^2 & p_3^1+\lambda p_3^2\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} p_1^1+\mu p_1^2 & p_1^1 \\ p_3^1+\mu p_3^2 & p_3^1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_1^2 & p_1^1+\mu p_1^2 \\ p_3^2 & p_3^1+\mu p_3^2\end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{\lambda\begin{vmatrix} p_1^2 & p_1^1 \\ p_3^2 & p_3^1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_1^2 & p_1^1 \\ p_3^2 & p_3^1\end{vmatrix}}:\frac{\mu\begin{vmatrix} p_1^2 & p_1^1 \\ p_3^2 & p_3^1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_1^2 & p_1^1 \\ p_3^2 & p_3^1\end{vmatrix}}=\frac{\lambda}{\mu}.$$

Заметим, что если $\begin{vmatrix} p_1^2 & p_1^1 \\ p_3^2 & p_3^1 \end{vmatrix} = 0$, то нам пришлось бы пользоваться формулой (2) и использовать отличие от нуля $\begin{vmatrix} p_2^2 & p_2^1 \\ p_3^2 & p_3^1 \end{vmatrix}$. Оба определителя $\begin{vmatrix} p_1^2 & p_1^1 \\ p_3^2 & p_3^1 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} p_2^2 & p_2^1 \\ p_3^2 & p_3^1 \end{vmatrix}$ не могут одновременно быть равными нулю, так как тогда $p_1^1 : p_2^1 : p_3^1 = p_1^2 : p_2^2 : p_3^2$, что невозможно, поскольку точки M_1 и M_2 берутся несовпадающими.

Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Поляра всегда является прямой.*

Доказательство. Пусть координаты точек P и Q соответственно равны p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3. Пусть, далее, M — любая точка прямой PQ и x_1, x_2, x_3 — ее координаты. Тогда (лемма 1) для координат точки M справедливы формулы

$$x_1 = p_1 + \lambda q_1,$$
$$x_2 = p_2 + \lambda q_2,$$
$$x_3 = p_3 + \lambda q_3.$$

Общие точки линии L и прямой PQ мы найдем, если в качестве λ выберем корни λ_1 и λ_2 квадратного уравнения

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}(p_i + \lambda q_i)(p_k + \lambda q_k) = 0,$$

которое можно переписать так:

$$\lambda^2 \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}q_iq_k + \lambda\left(\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}p_iq_k + \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}p_kq_i\right) + \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}p_ip_k = 0.$$

Так как $a_{ik} = a_{ki}$, то это уравнение принимает вид:

$$\lambda^2 \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}q_iq_k + 2\lambda \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}p_iq_k + \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}p_ip_k = 0.$$

Из леммы 2 вытекает, что

$$(P, Q; M_1, M_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

и так как P, Q, M_1, M_2 гармонически сопряженные, то

$$(P, Q; M_1, M_2) = -1,$$

или

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1.$$

Вследствие формул Виета имеем:

$$\sum_{i,\, k=1}^{3} a_{ik} p_i q_k = 0,$$

так как $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Рассматривая здесь координаты точки P как фиксированные числа, а координаты точки Q как координаты текущей точки, получаем уравнение поляры точки P относительно линии L:

$$\sum_{i,\, k=1}^{3} a_{ik} p_i q_k = 0.$$

Отсюда следует, что поляра есть прямая. Подробная запись уравнения поляры такова:

$$(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3)q_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3)q_2 + (a_{13}p_1 + \\ + a_{23}p_2 + a_{33}p_3)q_3 = 0.$$

Теорема доказана

Положим

$$\Phi(p_1, p_2, p_3) = \sum_{i,\, k=1}^{3} a_{ik} p_i p_k.$$

Тогда уравнение поляры примет вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} q_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} q_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} q_3 = 0.$$

Это уравнение по форме записи представляет собой уравнение касательной к линии

$$\Phi(p_1, p_2, p_3) = 0$$

в точке (p_1, p_2, p_3), которое хорошо известно из курса анализа. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Если точка P лежит на линии второго порядка, то полярой ее является прямая, касательная к данной линии в точке P.*

Теорема 4. *Если поляра точки P проходит через точку Q, то поляра точки Q проходит через точку P.*

Доказательство. Если p_1, p_2, p_3 — координаты точки P, то поляра точки P имеет уравнение

$$\sum_{i,\, k} a_{ik} p_i x_k = 0$$

и если q_1, q_2, q_3 — координаты точки Q, то поляра точки Q имеет уравнение

$$\sum_{i, k=1}^{3} a_{ik} q_i x_k = 0.$$

Так как $a_{ik} = a_{ki}$, то

$$\sum_{i, k=1}^{3} a_{ik} p_i q_k = \sum_{i, k=1}^{3} a_{ki} p_k q_i.$$

Поэтому соотношение

$$\sum_{i, k=1}^{3} a_{ik} p_i q_k = 0,$$

выражающее, что точка Q лежит на поляре точки P, влечет за собой соотношение

$$\sum_{i, k=1}^{3} a_{ik} q_i p_k = 0,$$

показывающее, что точка P лежит на поляре точки Q.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Если из точки P к линии второго порядка L проведены касательные, то точки касания лежат на поляре точки P* (см. рис. 113 на стр. 223).

Доказательство. Действительно, если q_1 — касательная и Q_1 — ее точка касания к линии второго порядка L, то по теореме 3 прямая q_1 является полярой точки Q_1. Далее, так как прямая q_1 проходит через точку P, то из теоремы 4 вытекает, что поляра точки P проходит через точку Q_1. Аналогично доказывается, что поляра P проходит через Q_2.

3. Полюс. Полярное преобразование. Пусть L — некоторая линия второго порядка. *Если прямая p есть поляра точки P относительно линии L, то точка P называется* ***полюсом прямой*** *p.*

Пусть

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0^1 \qquad (*)$$

—произвольная прямая. Найдем ее полюс. Если

$$\sum_{i, k=1}^{3} a_{ik} p_i p_k = 0$$

— уравнение линии L, то уравнение поляры относительно L для некоторой точки (p_1, p_2, p_3) имеет вид:

---

[1] Здесь и ниже однородные координаты текущей точки прямой будем обозначать x_1, x_2, x_3.

$$\sum_{i,\,k=1}^{3} a_{ik}p_i x_k = (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3)\,x_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 +$$
$$+ a_{32}p_3)\,x_2 + (a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3)\,x_3 = 0.$$

Для того чтобы прямая (*) имела полюс, необходимо, чтобы она была полярой. Поэтому если существуют такие числа p_1, p_2, p_3, что

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3 = u_1, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3 = u_2, \\ a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 = u_3, \end{cases} \qquad ({}^{*}_{*})$$

то точка P с координатами p_1, p_2, p_3 и будет полюсом прямой p. Система (${}^{*}_{*}$) имеет решения при любых u_1, u_2, u_3 в том и только в том случае, когда определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Таким образом, приходим к теореме.

Теорема 6. *Если линия второго порядка L:*

$$\sum_{i,\,k=1}^{3} a_{ik}p_i p_k = 0 \qquad (a_{ik} = a_{ki}),$$

удовлетворяет условию

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то относительно L каждая прямая имеет полюс.

Линии второго порядка, для которых $\Delta \neq 0$, называются ***невырожденными,*** *а линии, для которых $\Delta = 0$, называются* ***вырожденными.***

Пусть теперь p_1, p_2, p_3 — координаты точки P. Если составлять уравнение поляры для точки P относительно линии второго порядка L:

$$\sum_{i,\,k=1}^{3} a_{ik}p_i p_k = 0,$$

то не исключена возможность равенств:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3 = 0, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3 = 0, \\ a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 = 0. \end{cases} \qquad ({}_{*}{}^{*}{}_{*})$$

Из этих соотношений вытекает, что

$$\sum_{i, k=1}^{3} a_{ik} p_i p_k = 0,$$

и, следовательно, точка P принадлежит линии L. Так как соотношения $({}_{*}{}^{*}{}_{*})$ не дают возможность определить поляру точки P, то мы приходим к выводу: *неопределенную поляру могут иметь только точки, расположенные на данной линии второго порядка.*

Если линия L невырожденная, то $\Delta \neq 0$ и система $({}_{*}{}^{*}{}_{*})$ несовместна (решение $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ исключается). Поэтому относительно невырожденной линии второго порядка все точки имеют определенные поляры.

Пусть L — некоторая невырожденная линия второго порядка. Отнесем теперь каждой точке плоскости ее поляру относительно l, а каждой прямой плоскости ее полюс. Так как L — невырожденная линия, то каждой точке P отвечает вполне определенная прямая, а каждой прямой — вполне определенная точка. При этом, очевидно:

а) *разным точкам отвечают разные прямые*;

б) *разным прямым соответствуют разные точки*;

в) *точке пересечения двух прямых соответствует прямая, соединяющая их полюсы*;

г) *прямой, соединяющей две точки, соответствует точка пересечения их поляр.*

Утверждения в) и г) суть прямые следствия теоремы 4.

Таким образом, при указанном соответствии каждой фигуре G, состоящей из точек и прямых, отвечает некоторая фигура G', которая называется *полярным преобразованием* фигуры G относительно данной линии второго порядка L. Если фигура G' есть полярное преобразование фигуры G, то фигура G в свою очередь является полярным преобразованием фигуры G'. *Поэтому фигуры G и G' естественно назвать* ***взаимно полярными***. *Фигура G, совпадающая со своим полярным преобразованием G', называется* ***автополярной.***

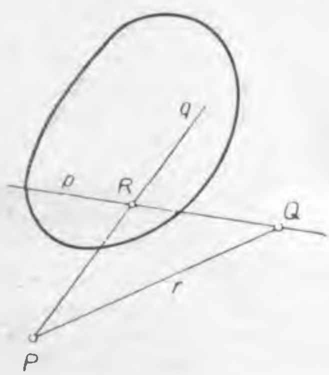


Рис. 114

Простейшим примером автополярной фигуры является так называемый *автополярный трехвершинник.* Укажем способ его построения. Пусть P — произвольная точка, p — ее поляра, Q — произвольная точка на p, q — поляра точки Q, R — точка пересечения поляр p и q и, наконец, r — поляра точки R. По теореме 4 прямая

q пройдет через точку P, а прямая r через точки P и Q. Отсюда видно, что геометрическая фигура, состоящая из точек P, Q, R и прямых p, q, r, автополярная (рис. 114). Эта фигура и называется автополярным трехвершинником.

4. Проективная классификация линий второго порядка. С каждой линией второго порядка свяжем систему однородных проективных координат так, чтобы уравнение этой линии имело наиболее простой вид.

Пусть L — произвольная линия второго порядка. Выберем вне этой линии некоторую точку A_1. Из результатов пункта 2 настоящего параграфа следует, что у точки A_1 есть вполне определенная поляра a_1 относительно линии L. Систему однородных проективных координат x_1, x_2, x_3 введем так, чтобы точка A_1 имела координаты (1, 0, 0), а две произвольные точки A_2 и A_3 прямой a_1 имели координаты (0, 1, 0) и (0, 0, 1). Единичную точку E (1,1,1) выберем произвольно. Пусть

$$\sum_{i,\ k=1}^{3} a_{ik}x_ix_k = 0$$

— уравнение линии L. Так как прямая A_2A_3 имеет уравнение

$$x_1 = 0,$$

то, используя тот факт, что она есть поляра точки A_1 относительно линии L, получим, что

$$a_{12} = 0,\ \ a_{13} = 0.$$

Действительно, если p_1, p_2, p_3 — координаты точки P, то уравнение поляры этой точки имеет вид:

$$(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3)\,x_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3)\,x_2 +$$
$$+ (a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3)\,x_3 = 0.$$

Так как точка A_1 имеет координаты (1, 0, 0), то поляра этой точки имеет уравнение

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0.$$

Далее, прямая A_2A_3 имеет уравнение

$$x_1 = 0.$$

Отсюда

$$a_{12} = a_{13} = 0.$$

Таким образом, уравнение линии L таково:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0. \qquad (*\,{}^{*}_{*}\,*)$$

Если $a_{23} \neq 0$, то мы можем упростить уравнение L за счет некоторой специализации в выборе точек A_2, A_3. Именно точку A_2 выберем на прямой A_2A_3 произвольно, но так, чтобы она не принадлежала линии L. Это можно сделать, ибо при $a_{23} \neq 0$ на прямой

$$x_1 = 0$$

существуют точки $(0,\ p_2,\ p_3)$, для которых

$$a_{22}p_2^2 + 2a_{23}p_2p_3 + a_{33}p_3^2 \neq 0.$$

В качестве точки A_3 возьмем точку пересечения прямой $x_1 = 0$ с полярой точки A_2. Таким образом, произвола в выборе точки A_3 уже нет, поскольку точка A_2 не лежит на линии L и, следовательно, имеет определенную поляру.

Таким образом, построенная нами система однородных проективных координат $x_1,\ x_2,\ x_3$ порождает автополярный трехвершинник $A_1\ A_2\ A_3$. Прямая A_1A_3, имеющая уравнение

$$x_2 = 0,$$

есть поляра точки $A_2\,(0,\ 1,\ 0)$. Подставляя координаты точки $A_2\,(0,\ 1,\ 0)$ в уравнение поляры (* * *), получим для прямой A_1A_3 уравнение

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0.$$

Так как $a_{21} = a_{12} = 0$, то уравнение прямой A_1A_3 принимает вид

$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0.$$

Так как уравнения

$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

и

$$x_2 = 0$$

определяют одну и ту же прямую A_1A_3, то

$$a_{23} = 0.$$

Итак, выбирая надлежащим образом систему однородных проективных координат, мы всегда можем привести уравнение любой линии второго порядка L к виду

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0. \tag{I}$$

Не нарушая общности, можно считать, что в соотношениях между коэффициентами уравнения (I) могут представиться три возможности:

а) $a_{22} = a_{33} = 0$. Тогда уравнение имеет вид:

$$x_1^2 = 0, \tag{Iа}$$

и его дальнейшее упрощение невозможно.

б) $a_{33} = 0$ и $a_{11} \neq 0,\ a_{22} \neq 0$. Тогда при помощи преобразования координат

$$x_1' = \sqrt{|a_{11}|}\,x_1, \quad x_2' = \sqrt{|a_{22}|}\,x_2,\ \ x_3' = x_3$$

уравнение (I) приводится к виду

$$\pm x_1'^2 \pm x_2'^2 = 0. \tag{Iб}$$

в) $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, $a_{33} \neq 0$. Тогда после преобразования координат

$$x'_1 = \sqrt{|a_{11}|}\, x_1,\ \ x'_2 = \sqrt{|a_{22}|}\, x_2,\ \ x'_3 = \sqrt{|a_{33}|}\, x_3$$

уравнение (I) приведется к виду

$$\pm x_1'^2 \pm x_2'^2 \pm x_3'^2 = 0. \qquad \text{(Iв)}$$

Упрощения уравнения, которое производятся в пунктах б) и в), проводятся при выбранном положении точек A_1, A_2, A_3 за счет изменения положения единичной точки E.

Простейшие уравнения I а), б), в) линии второго порядка называются *каноническими*. При помощи надлежащего изменения нумерации координат и умножения на (—1) эти уравнения приводятся к следующим:

$$x_1^2 = 0; \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 0, \\ x_1^2 - x_2^2 = 0; \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Уравнение (1) определяет дважды взятую прямую $x_1 = 0$. Первое из уравнений (2) определяет *точку* (0, 0, 1), второе уравнение определяет *пару прямых*

$$x_1 + x_2 = 0,\ \ x_1 - x_2 = 0.$$

Все линии второго порядка (1) и (2) вырожденные, так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнения (3) определяют невырожденные линии второго порядка, поскольку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{vmatrix} = \pm 1 \neq 0.$$

Первому из уравнений (3) отвечает пустое множество. Второму из уравнений (3) отвечает кривая. Она называется *овальной кривой*. Овальная кривая разбивает проективную плоскость на две области, из которых первая характеризуется условием

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0$$

и называется *внутренней*, а вторая — условием

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 > 0$$

и называется *внешней*. Прямая $x_3 = 0$ не пересекает внутреннюю область, поскольку при $x_3 = 0$ неравенство

$$x_1^2 + x_2^2 < 0$$

невозможно. Поэтому для всех точек внутренней области $x_3 \neq 0$, и мы можем ввести для них неоднородные проективные координаты

$$q_1 = \frac{x_1}{x_3}, \quad q_2 = \frac{x_2}{x_3}.$$

В неоднородных координатах внутренняя область характеризуется соотношением

$$q_1^2 + q_2^2 < 1$$

и, следовательно, топологически эквивалентна[1] евклидову кругу, так как посредством неоднородных координат q_1 и q_2 внутренняя область отображается на открытый круг евклидовой плоскости взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

§ 12. Теоретико-групповые принципы геометрии

1. Проективная группа и ее основные подгруппы. Пусть нам дана евклидова плоскость. Введем на ней декартову систему координат x_1, x_2. Рассмотрим теперь проективные преобразования евклидовой плоскости. Как мы знаем, в декартовой системе координат проективные преобразования задаются дробно-линейными функциями координат:

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}}, \\ x_2' = \dfrac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}}, \end{cases}$$

причем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В § 10 гл. III было установлено, что совокупность проективных преобразований относительно операции умножения образует группу. Эту группу мы обозначали через $\mathcal{P}_2$.

Поэтому проективную геометрию мы рассматриваем как теорию инвариантов группы $\mathcal{P}_2$.

---

[1] Две фигуры называются *топологически эквивалентными*, если множество точек одной из них допускает взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение на множество точек другой. (Более подробно об этом см. в § 1 гл. V.)

Рассмотрим более подробно вопрос об инвариантах группы проективных преобразований. Назовем *инвариантом n произвольных точек относительно группы* $\mathcal{P}_2$ *скалярную функцию* $f(M_1, M_2, \ldots, \ldots, M_n)$, *не равную тождественно постоянной, но принимающей одинаковые значения на таких системах n точек, которые переводятся друг в друга с помощью проективного преобразования.*

Проективная группа (так мы будем ниже называть группу $\mathcal{P}_2$) *не имеет инвариантов от трех и менее точек*. Действительно, если бы такой инвариант существовал, то он для любых точек принимал бы всегда одно и то же значение, поскольку проективным преобразованием две любые тройки точек, не лежащие на одной прямой, могут быть совмещены. По той же причине не существует инварианта четырех точек, из которых каждые три не лежат на одной прямой. Однако для проективной группы *существует инвариант четырех точек, лежащих на одной прямой: им является сложное отношение.*

При $n \geqslant 5$ существуют инварианты произвольной системы n точек. Весьма замечательным является то обстоятельство, что все эти инварианты могут быть выражены с помощью сложных отношений. На доказательстве этого факта мы останавливаться не будем. Оно дано в книге Н. В. Ефимова «Высшая геометрия» (гл. VI, § 161). *Сложное отношение называют поэтому* ***основным инвариантом*** *проективной группы.*

Пусть G — группа преобразований некоторого множества R. Преобразования группы G, преобразующие в самое себя некоторое точечное множество V пространства R, называются *автоморфными преобразованиями или автоморфизмами относительно множества V*; автоморфизмы могут перемещать точки множества V, но при этом каждая точка множества V может переместиться лишь в точку множества V.

Произведение двух автоморфизмов относительно данного множества V есть снова автоморфизм относительно множества V. Преобразование, обратное автоморфизму относительно множества V, также есть автоморфизм относительно того же множества V; отсюда следует, что *совокупность всех преобразований группы G, автоморфных относительно множества V, образует группу.*

Евклидову плоскость, которую мы рассматриваем в этом параграфе, пополним бесконечно удаленными точками, и пусть l_∞ — бесконечно удаленная прямая. Совокупность проективных преобразований, автоморфных относительно прямой l_∞, образует подгруппу $\mathcal{A}$ проективной группы. Подгруппа $\mathcal{A}$ называется *аффинной группой*, а каждое преобразование, принадлежащее $\mathcal{A}$, *аффинным преобразованием*. Из формул

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}}, \\ x_2' = \dfrac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}}, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

определяющих общие проективные преобразования, вытекает, что автоморфизмы проективной группы относительно l_∞ характеризуются тем, что $a_{31} = a_{32} = 0$, $a_{33} \neq 0$, и мы получаем координатное представление такого преобразования в следующей форме:

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{a_{11}}{a_{33}} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{33}} x_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{33}}, \\ x_2' = \dfrac{a_{21}}{a_{33}} x_1 + \dfrac{a_{22}}{a_{33}} x_2 + \dfrac{a_{23}}{a_{33}}, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Нетрудно видеть, что аффинные преобразования, которые изучались в главе II, совпадают с преобразованиями проективной группы, переводящими в себя бесконечно удаленную прямую. Поэтому то, что мы назвали группу автоморфизмов относительно прямой l_∞ аффинной, полностью согласовано с материалом главы II.

Таким образом, *аффинная геометрия*, которая была изучена подробно в главе II, *представляет собой теорию инвариантов аффинной группы, или, что то же самое, теорию инвариантов подгруппы автоморфизмов проективной группы относительно бесконечно удаленной прямой* l_∞.

Остановимся на вопросе *об инвариантах аффинной группы*. Очевидно, все проективные инварианты являются и аффинными инвариантами. Далее оказывается, что *существуют аффинные инварианты, не являющиеся проективными*. Таким инвариантом является *простое отношение трех точек, лежащих на одной прямой. Аффинных инвариантов трех точек, не лежащих на одной прямой, не существует*. Это вытекает из того, что любые три точки, не лежащие на одной прямой, аффинным преобразованием могут быть переведены в любые три другие точки, также не лежащие на одной прямой. *При $n \geqslant 4$ существуют аффинные инварианты произвольной системы n точек*. Все они могут быть выражены через простые отношения. Поэтому *простое отношение называют* ***основным инвариантом*** *аффинной группы*.

Аффинное преобразование

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23} \end{cases}$$

называется *ортогональным*, если его матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\varphi, & a_{21} &= \sin\varphi, \\ a_{12} &= -\sin\varphi, & a_{22} &= \cos\varphi, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\varphi, & a_{21} &= \sin\varphi, \\ a_{12} &= \sin\varphi, & a_{22} &= -\cos\varphi, \end{aligned}$$

где

$$\varphi \in (-\pi, \pi].$$

Как было установлено в главах I и II, совокупность ортогональных преобразований образует группу. Эта группа называется *ортогональной. Ортогональная группа есть подгруппа аффинной и проективной групп.*

В отличие от рассмотренных выше групп, ортогональная группа имеет *инвариант двух точек.* Таковым является, например, функция двух точек $M(x_1, x_2)$, $N(y_1, y_2)$:

$$\rho(M, N) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

Инвариантность этой функции проверяется простыми выкладками, которых мы проводить не будем. *Величина $\rho(M, N)$ называется* ***расстоянием*** *между двумя точками M и N. Расстояние представляет собой* ***основной инвариант*** *геометрии ортогональной группы, поскольку все другие инварианты могут быть выражены через расстояния.*

Как было установлено в главе II, *геометрия ортогональной группы представляет собой евклидову геометрию.*

Выше мы рассмотрели проективную группу с основными ее подгруппами — аффинной и ортогональной. Этим группам соответствуют геометрии: проективная, аффинная и евклидова. Очевидно, чем шире группа преобразований, лежащая в основе той или другой геометрии, тем уже класс геометрических объектов. Это вполне понятно, ибо, чем больше преобразований содержит группа, тем меньшее количество соотношений и функций остается инвариантными относительно всех преобразований данной группы. Поэтому из перечисленных геометрий самый бедный класс объектов имеет проективная геометрия, а самый богатый — евклидова.

2. Группа автоморфизмов относительно невырожденной линии второго порядка. Пусть k — невырожденная овальная линия. Рассмотрим группу автоморфизмов относительно линии k. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если k — произвольная овальная линия, A и A' — две произвольные точки, расположенные во внутренней области линии k, то существуют два и только два автоморфизма относительно k, переводящие точку A в точку A' и произвольно данное направление при точке A — в произвольно данное направление при точке A'. При этом внутренняя область овальной кривой переходит в себя.*

Доказательство этой теоремы мы приводить не будем. Оно дано в книге Н. В. Ефимова «Высшая геометрия» (см. гл. VI, § 168).

Линию k, относительно которой рассматриваются автоморфизмы, будем называть *абсолютом*, а сами автоморфизмы — *гиперболическими движениями.*

Итак, пусть фиксирован абсолют, или, что то же, овальная кривая второго порядка. Две фигуры будем называть *конгруэнтными в гиперболической геометрии*, или, что то же, геометрии движений относительно выбранного абсолюта, если одна из них преобразуется в другую при помощи некоторого гиперболического движения. В гиперболической геометрии существуют инварианты двух точек. Например, инвариантом двух произвольных точек P, Q является сложное отношение $(P, Q; U, V)$, где U, V — точки пересечения прямой PQ с абслютом k, а также любая функция этого сложного отношения.

Среди всех инвариантов гиперболической геометрии наиболее важную роль играет инвариант $c \ln (P, Q; U, V)$, где $c \neq 0$ — некоторая постоянная.

Точки P и Q будем брать теперь во внутренней области абсолюта k. Тогда величина $(P, Q; U, V)$ положительна, и потому $\ln (P, Q; U, V)$ является вещественным числом. Далее, если направление вектора $\overline{PQ}$ противоположно направлению вектора $\overline{UV}$, то $(P, Q; U, V) > 1$ и $\ln (P, Q; U, V) > 0$; если же направления векторов $\overline{PQ}$ и $\overline{UV}$ совпадают, то $(P, Q; U, V) < 1$ и $\ln (P, Q; U, V) < 0$.

Предположим, что имеет место первый случай. Возьмем на отрезке PQ произвольную точку R. Непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$(P, Q; U, V) = (P, R; U, V) \cdot (R, Q; U, V).$$

Отсюда

$$\ln (P, Q; U, V) = \ln (P, R; U, V) + \ln (R, Q; U, V); \qquad (*)$$

При рассматриваемом нами расположении точек справедливы неравенства

$$(P, Q; U, V) > 1, \ (P, R; U, V) > 1 \text{ и } (R, Q; U, V) > 1.$$

Поэтому все слагаемые в равенстве (*) положительны. Если векторы $\overline{PQ}$ и $\overline{UV}$ имеют одинаковое направление, то все члены равенства (*) отрицательны. В обоих случаях имеем:

$$|\ln (P, Q; U, V)| = |\ln (P, R; U, V)| + |\ln (R, Q; U, V)|.$$

Каждому отрезку PQ, лежащему внутри отрезка UV, отнесем положительное число

$$\rho (PQ) = |c \ln (P, Q; U, V)|.$$

Нетрудно видеть, что:

1) *конгруэнтным отрезкам будут сопоставлены равные числа, поскольку* $\rho(PQ)$ *— инвариант автоморфизмов относительно абсолюта* k;

2) *числа, отнесенные отрезку* PQ *и его частям* PR *и* RQ, *таковы, что*

$$\rho(PQ) = \rho(PR) + \rho(RQ);$$

3) *для любого отрезка* PQ

$$\rho(PQ) > 0.$$

Заметим, что любой отрезок PQ может быть взят в качестве масштабного. Для этого нужно положить

$$c = \frac{1}{\ln(P,\ Q;\ U,\ V)}.$$

Точно такими же свойствами характеризуется длина отрезка в евклидовой геометрии. На основании указанной аналогии функцию отрезка $\rho\ (PQ)$ назовем длиной отрезка PQ в гиперболической геометрии.

3. Модель Кэли – Клейна для геометрии Лобачевского. Пусть k — овальная линия второго порядка. Будем строить гиперболическую геометрию внутри абсолюта k. За гиперболические точки примем точки внутренней области овальной линии k, а за гиперболические прямые всевозможные хорды линии k. Точки самой линии не причисляются к объектам гиперболической геометрии; поэтому отрезки, изображающие гиперболические прямые, не содержат своих концов.

Непосредственной проверкой можно установить, что для гиперболической геометрии выполняются аксиомы связи, порядка и принцип Дедекинда. С помощью теоремы 1 п. 1 § 11 можно доказать, что в гиперболической геометрии выполнены все аксиомы конгруэнтности. Следовательно, все аксиомы абсолютной геометрии справедливы для гиперболической геометрии.

Так как через любую точку A, лежащую во внутренней области абсолюта, можно провести бесконечно много хорд абсолюта, не пересекающихся с данной прямой a, при условии, что точка A не принадлежит прямой a, то в гиперболической геометрии выполнена аксиома параллельности Лобачевского (см. формулировку этой аксиомы в § 16 гл. III). Проще всего в последнем факте убедиться, взяв в качестве абсолюта окружность на евклидовой плоскости (рис. 115).

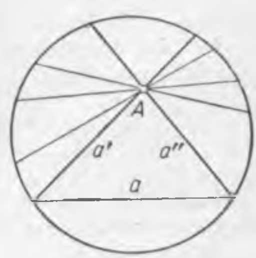


Рис. 115

Таким образом, на объектах евклидовой геометрии построена реализация геометрии Лобачевского. В соответствии с положениями, развитыми в § 20 гл. I, мы получим, что: 1) *система аксиом геометрии Лобачевского непротиворечива в той же степени, что и система аксиом геометрии Евклида*; 2) *аксиома параллельности не зависит от аксиом связи, порядка, конгруэнтности и непрерывности.*

В этой книге мы наметили лишь основные контуры реализации геометрии Лобачевского, которую обычно называют *реализацией Кэли—Клейна.* Более подробное изложение этого вопроса, а также примеры других реализаций содержатся в книгах В. Ф. Кагана «Основания геометрии», ч. II, М., ГИТТЛ, 1956, (гл. XIII) и Н. В. Ефимова «Высшая геометрия» (гл. VI, § 168, 170, 171), к которым мы и отсылаем читателя.

Г Л А В А IV. ОСНОВЫ ТЕОРИИ КРИВЫХ

§ 1. Векторные функции скалярного аргумента

В этом параграфе сообщаются вспомогательные сведения, относящиеся к векторным функциям скалярного аргумента. Поскольку факты, о которых будет идти речь, являются простыми обобщениями основных понятий курса математического анализа, то мы по большей части ограничимся лишь изложением формулировок соответствующих понятий и теорем.

Фиксируем в пространстве декартову систему координат с началом в точке O (см. рис. 116).

Пусть, далее, каждому числу $t \in [a, b]$ поставлен в соответствие по некоторому правилу вектор

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

с началом в точке O. В таком случае мы будем говорить, что на сегменте $[a, b]$ определена ***вектор-функция***

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t).$$

Если $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты координатных осей x, y, z, то справедливо разложение

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k},$$

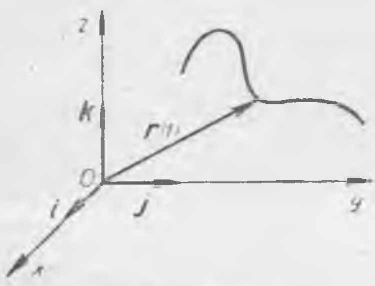


Рис. 116

где скалярные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ суть проекции вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ на указанную координатную ось. Функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ будем называть составляющими вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$.

Пусть на промежутке $[a, b]$ задана вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$. Говорят, что *вектор $\boldsymbol{a}$ есть* ***предел*** *этой функции в точке $t_0 \in [a, b]$, если*

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| = 0.$$

Аналогично определяется предел последовательности векторов. Именно *последовательность векторов $\boldsymbol{r}_n$ имеет пределом вектор $\boldsymbol{a}$, если*

$$\lim_{n \to \infty} |\boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{a}| = 0.$$

Теорема 1. *Для того чтобы вектор* $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}$ *был пределом функции* $\boldsymbol{r}(t)$ *в точке* t_0 *или пределом последовательности векторов* $\boldsymbol{r}_n$, *необходимо и достаточно, чтобы составляющие вектора* $\boldsymbol{a}$ *были пределами составляющих векторов* $\boldsymbol{r}(t)$ *или* $\boldsymbol{r}_n$.

Используя неравенства

$$|x(t) - \alpha| \leqslant |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}|; \quad |y(t) - \beta| \leqslant |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}|;$$
$$|z(t) - \gamma| \leqslant |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}|,$$

легко установим необходимость условия теоремы.

Из неравенства

$$|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| = \sqrt{(x(t) - \alpha)^2 + (y(t) - \beta)^2 + (z(t) - \gamma)^2} \leqslant$$
$$\leqslant |x(t) - \alpha| + |y(t) - \beta| + |z(t) - \gamma|$$

вытекает достаточность условия теоремы.

Для предела последовательности векторов $\boldsymbol{r}_n$ доказательство вполне аналогично.

В дальнейшем будем использовать обозначения

$$\boldsymbol{a} = \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t)$$
$$\boldsymbol{a} = \lim_{n \to \infty} \boldsymbol{r}_n.$$

Теорема 2. *Если*

$$\boldsymbol{a} = \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t), \ \boldsymbol{b} = \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_2(t)$$
$$(a \leqslant t \leqslant b),$$

то:

1) $\lambda(t_0)\,\boldsymbol{a} + \mu(t_0)\,\boldsymbol{b} = \lim_{t \to t_0} (\lambda(t)\,\boldsymbol{r}_1(t) + \mu(t)\,\boldsymbol{r}_2(t))$

($\lambda(t)$ *и* $\mu(t)$ — *некоторые непрерывные функции* $t \in [a, b]$).

2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lim_{t \to t_0} (\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t))$;

3) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \lim_{t \to t_0} [\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t)]$.

Пусть, кроме того,

$$\boldsymbol{c} = \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_3(t),$$

тогда

4) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \lim_{t \to t_0} (\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t), \boldsymbol{r}_3(t))$.

Дословно также формулируется теорема о пределах различных операций для последовательностей векторов.

Доказательство теоремы 2 с помощью теоремы 1 легко сводится к теоремам о пределах арифметических операций над скалярными функциями, которые проходятся в курсе математического анализа.

Вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ *называется* ***непрерывной в точке*** $t_0 \in [a, b]$, *если*

$$\boldsymbol{r}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t).$$

Если вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ непрерывна во всех точках промежутка $[a, b]$, то говорят, что она *непрерывна на* $[a, b]$. В дальнейшем для приращения вектор-функции будем применять следующее обозначение:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t).$$

Теорема 3. *Для того чтобы вектор-функция* $\boldsymbol{r}(t)$ *была непрерывна в точке* t_0 *(на промежутке* $[a, b]$*), необходимо и достаточно, чтобы были непрерывны в точке* t_0 *(на промежутке* $[a, b]$*) ее составляющие.*

Доказательство этой теоремы есть простое следствие теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть* $\boldsymbol{r}_1(t)$, $\boldsymbol{r}_2(t)$, $\boldsymbol{r}_3(t)$ *— непрерывные функции на промежутке* $[a, b]$. *Тогда на* $[a, b]$ *непрерывны следующие функции:*

1) $\boldsymbol{r}(t) = \lambda_1(t)\boldsymbol{r}_1(t) + \lambda_2(t)\boldsymbol{r}_2(t) + \lambda_3(t)\boldsymbol{r}_3(t)$

(здесь, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$ *— непрерывные функции на* $[a, b]$*);*

2) $f(t) = (\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t))$;

3) $\boldsymbol{R}(t) = [\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t)]$;

4) $h(t) = (\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t), \boldsymbol{r}_3(t))$.

Другими словами, вместе с исходными функциями непрерывны их линейная комбинация, скалярное, векторное и смешанное произведения.

Отметим, что $\boldsymbol{r}(t)$ и $\boldsymbol{R}(t)$ — вектор-функции, а $f(t)$ и $h(t)$ — скалярные функции.

Доказательство теоремы 4 проведем для вектор-функции $\boldsymbol{R}(t)$. Имеем:

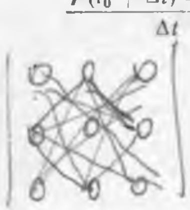
$$\boldsymbol{R}(t) = [\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t)] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t) \end{vmatrix} =$$

$$= [y_1(t)\, z_2(t) - z_1(t)\, y_2(t)]\, \boldsymbol{i} + [z_1(t) x_2(t) - z_2(t)\, x_1(t)]\, \boldsymbol{j} + $$
$$+ [x_1(t)\, y_2(t) - x_2(t)\, y_1(t)]\, \boldsymbol{k}.$$

Из этого соотношения и теоремы 3 вытекает непрерывность составляющих вектор-функции $\boldsymbol{R}(t)$, а следовательно, и самой этой функции.

Пусть на сегменте $[a, b]$ задана вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$. Говорят, что *она* ***дифференцируема в точке*** $t_0 \in [a, b]$, *если при* $\Delta t \to 0$ *существует предел отношения*

$$\frac{\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}.$$



Этот предел называют *производной вектор-функции* $\boldsymbol{r}(t)$ *в точке* t_0 и обозначают $\boldsymbol{r}'(t_0)$, или $\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_{t=t_0}$.

Если вектор-функция дифференцируема в некоторой точке, то, очевидно, она и непрерывна в этой точке.

Если вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ имеет производную в каждой точке промежутка $[a, b]$, то говорят, что *она дифференцируема на всем промежутке* $[a, b]$.

Теорема 5. *Пусть вектор-функция* $\boldsymbol{r}(t)$ *дифференцируема в точке* $t_0 \in [a, b]$, *тогда составляющие этой функции также дифференцируемы в точке* t_0, *и имеет место равенство*

$$\boldsymbol{r}'(t_0) = x'(t_0)\,\boldsymbol{i} + y'(t_0)\,\boldsymbol{j} + z'(t_0)\,\boldsymbol{k}.$$

Обратное утверждение также имеет место.

Доказательство. Докажем прежде всего, что составляющие вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ дифференцируемы в точке t_0. Достаточно это проверить для функции $x(t)$. Имеем:

$$x(t) = (\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{i}).$$

Отсюда

$$\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0), \boldsymbol{i}) = \left(\frac{\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}, \boldsymbol{i}\right).$$

Так как

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}, \boldsymbol{i}\right) = (\boldsymbol{r}'(t_0), \boldsymbol{i}),$$

то функция $x(t)$ дифференцируема в точке t_0 и имеет место равенство

$$x'(t_0) = (\boldsymbol{r}'(t_0), \boldsymbol{i}). \qquad (*)$$

Аналогично имеем:

$$y'(t_0) = (\boldsymbol{r}'(t_0), \boldsymbol{j}); \qquad (**)$$
$$z'(t_0) = (\boldsymbol{r}'(t_0), \boldsymbol{k}). \qquad (*_**)$$

Из формул $(*)$, $(**)$ $(*_**)$ вытекает, что

$$\boldsymbol{r}'(t_0) = x'(t_0)\,\boldsymbol{i} + y'(t_0)\,\boldsymbol{j} + z'(t_0)\,\boldsymbol{k}.$$

Проводя рассуждения в обратном порядке, докажем обратное утверждение.

Теорема доказана.

Если $\boldsymbol{r}(t)$ дифференцируема на всем промежутке $[a, b]$, то составляющие этой функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ также дифференцируемы всюду на $[a, b]$ и при всех t справедливо равенство

$$\boldsymbol{r}'(t) = x'(t)\,\boldsymbol{i} + y'(t)\,\boldsymbol{j} + z'(t)\,\boldsymbol{k}.$$

Это утверждение есть непосредственное следствие теоремы 5.

Приведем без доказательства основные формулы для дифференцирования операций над вектор-функциями:

1. $\frac{d}{dt}(\lambda_1 \boldsymbol{r}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{r}_2) = \lambda_1 \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} + \lambda_2 \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}$

(λ_1 и λ_2—некоторые постоянные числа).

2. $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \left(\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}, \boldsymbol{r}_2\right) + \left(\boldsymbol{r}_1, \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}\right)$. $(uv)' = u'v + uv'$.

3. $\frac{d}{dt}[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2] = \left[\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}, \boldsymbol{r}_2\right] + \left[\boldsymbol{r}_1, \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}\right]$.

Пусть на промежутке $[a, b]$ задана вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$. Разобьем промежуток $[a, b]$ точками

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

и пусть

$$\lambda = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (t_{i+1} - t_i).$$

Составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{r}(\tau_i)\,\Delta t_i,$$

где

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \text{ и } \tau_i \in [t_i, t_{i+1}].$$

Будем говорить, что *вектор-функция* $\boldsymbol{r}(t)$ ***интегрируема*** *на* $[a, b]$, *если существует предел интегральных сумм* σ_n *при* $\lambda \to 0$. Этот предел будем называть ***определенным интегралом*** *от вектор-функции* $\boldsymbol{r}(t)$ и обозначать так:

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt.$$

Теорема 6. *Всякая непрерывная вектор-функция интегрируема. Более того, справедлива формула*

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt = \boldsymbol{i}\int_a^b x(t)\,dt + \boldsymbol{j}\int_a^b y(t)\,dt + \boldsymbol{k}\int_a^b z(t)\,dt.$$

Теорема 7. *Пусть функция* $\boldsymbol{r}(t)$ *имеет непрерывную производную, тогда справедлива формула Ньютона — Лейбница*

$$\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a) = \int_a^b \boldsymbol{r}'(t)\,dt.$$

Доказательство теорем 6 и 7 мы предоставляем читателю в качестве упражнения.

Мы будем говорить, что *вектор-функция* $\boldsymbol{r}(t)$, *заданная на промежутке* $[a, b]$, ***k раз непрерывно дифференцируема*** $(k \geqslant 1)$, *если вектор-функция* $\boldsymbol{r}(t)$ *имеет на* $[a, b]$ *непрерывные производные до порядка* k *включительно.*

Совокупность k раз непрерывно дифференцируемых вектор-функций на промежутке $[a, b]$ мы будем обозначать $\boldsymbol{C}^{(k)}[a, b]$, а совокупность k раз непрерывно дифференцируемых скалярных функций будем обозначать $C^{(k)}[a, b]$. Иногда, если указание промежутка $[a, b]$ не нуждается в особом подчеркивании, будем применять более краткие обозначения: $\boldsymbol{C}^{(k)}$, $C^{(k)}$.

Теорема 8. *Для вектор-функций* $\boldsymbol{r}(t) \in \boldsymbol{C}^{(k)}$ *справедлива следующая формула Тейлора*:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{r}''(t_0)(\Delta t)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)(\Delta t)^n +$$
$$+ \boldsymbol{\varepsilon}(t_0, \Delta t)(\Delta t)^n,$$

где

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0), \quad t_0, \ t_0 + \Delta t \in [a, b],$$
$$\lim_{\Delta t \to 0} |\boldsymbol{\varepsilon}(t_0, \Delta t)| = 0.$$

Справедливость теоремы 8 непосредственно вытекает из формул Тейлора для скалярных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, являющихся составляющими вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$.

Аналогичным образом для векторных функций от нескольких скалярных аргументов вводятся понятия предела, непрерывности, частных производных и т. д. Мы не будем останавливаться на этом более подробно, так как принципиальных отличий по сравнению с функциями одного переменного здесь нет.

§ 2. Путь

1. Пусть на сегменте $[a, b]$ задана непрерывная вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$. С помощью вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ порождается некоторое отображение отрезка $[a, b]$ в пространство, если каждому числу $t \in [a, b]$ относить в пространстве точку $M(t)$ — конец вектора $\boldsymbol{r}(t)$.

Мы будем говорить, что это отображение, порожденное функцией $\boldsymbol{r}(t)$, определяет в пространстве некоторый *путь* l. Функцию $\boldsymbol{r}(t)$ часто называют *параметрическим представлением пути* l.

Путь l будем называть ***регулярным***, *если определяющая его вектор-функция*

$$\boldsymbol{r}(t) \in \boldsymbol{C}^{(k)}[a, b] \qquad (k \geqslant 1)$$

и всюду на $[a, b]$:

$$\boldsymbol{r}'(t) \neq \boldsymbol{0}.$$

Если $k = 1$, то путь l также называют *гладким*.

Совокупность регулярных путей, порожденных k раз непрерывно дифференцируемыми вектор-функциями, будем сбозначать $P^{(k)}$.

Два регулярных пути l и m будем называть ***эквивалентными***, *если определяющие их вектор-функции $\boldsymbol{r}(t) \in \boldsymbol{C}^{(k)}[a, b]$ и $\boldsymbol{g}(\tau) \in \boldsymbol{C}^{(k)}[\alpha, \beta]$ удовлетворяют следующим условиям:*

1. *Существует функция*

$$t = f(\tau)$$

такая, что:

а) $f(\tau) \in C^{(k)}[\alpha, \beta]$, *т. е. k раз непрерывно дифференцируема;*

б) $f(\alpha) = a$,
$f(\beta) = b$;

в) при любом $\tau \in [\alpha, \beta]$

$$f'(\tau) \neq 0.$$

2. *При любом $\tau \in [\alpha, \beta]$ справедливо соотношение*

$$\boldsymbol{r}(f(\tau)) = \boldsymbol{g}(\tau).$$

Замечание. В приведенном выше определении эквивалентности путей удобно считать, что не обязательно $a < b$ и $\alpha < \beta$. Поэтому условие 1 означает лишь, что между промежутками $[a, b]$ и $[\alpha, \beta]$ есть k раз непрерывно дифференцируемое взаимно однозначное соответствие. Из условия 1*в*) следует, что всюду на $[\alpha, \beta]$ имеем: $f'(\tau) > 0$ или $f'(\tau) < 0$.

Приведем простые примеры эквивалентных и не эквивалентных путей.

Пример 1. Путь l определяется вектор-функцией

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\,\boldsymbol{i} + (\sin t)\,\boldsymbol{j}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi.$$

Путь m определяется вектор-функцией

$$\boldsymbol{g}(\tau) = (\cos 2\tau)\,\boldsymbol{i} + (\sin 2\tau)\,\boldsymbol{j}, \quad 2\pi \leqslant \tau \leqslant 4\pi.$$

Оба пути l и m (см. рис. 117) представляют собой дважды проходимую против часовой стрелки окружность с центром в начале координат радиуса единица.

Оба пути регулярны. Связь между промежутками $[0, 4\pi]$ и $[2\pi, 4\pi]$ устанавливается с помощью функции

$$t = f(\tau) = 2\tau - 4\pi,$$

при этом

$$f(2\pi) = 0,$$
$$f(4\pi) = 4\pi,$$
$$f'(\tau) = 2 > 0.$$

Функция $f(\tau)$ имеет производные всех порядков. Далее, при любом $\tau \in [2\pi, 4\pi]$ имеем:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(2\tau - 4\pi) = \cos(2\tau - 4\pi)\,\boldsymbol{i} + \sin(2\tau - 4\pi)\,\boldsymbol{j} =$$
$$= (\cos 2\tau)\,\boldsymbol{i} + (\sin 2\tau)\,\boldsymbol{j} = \boldsymbol{g}(\tau).$$

Итак, пути l и m эквивалентны.

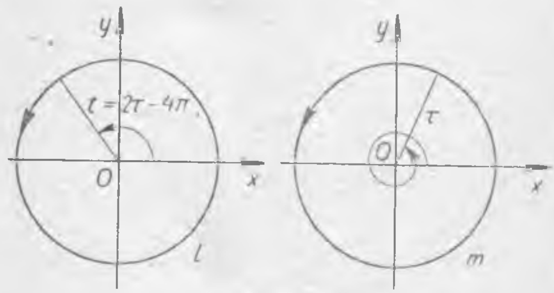


Рис. 117

Пример 2. Пусть l — путь, рассмотренный в примере 1, а n — путь, заданный вектор-функцией

$$\boldsymbol{h}(\tau) = [\cos(\arccos\tau)]\,\boldsymbol{i} + [\sin(\arccos\tau)]\,\boldsymbol{j}, \; -1 \leqslant \tau \leqslant 1.$$

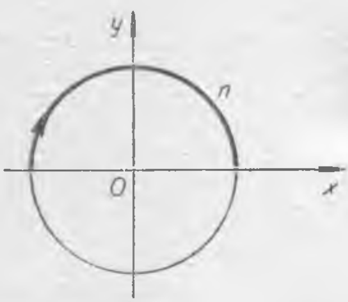


Рис. 118

Тогда при изменении τ от -1 до $+1$ $\arccos\tau$ изменяется в пределах от π до 0 и путь n представляет собой верхнюю половину окружности, изображенной на рис. 118, проходимую в направлении часовой стрелки. Очевидно, что пути l и n не эквивалентны.

2. Докажем, что введенное выше понятие эквивалентности путей удовлетворяет трем условиям: *рефлексивности, симметричности и транзитивности*.

Всякий регулярный путь l, очевидно, эквивалентен сам себе. Для этого достаточно использовать функцию

$$f(\tau) = \tau.$$

Докажем теперь *симметричность* этого отношения. Пусть пути l и m эквивалентны. Тогда, согласно определению, вектор-функции

$\boldsymbol{r}(l) \in \boldsymbol{C}^{(k)}[a, b]$ и $\boldsymbol{g}(\tau) \in \boldsymbol{C}^{(k)}[\alpha, \beta]$, задающие эти пути, таковы, что существует функция

$$t = f(\tau) \in C^{(k)}[\alpha, \beta],$$

для которой:

а) $f(\alpha) = a$,
б) $f(\beta) = b$;

в) при любом $\tau \in [\alpha, \beta] : f'(\tau) \neq 0$;
г) при любом $\tau \in [\alpha, \beta]$ справедливо соотношение:

$$\boldsymbol{r}(t) \equiv \boldsymbol{r}(f(\tau)) = \boldsymbol{g}(\tau).$$

Из условий а), б), в) вытекает, что на промежутке $[a, b]$ существует функция

$$\tau = \varphi(t),$$

являющаяся обратной для $t = f(\tau)$, причем при всех $t \in [a, b]$ имеем: $\varphi'(t) \neq 0$.

Так как $\tau = \varphi(t)$ — функция, обратная для $t = f(\tau)$, то

$$\varphi(a) = \alpha,$$
$$\varphi(b) = \beta,$$

и для любого $t \in [a, b]$ имеем:

$$t = f(\tau),$$

если $\tau = \varphi(t)$. Поэтому из условия г) получаем:

$$\boldsymbol{g}(\tau) \equiv \boldsymbol{g}(\varphi(t)) = \boldsymbol{r}(t).$$

Из наших построений вытекает, что путь m эквивалентен пути l, и симметричность отношения эквивалентности путей установлена.

Проверка выполнения свойства *транзитивности* также не составляет труда. Действительно, пусть путь l эквивалентен пути m, путь m в свою очередь эквивалентен пути n и пусть, далее,

$$\boldsymbol{r}(l) \in \boldsymbol{C}^{(k)}[a, b],$$
$$\boldsymbol{g}(\tau) \in \boldsymbol{C}^{(k)}[\alpha, \beta],$$
$$\boldsymbol{h}(\xi) \in \boldsymbol{C}^{(k)}[\lambda, \mu]$$

— порождающие их вектор-функции.

Если функции

$$t = f(\tau) \in C^{(k)}(\alpha, \beta)$$

и

$$\tau = \varphi(\xi) \in C^{(k)}[\lambda, \mu]$$

осуществляют связь между соответствующими значениями параметров, то легко проверить, что сложная функция

$$t = F(\xi) = f(\varphi(\xi)) \in C^{(k)}[\lambda, \mu]$$

устанавливает связь между соответствующими значениями t и τ, в силу которой пути l и n эквивалентны.

Отношение эквивалентности разбивает все пути на классы эквивалентных между собой путей; при этом каждый путь входит в один и только в один класс.

§ 3. Кривая

Будем говорить, что два регулярных пути $l \in P^{(k)}$ и $m \in P^{(k)}$ определяют одну и ту же ***регулярную кривую*** *L, если эти пути эквивалентны.* Таким образом, каждому классу эквивалентных между собой регулярных путей соответствует некоторая регулярная кривая; при этом разным классам соответствуют разные кривые.

Можно также сказать, *что* ***регулярная кривая*** *есть класс эквивалентных между собой регулярных путей.*

Всякая регулярная кривая L вполне определена, если указан хотя бы один путь l из класса эквивалентных путей, характеризующих L. Вектор-функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\ (t)$, порождающая путь l, называется *параметрическим представлением кривой* L, или просто ее *параметризацией.*

Таким образом, каждую регулярную кривую можно задать указанием какой-либо одной ее конкретной параметризации. Переходу от одной параметризации кривой L к другой соответствует переход от одного пути к другому внутри одного класса эквивалентных путей.

Поясним на примере 1 § 2 гл. IV наглядный смысл определения кривой. Оба пути l и m, которые там рассматривались, определяли на плоскости xOy дважды повторенную окружность. Пути l и m были эквивалентны. Следовательно, это две различные параметризации одной и той же кривой — дважды повторенной окружности. Различие между этими параметризациями в том, что при второй параметризации точка движется по кривой в два раза быстрее.

Можно было бы взять также и другую параметризацию нашей кривой так, чтобы точка на ней двигалась в три раза быстрее и притом в обратном направлении.

Приведенные соображения раскрывают смысл определения кривой. Если рассматривать пути, порожденные различными вектор-функциями, то их можно трактовать как траектории движения материальных точек, учитывая при этом скорость и направление движения по траектории. Если отвлечься от скорости и направления движения и изучать лишь чисто геометрические свойства траектории, то мы и придем к понятию кривой. Выше это было сделано с помощью понятия эквивалентных регулярных путей. Именно, отождествляя между собой эквивалентные регулярные пути, мы исключаем из рассмотрения «механические» свойства путей и изучаем их общие геометрические свойства, которые как раз и являются свойствами кривой.

Пусть l и m — два регулярных, эквивалентных пути, порождаемые соответственно вектор-функциями

$$\boldsymbol{r}(t) \in \boldsymbol{C}^{(k)}[a, b]$$

и

$$\boldsymbol{g}(\tau) \in \boldsymbol{C}^{(k)}[\alpha, \beta].$$

Связь между параметрами t и τ:

$$t = f(\tau),$$

сопоставляет между собой точки $M(t)$ и $N(\tau)$ путей l и m. Точки $M(t)$ и $N(\tau)$ будем называть *соответствующими*. Из определения эквивалентных путей следует, что соответствующие точки в пространстве совпадают.

В классе эквивалентных регулярных путей точки, лежащие на разных путях, естественно объединяются в совокупности соответствующих точек, причем каждой такой совокупности в пространстве отвечает единственная точка. Эта точка и принимается за *точку кривой* L, для которой рассмотренные выше эквивалентные регулярные пути являются всевозможными параметризациями.

§ 4. Касательная

Пусть l — регулярный путь, порожденный вектор-функцией

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \in \boldsymbol{C}^{(k)}[a, b].$$

Напомним, что $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ всюду на $[a, b]$.

Пусть $X(t_0)$ и $X(t)$ — точки l, отвечающие значениям параметра t_0 и t. На прямой, проходящей через точки $X(t_0)$ и $X(t)$, выберем направление, совпадающее с направлением вектора $\overline{X(t_0)\,X(t)}$, если $t_0 < t$, и совпадающее с направлением $\overline{X(t), X(t_0)}$, если $t_0 > t$. Полученную в результате ось назовем *направленной секущей пути l в точке $X(t_0)$*.

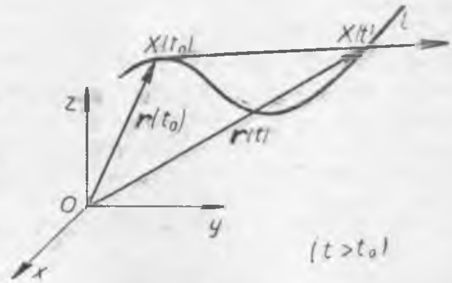


Рис. 119

Направленной касательной к пути l в точке $X(t_0)$ называется предел направленных секущих (рис. 119).

Теорема 1. *В каждой точке регулярного пути существует направленная касательная.*

Доказательство. Пусть $X(t_0)$ — произвольно фиксированная точка регулярного пути l, а $X(t)$ — переменная точка того же пути. Рассмотрим вектор

$$\boldsymbol{g}(t) = \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0}.$$

Легко видеть, что вектор $\boldsymbol{g}(t)$ лежит на направленной секущей, проходящей через точки $X(t_0)$ и $X(t)$, и имеет с ней одинаковое направление.

Далее,

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{g}(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0} = \boldsymbol{r}'(t_0) \neq \boldsymbol{0}.$$

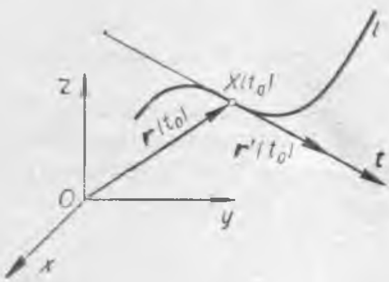


Рис. 120

Отсюда следует, что в точке $X(t_0)$ существует направленная касательная $\boldsymbol{t}$ к l, которая определяется в пространстве вектором $\boldsymbol{r}'(t_0)$ (см. рис. 120).

Теорема доказана.

Если через X, Y, Z обозначим текущие координаты точки на направленной касательной к гладкому пути l в точке $X(t_0)$, то канонические уравнения касательной будут иметь вид:

$$\frac{X - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{Z - z(t_0)}{z'(t_0)};$$

здесь $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — составляющие вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$.

Теорема 2. *У двух эквивалентных регулярных путей в соответствующих точках направленные касательные совпадают или имеют противоположные направления.*

Доказательство. Пусть даны эквивалентные регулярные пути

$$l: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \in C^{(k)}[a, b],$$

и

$$m: \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(\tau) \in C^{(k)}[\alpha, \beta],$$

и пусть функция

$$t = f(\tau) \in C^{(k)}[\alpha, \beta]$$

осуществляет связь между соответствующими точками этих путей. Тогда при всех $\tau \in (\alpha, \beta)$ имеем:

$$f'(\tau) \neq 0$$

и

$$\boldsymbol{r}(f(\tau)) = \boldsymbol{g}(\tau).$$

Отсюда

$$\boldsymbol{r}'_l(f(\tau)) f'(\tau) = \boldsymbol{g}'(\tau),$$

и для соответствующих точек путей l и m имеем:

$$\boldsymbol{r}'_l(f(\tau)) = \frac{1}{f'(\tau)} \boldsymbol{g}'(\tau).$$

Так как $f'(\tau)$ на $[\alpha, \beta]$ сохраняет постоянный знак, то одновременно во всех парах соответствующих точек l и m направленные касательные либо совпадают, либо направлены в противоположные стороны.

Теорема доказана.

Прямая, которая получается из направленной касательной в точке $X(t_0)$ к пути l отбрасыванием направления, называется *касательной* к пути l в точке $X(t_0)$.

Из теоремы 2 вытекает важное заключение: *у эквивалентных регулярных путей в соответствующих точках касательные совпадают.*

Пусть L — регулярная кривая и A — некоторая точка этой кривой. Пусть, далее, регулярный путь

$$l : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \in P^{(k)}$$

есть параметризация L и $t = t_0$ — значение параметра, соответствующее точке A кривой L. *Касательной к L в точке A* называется касательная к пути l в точке $X(t_0)$. Так как у эквивалентных регулярных путей касательные в соответствующих точках совпадают, то данное определение корректно.

§ 5. Длина пути

Рассмотрим в пространстве путь l, который порождается непрерывной вектор-функцией

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Разобьем промежуток $[a, b]$ точками

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b.$$

Число

$$\lambda = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (t_{i+1} - t_i)$$

назовем *рангом разбиения.*

Обозначим через $X(t_i)$ точку пути l, являющуюся концом вектора $\boldsymbol{r}(t_i)$ (рис. 121). Пусть L_n — ломаная, последовательные вершины которой лежат в точках $X(t_0)$, $X(t_1)$, ..., $X(t_n)$. Такую ломаную будем называть *вписанной в путь* l. Через $s(L_n)$ обозначим длину ломаной L_n.

Длиной $s(l)$ *пути* l будем называть предел длин, вписанных в этот путь ломаных, при условии, что ранг разбиения стремится к нулю.

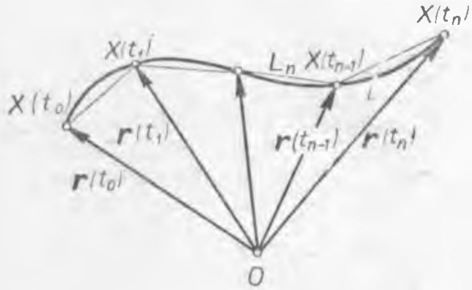


Рис. 121

Другими словами,

$$s(l) = \lim_{\lambda \to 0} s(L_n).$$

Теорема 1. *Всякий регулярный путь* l *имеет определенную длину. Более того, если регулярный путь* l *задан вектор-функцией*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \in C^{(k)}[a, b],$$

то справедлива формула

$$s(l) = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt.$$

Доказательство. Произведем разбиение сегмента $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b,$$

и пусть λ — ранг этого разбиения. Строим ломаную L_n по указанному разбиению. Тогда

$$s(L_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \overrightarrow{X(t_i)\, X(t_{i+1})} \right| = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \boldsymbol{r}(t_{i+1}) - \boldsymbol{r}(t_i) \right|.$$

Пусть $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — составляющие вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ [1]. Тогда

$$s(L_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2 + [z(t_{i+1}) - z(t_i)]^2}.$$

Применим к каждой из разностей, стоящих в скобках под знаком радикала, формулу Лагранжа:

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\xi_i)\, \Delta t_i,$$
$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(\eta_i)\, \Delta t_i,$$
$$z(t_{i+1}) - z(t_i) = z'(\zeta_i)\, \Delta t_i;$$

через ξ_i, η_i, ζ_i обозначены точки сегмента $[t_i, t_{i+1}]$, а через Δt_i разность $t_{i+1} - t_i$.

---

[1] Так как путь l регулярный, то функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t) \in C^{(k)}$, и при всех $t \in [a, b]$ имеем: $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0$.

Отсюда

$$s(L_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i) + z'^2(\zeta_i)}\,\Delta t_i\,.$$

Положим

$$I = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt.$$

Тогда

$$I = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{x'^2(\tau_i) + y'^2(\tau_i) + z'^2(\tau_i)}\;\Delta t_i,$$

где τ_i — некоторая точка сегмента $[t_i,\ t_{i+1}]$.

Имеем:

$$|s(L_n) - I| = \Big|\sum_{i=0}^{n-1}\Big(\sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i) + z'^2(\zeta_i)} -$$

$$- \sqrt{x'^2(\tau_i) + y'^2(\tau_i) + z'^2(\tau_i)}\Big)\,\Delta t_i\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|x'^2(\xi_i) - x'^2(\tau_i)| + |y'^2(\eta_i) - y'^2(\tau_i)| + |z'^2(\zeta_i) - z'^2(\tau_i)|}{\sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i) + z'^2(\zeta_i)} + \sqrt{x'^2(\tau_i) + y'^2(\tau_i) + z'^2(\tau_i)}}.$$

Оценим прежде всего снизу знаменатель в каждом слагаемом правой части последнего неравенства. Для этого заметим, что непрерывная функция

$$|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$$

при всех $t \in [a,\ b]$ отлична от нуля. Поэтому из теоремы Вейерштрасса вытекает, что

$$r_0 = \inf_{[a,\ b]} |\boldsymbol{r}'(t)| = |\boldsymbol{r}'(t_0)| > 0.$$

Отсюда при всех $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ имеем:

$$\sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i) + z'^2(\zeta_i)} + \sqrt{x'^2(\tau_i) + y'^2(\tau_i) + z'^2(\tau_i)} \geqslant r_0.$$

Далее, функции $x'^2(t)$, $y'^2(t)$, $z'^2(t)$ непрерывны на $[a,\ b]$, поэтому по теореме Кантора они равномерно непрерывны на $[a,\ b]$.

Зададим теперь произвольно $\varepsilon > 0$, тогда существует такое $\delta > 0$, что для любых t', $t'' \in [a, b]$ и удовлетворяющих соотношению

$$|t' - t''| < \delta,$$

справедливы неравенства:

$$\left|x'^2(t') - x'^2(t'')\right| < \frac{\varepsilon r_0}{3(b-a)},$$

$$\left|y'^2(t') - y'^2(t'')\right| < \frac{\varepsilon r_0}{3(b-a)},$$

$$\left|z'^2(t') - z'^2(t'')\right| < \frac{\varepsilon r_0}{3(b-a)}.$$

Возьмем теперь достаточно мелкое разбиение промежутка $[a, b]$. Именно, подчиним ранг разбиения условию $\lambda < \delta$.

Тогда для всех вписанных в путь l ломаных L_n, построенных по таким разбиениям, получим:

$$|s(L_n) - l| < \varepsilon.$$

Отсюда

$$l = \lim_{\lambda \to 0} s(L_n).$$

Следовательно,

$$s(l) = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt.$$

Теорема доказана.

§ 6. Длина кривой

Теорема 1. *Длины всех эквивалентных между собой регулярных путей равны.*

Доказательство. Пусть l и m — два эквивалентных регулярных пути, которые соответственно задаются вектор-функциями

$$l : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \in C^{(k)}[a, b],$$

и

$$m : \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(\tau) \in C^{(k)}[\alpha, \beta], \quad (\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta).$$

Пусть, далее, функция

$$t = f(\tau)$$

осуществляет связь между параметрами t и τ, причем

$$f(\alpha) = a,\ f(\beta) = b;\ f'(\tau) \neq 0$$

и

$$\boldsymbol{r}(f(\tau)) = \boldsymbol{g}(\tau).$$

Разберем сначала случай, когда $a \leqslant t \leqslant b$. Тогда, очевидно, всюду на $[\alpha, \beta]$ имеем:

$$f'(\tau) > 0.$$

Из соотношения

$$\boldsymbol{r}(f(\tau)) = \boldsymbol{g}(\tau)$$

после дифференцирования имеем:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} f'(\tau) = \frac{d\boldsymbol{g}}{d\tau}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} f'(\tau)\right| = \left|\frac{d\boldsymbol{g}}{d\tau}\right|,$$

и так как

$$f'(\tau) > 0,$$

то

$$\left|\frac{d\boldsymbol{g}}{d\tau}\right| = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| f'(\tau).$$

На основании теоремы 1 § 5 гл. IV имеем:

$$s(m) = \int_\alpha^\beta \left|\frac{d\boldsymbol{g}}{d\tau}\right| d\tau = \int_\alpha^\beta \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| f'(\tau)\, d\tau = \int_a^b \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt = s(l).$$

Пусть теперь $a \geqslant t \geqslant b$. Тогда функция $f'(\tau)$ строго отрицательна на $[\alpha, \beta]$. В этом случае

$$s(l) = \int_b^a |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt.$$

Дифференцируя тождество

$$\boldsymbol{r}(f(\tau)) = \boldsymbol{g}(\tau),$$

имеем:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} f'(\tau) = \frac{d\boldsymbol{g}}{d\tau}.$$

Так как $f'(\tau) < 0$, то

$$s(m) = \int_\alpha^\beta \left|\frac{d\boldsymbol{g}}{d\tau}\right| d\tau = -\int_a^b \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}\right| f'(\tau)\, d\tau = \int_b^a \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt = s(l).$$

Теорема доказана полностью.

Дадим теперь определение длины кривой.

Длиной регулярной кривой *L называется длина любого регулярного пути, характеризующего эту кривую.*

§ 7. Естественный параметр кривой

Как мы знаем, одну и ту же кривую можно задать с помощью бесконечного множества различных параметризаций, причем параметр, как правило, не имеет прямого геометрического смысла. В этом параграфе для каждой гладкой кривой будет введена специальная параметризация, тесно связанная с геометрическими свойствами кривой. В качестве такого параметра будет выбрана длина переменной дуги на кривой.

Пусть L — регулярная кривая. Рассмотрим ее произвольную параметризацию, которая задается вектор-функцией

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \in C^{(k)}[a, b].$$

Напомним, что $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ при всех $t \in [a, b]$.

Пусть l — регулярный путь, порожденный вектор-функцией $\boldsymbol{r}(t)$. Обозначим через l_t регулярный путь, заданный той же вектор-функцией $\boldsymbol{r}(t)$, но на сегменте $[a, t]$; l_t будем называть *дугой пути* l. Обозначим через $s(t)$ длину дуги l_t. Тогда по теореме 1 § 5 будем иметь:

$$s(t) = \int\limits_a^t |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt. \qquad (*)$$

Теорема 1. *Функция $s(t)$ обладает следующими свойствами:*

1. $s(t) \in C^{(k)}[a, b]$.
2. $s'(t) > 0$ *на* $[a, b]$, *тем самым* $s(t)$ — *строго возрастающая функция* $t \in [a, b]$.

Доказательство. Из формулы

$$s(t) = \int\limits_a^t |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt$$

вытекает непосредственно, что

$$s'(t) = |\boldsymbol{r}'(t)|$$

и

$$s(t) \in C^{(k)}[a, b].$$

Так как l — регулярный путь, то при всех $t \in [a, b]$

$$s'(t) > 0.$$

Теорема доказана.

Область значений функции $s(t)$ есть сегмент $[0, S]$, где $S = s(L)$. Из теоремы 1 вытекает, что функция $s = s(t)$ имеет обратную

$$t = t(s),$$

которая задана на сегменте $[0, S]$, k раз непрерывно дифференцируема, строго возрастает и

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|} > 0.$$

Теорема 2. *На промежутке* $[0, S]$ *рассмотрим вектор-функцию*

$$\boldsymbol{R}(s) = \boldsymbol{r}(t(s)).$$

Тогда эта вектор-функция порождает регулярный путь γ, *эквивалентный пути* l.

Доказательство. Действительно, функция

$$t = t(s)$$

такова, что:

а) $t(s) \in C^{(k)}[0, S]$;

б) $t(0) = a$, $t(S) = b$;

в) при всех $s \in [0, S]$:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|} > 0.$$

Далее,

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \neq 0.$$

Поэтому $\boldsymbol{R}(s)$ задает регулярный путь γ. Так как

$$\boldsymbol{r}(t(s)) = \boldsymbol{R}(s),$$

то регулярные пути l и γ эквивалентны.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Имеет место соотношение*

$$\left|\frac{d\boldsymbol{R}}{ds}\right| = 1.$$

Доказательство. Действительно,

$$\left|\frac{d\boldsymbol{R}}{ds}\right| = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}\right| = |\boldsymbol{r}'(t)| \left|\frac{dt}{ds}\right| = |\boldsymbol{r}'(t)| \frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|} = 1.$$

Параметр s имеет прямой геометрический смысл; он является длиной переменной дуги пути l. Перейдем теперь к рассмотрению исходной кривой L. Так как отношение эквивалентности регулярных путей симметрично и транзитивно, то путь γ эквивалентен любой параметризации кривой L. Отныне с каждой регулярной кривой L связана вполне определенная параметризация

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(s),$$

и параметр s, участвующий в ней, есть длина переменной дуги на L; один из концов дуги фиксирован и совпадает с начальной точкой кривой. Во всем дальнейшем изложении мы будем пользоваться этой специальной параметризацией. Параметр s называют *естественным параметром* кривой, а вектор-функцию $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(s)$ *естественной параметризацией кривой* L.

§ 8. Касательная как прямая наилучшего локального приближения кривой

Пусть L — регулярная кривая. Как уже было сказано выше такую кривую будем отождествлять с ее естественной параметризацией

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(s);$$

параметр s изменяется в пределах от 0 до S, где S — длина L. Точки кривой L — это концы радиус-вектора $\boldsymbol{R}(s)$. Их будем обозначать через $X(s)$. Очевидно, что длина дуги кривой L с концами в точках $X(0)$ и $X(s)$ равна s.

Открытой дугой с концами $X(s_1)$ *и* $X(s_2)$ будем называть множество точек $X(s)$, для которых $s \in (s_1, s_2)$. Пусть s_0 — внутренняя точка сегмента $[0, S]$. ***Окрестностью точки*** $X(s_0)$ *на кривой* L *будем называть любую открытую дугу* L, *содержащую эту точку.*

Несколько иначе определяются окрестности концов кривой L — точек $X(0)$ и $X(S)$. Именно, *окрестностями этих точек* объявляются множества точек кривой L, для которых параметр s соответственно принадлежит полусегментам $[0, s_1)$ или $(s_2, S]$. *Мы будем говорить, что для кривой* L *некоторое свойство выполняется локально, если это свойство выполнено в некоторой окрестности любой точки кривой.*

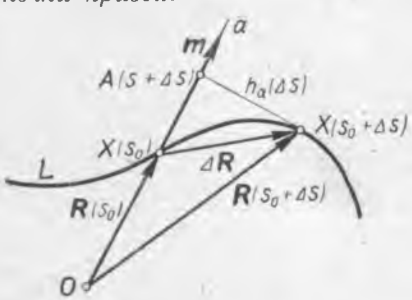


Рис. 122

Пусть $X(s_0)$ — произвольная точка регулярной кривой L. Проведем через точку $X(s_0)$ любую прямую a (см. рис. 122). Из точки $X(s_0 + \Delta s)$, лежащей на L, опустим перпендикуляр на a и пусть $A(s_0 + \Delta s)$ — основание этого перпендикуляра. Длину отрезка $X(s_0+\Delta s)\, A(s_0+\Delta s)$ обозначим $h_a(\Delta s)$ и будем называть *отклонением прямой* a *от кривой* L *в точке* $X(s_0)$. Найдем формулу для $h_a(\Delta s)$. Пусть $\boldsymbol{m}$ — единичный вектор, лежащий на $\boldsymbol{a}$. Тогда если

$$\Delta\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(s_0 + \Delta s) - \boldsymbol{R}(s_0),$$

то

$$h_a(\Delta s) = |[\boldsymbol{m}, \Delta\boldsymbol{R}]|.$$

локально — в любой точке окрестности.

Для $\Delta \boldsymbol{R}$ напишем разложение по формуле Тейлора до членов первого порядка включительно

$$\Delta \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}'(s_0)\,\Delta s + \boldsymbol{\varepsilon}(s_0, \Delta s)\,\Delta s,$$

здесь $|\boldsymbol{\varepsilon}(s_0, \Delta s)|$ стремится к нулю при $\Delta s \to 0$.

Отсюда

$$h_a(\Delta s) = |\,[\boldsymbol{m}, \boldsymbol{R}'(s_0)]\,\Delta s + [\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\varepsilon}(s_0, \Delta s)]\,\Delta s\,|$$

и, следовательно, главной частью отклонения $h(\Delta s)$ является выражение

$$|\,[\boldsymbol{m}, \boldsymbol{R}'(s_0)]\,| \cdot |\Delta s|.$$

Пусть теперь a_0 — касательная к L в точке $X(s_0)$ и $\boldsymbol{t}$ — единичный вектор этой касательной (см. рис. 123). Так как $\boldsymbol{R}(s_0)$ лежит на прямой a_0 и согласно теореме 3 § 7 гл. IV

$$|\boldsymbol{R}'(s_0)| = 1,$$

то можно считать, что

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{R}'(s_0).$$

Но тогда

$$h_{a_0}(\Delta s) = |\,[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}]\,\Delta s + \Delta s\,[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\varepsilon}(s_0, \Delta s)]\,| = |\Delta s|\,|\,[\boldsymbol{\varepsilon}(s_0, \Delta s), \boldsymbol{t}]\,|.$$

Так как только для касательной выражение

$$|\,[\boldsymbol{m}, \boldsymbol{R}'(s_0)]\,| = 0,$$

то *отклонение $h_a(\Delta s)$ имеет наибольший порядок малости тогда и только тогда, когда прямая a есть касательная.*

Отсюда ясно, что *в достаточно малой окрестности точки $X(s_0)$ прямой наилучшего приближения к L является касательная к L в точке $X(s_0)$.* Более подробно это означает, что если дуга X_1X_2 кривой L, взятая в качестве окрестности точки $X(s_0)$ (см. рис. 124), имеет достаточно малую длину, то среди всех отрезков AB наилучшим образом приближает дугу X_1X_2 отрезок касательной A_0B_0. Через A_1 и B_1 здесь обозначены проекции точек X_1 и X_2 на прямую a, а через A_0 и B_0 проекции тех же точек на касательную a_0.

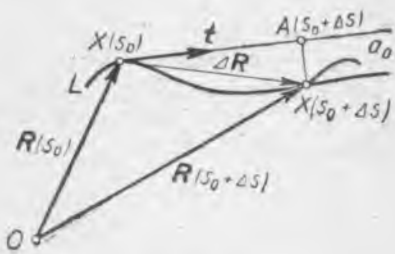


Рис. 123

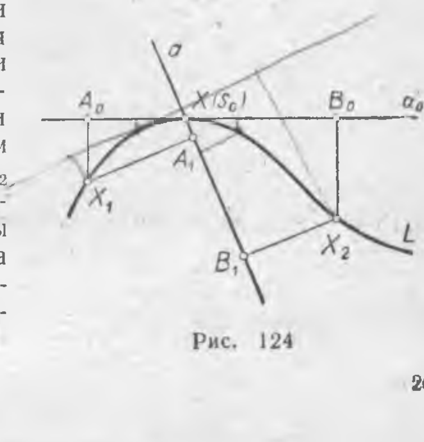


Рис. 124

В соответствии с введенной терминологией можно сказать, что *касательная есть прямая наилучшего локального приближения регулярной кривой в любой ее точке.*

§ 9. Кривизна и главная нормаль

1. Определение кривизны и главной нормали. Для того чтобы охарактеризовать степень отличия кривой от прямой линии, удобно ввести в рассмотрение скорость вращения касательной при перемещении вдоль кривой.

Прямая во всех точках имеет одну и ту же касательную, совпадающую с ней самой. Поэтому при перемещении вдоль прямой скорость вращения касательной равна нулю. Отсюда ясно, что чем больше скорость вращения касательной при перемещении вдоль кривой, тем больше кривая по своей пространственной форме отличается от прямой.

Пусть L — регулярная кривая и

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(s)$$

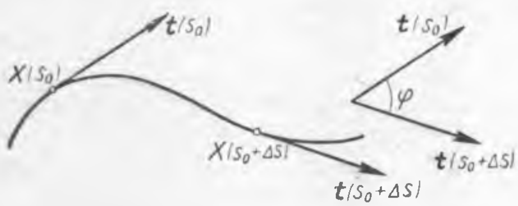


Рис. 125

— ее естественная параметризация. Начиная с этого параграфа, будем считать, что вектор-функция $\boldsymbol{R}(s)$ по крайней мере дважды непрерывно дифференцируема. Возьмем на L произвольную точку $X(s_0)$ и зафиксируем ее. Пусть $X(s_0 + \Delta s)$ — переменная точка L (см. рис. 125).

Вектор-функция

$$\boldsymbol{t}(s) = \boldsymbol{R}'(s)$$

по крайней мере один раз непрерывно дифференцируема и согласно теореме 3 § 7 гл. IV при всех s

$$|\boldsymbol{t}(s)| = 1,$$

т. е. $\boldsymbol{t}(s)$ есть единичный касательный вектор к L в точке $X(s)$.

Обозначим через φ угол между векторами $\boldsymbol{t}(s_0)$ и $\boldsymbol{t}(s_0 + \Delta s)$. Отметим, что угол φ берется в пределах от 0 до π.

Число

$$\varkappa = \lim_{s \to 0} \frac{\varphi}{s},$$

где $s = \Delta s$ — длина дуги L с концами $X(s_0)$ и $X(s_0 + \Delta s)$, называется *кривизной кривой L в точке $X(s_0)$*.

Так как скорость вращения касательной при перемещении вдоль кривой L дается длиной вектора $\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$, то нашей ближайшей задачей является установление равенства

$$\varkappa = \left| \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} \right| \qquad (*)$$

в любой точке кривой L.

Допустим, что соотношение (*) уже установлено и в точке $X(s_0)$ кривизна $\varkappa$ отлична от нуля. Тогда

$$\frac{d\boldsymbol{t}(s_0)}{ds} \neq \mathbf{0}.$$

Обозначим через $\boldsymbol{n}$ орт вектора $\frac{d\boldsymbol{t}(s_0)}{ds}$. Ниже будет доказано, что вектор $\boldsymbol{n}$ перпендикулярен касательной $\boldsymbol{t}(s_0)$. Он называется *главной нормалью L в точке $X(s_0)$*.

Отметим, что *главная нормаль определена лишь в тех точках кривой, где кривизна отлична от нуля*. По определению, кривизна есть неотрицательная функция точки кривой.

Сформулируем и докажем основную теорему о кривизне и главной нормали регулярной кривой.

Т е о р е м а 1. *Для любой регулярной кривой L в каждой точке существует кривизна $\varkappa$ и имеет место равенство*

$$\varkappa = \left| \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\boldsymbol{R}}{ds^2} \right|.$$

В тех точках L, где $\varkappa \neq 0$, определена главная нормаль и справедлива формула

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \varkappa \boldsymbol{n}, \qquad \binom{*}{*}$$

при этом векторы $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{n}$ перпендикулярны.

Формула $\binom{*}{*}$ называется п е р в о й ф о р м у л о й Ф р е н е.

Заметим, что если

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(s)$$

— естественная параметризация L, то, как было указано выше, вектор-функция $\boldsymbol{R}(s)$ по крайней мере дважды непрерывно дифференцируема.

Доказательство теоремы опирается на две леммы.

Л е м м а 1. *Пусть вектор-функция*

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}(t)$$

непрерывно дифференцируема и

$$|\boldsymbol{h}(t)| = \text{const}.$$

Тогда векторы $\boldsymbol{h}(t)$ *и* $\boldsymbol{h}'(t)$ *ортогональны.*

Доказательство. Имеем:

$$(\boldsymbol{h}(t), \boldsymbol{h}(t)) = |\boldsymbol{h}(t)|^2 = \text{const}.$$

Дифференцируя это тождество, получим:

$$2(\boldsymbol{h}(t), \boldsymbol{h}'(t)) = 0.$$

Отсюда и следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть* $\boldsymbol{h}(t)$ — *вектор-функция единичной длины. Тогда угол между векторами* $\boldsymbol{h}(t+\Delta t)$ *и* $\boldsymbol{h}(t)$ *эквивалентен длине вектора* $\Delta\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}(t+\Delta t) - \boldsymbol{h}(t)$.

Доказательство. Треугольник OAB (рис. 126) равнобедренный. Поэтому

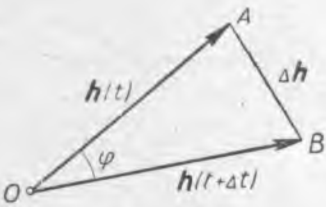


Рис. 126

$$|\overline{AB}| = 2|\overline{OA}|\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Так как

$$|\overline{OA}| = |\boldsymbol{h}(t)| = 1, \quad |\overline{AB}| = |\Delta\boldsymbol{h}|.$$

Отсюда

$$|\Delta\boldsymbol{h}| = 2\sin\frac{\varphi}{2},$$

и, поскольку $2\sin\frac{\varphi}{2}$ эквивалентен φ, имеем:

$$|\Delta\boldsymbol{h}| \sim \varphi.$$

Лемма доказана.

Приступим к доказательству теоремы. Прежде всего докажем существование кривизны $\varkappa$ и установим равенство

$$\varkappa = \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}.$$

Имеем:

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{t}}{\Delta s}\right|.$$

Так как по лемме 2 угол φ между векторами $\boldsymbol{t}(s+\Delta s)$ и $\boldsymbol{t}(s)$ эквивалентен длине приращения $|\Delta\boldsymbol{t}|$ единичного вектора касательной $\boldsymbol{t}(s)$, то

$$\varphi \sim |\Delta\boldsymbol{t}| = |\boldsymbol{t}(s+\Delta s) - \boldsymbol{t}(s)|.$$

Далее,

$$\left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{t}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\varphi}{|\Delta s|} = \varkappa.$$

Пусть теперь в точке $X(s_0)$ $\varkappa \neq 0$. Обозначим через $\boldsymbol{n}$ орт вектора $\frac{d\boldsymbol{t}(s_0)}{ds}$. Тогда

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right| \boldsymbol{n} = \varkappa\, \boldsymbol{n},$$

и по лемме 1 вектор $\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$ перпендикулярен $\boldsymbol{t}$. Следовательно, главная нормаль $\boldsymbol{n}$ перпендикулярна касательной.

Теорема доказана.

2. Формула для кривизны в случае, когда регулярная кривая задана произвольной параметризацией. Если L задана с помощью естественной параметризации

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(s),$$

то

$$\varkappa = \left|\frac{d^2\boldsymbol{R}}{ds^2}\right|.$$

В этом пункте будет выведена формула для кривизны в случае, когда L задана с помощью произвольной параметризации

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \in C^{(k)}[a, b] \qquad (k \geqslant 2).$$

Теорема 2. *Пусть*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \in C^{(k)}[a, b] \qquad (k \geqslant 2)$$

— параметризация регулярной кривой L. Тогда для кривизны кривой L справедлива формула

$$\varkappa = \frac{\left|\left[\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}, \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right]\right|}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|^3}.$$

Доказательство. Пусть

$$t = t(s) \in C^{(k)}[0, S]$$

— функция, выражающая связь между параметром t и естественным параметром s кривой L. Тогда

$$\boldsymbol{R}(s) = \boldsymbol{r}(t(s)).$$

Отсюда

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

и

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}}{ds^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{d^2t}{ds^2}.$$

Поэтому

$$\left[\frac{d^2\boldsymbol{R}}{ds^2}, \frac{d\boldsymbol{R}}{ds}\right] = \left[\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}, \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right] \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^3.$$

Поскольку векторы $\frac{dR}{ds}$ и $\frac{d^2R}{ds^2}$ ортогональны и

$$\left|\frac{dR}{ds}\right| = 1, \quad \left|\frac{d^2R}{ds^2}\right| = \varkappa$$

(см. теорему 1 п. 1 настоящего параграфа), то

$$\varkappa = \left|\left[\frac{d^2R}{ds^2}, \frac{dR}{ds}\right]\right| = \left|\left[\frac{d^2r}{dt^2}, \frac{dr}{dt}\right]\right| \cdot \left|\frac{dt}{ds}\right|^3.$$

Но

$$s(t) = \int\limits_a^t \left|\frac{dr}{dt}\right| dt.$$

Поэтому $\left|\frac{dt}{ds}\right| = \frac{1}{\left|\frac{dr}{dt}\right|}$ и, следовательно,

$$\varkappa = \left|\left[\frac{d^2r}{dt^2}, \frac{dr}{dt}\right]\right| \cdot \left|\frac{dr}{dt}\right|^{-3}.$$

Теорема доказана.

3. **Плоские кривые.** Этот пункт посвящен понятию кривизны для плоских кривых. Не нарушая общности, можно считать, что плоскость, в которой лежат кривые, совпадает с плоскостью xOy.

Таким образом, если L — плоская регулярная кривая и

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(t) \in C^{(k)}\,[a,\ b] \qquad (k \geqslant 2)$$

— некоторая ее параметризация, то

$$\boldsymbol{r}\,(t) = x\,(t)\,\boldsymbol{i} + y\,(t)\,\boldsymbol{j}.$$

Отсюда для кривизны прямой L имеем формулу:

$$\varkappa = \frac{|\,x''(t)\,y'(t) - y''(t)\,x'(t)\,|}{[x'^2(t) + y'^2(t)]^{3/2}}. \quad 3/2$$

Пользуясь этой формулой, найдем кривизну окружности радиуса R. Удобно воспользоваться следующим параметрическим представлением окружности:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Тогда

$$\varkappa = \frac{|\,x''y' - y''x'\,|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}.$$

Итак, кривизна окружности во всех точках одинакова и равна $\frac{1}{R}$, где R — радиус окружности.

В случае, если параметр t совпадает с одной из координат, например $t = x$, и кривая L задается явным уравнением

$$y = y\ (x),$$

для кривизны $\varkappa$ имеет место формула

$$\varkappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Для кривых L, которые могут быть заданы с помощью параметризации

$$\boldsymbol{r}\ (x) = x\,\boldsymbol{i} + y\ (x)\boldsymbol{j}, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1,$$

где $y\ (x) \in C^{(k)}$, $k \geqslant 2$, полезно ввести понятие *кривизны со знаком*. (Отметим, что условие $\boldsymbol{r}'\ (x) \neq 0$ для таких кривых всегда выполнено, поскольку

$$|\boldsymbol{r}'(x)| = \sqrt{1+y'^2} \geqslant 1 > 0.)$$

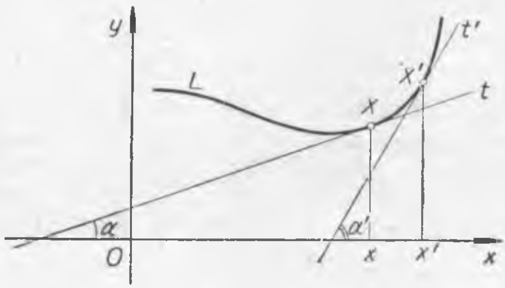


Рис. 127

Пусть t и t' — касательные к кривой L в точках X и X' и пусть между абсциссами x и x' этих точек справедливо неравенство (рис. 127)

$$x < x'.$$

Обозначим через k и k' угловые коэффициенты касательных t и t'. Тогда

$$k = y'\,(x), \quad k' = y'\,(x').$$

Пусть α и α' — углы, которые образуют касательные t и t' с положительным направлением оси Ox. Тогда

$$\alpha = \operatorname{arctg} y'\,(x), \quad \alpha' = \operatorname{arctg} y'\,(x').$$

Ориентированным углом *между касательными к* L *в точках* X *и* X' *назовем угол*[1]

$$\tilde{\varphi} = \alpha' - \alpha.$$

---

[1] В рассматриваемом случае важно, что $x < x'$. Если же $x > x'$, то полагаем $\varphi = \alpha - \alpha'$. Ниже рассматриваются оба случая.

Ясно, что угол φ между касательными l и l', который рассматривался в п. 1 § 9 гл. IV без учета направления, есть абсолютная величина $\tilde{\varphi}$:

$$\varphi = |\tilde{\varphi}|$$

Определение. ***Кривизной** L **со знаком** в точке X называется число*

$$\tilde{\varkappa} = \lim_{X' \to X} \frac{\tilde{\varphi}}{s},$$

где s — длина дуги XX'. Очевидно, что

$$\varkappa = |\tilde{\varkappa}|.$$

Докажем, что

$$\tilde{\varkappa} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Действительно, полагая $x' = x + \Delta x$, имеем:

$$\tilde{\varphi} = \alpha' - \alpha = \Delta\alpha,$$

$$s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Поэтому

$$\varkappa = \lim_{X' \to X} \frac{\Delta\alpha}{\int\limits_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + y'^2}\, dx} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}}{\frac{1}{\Delta x} \int\limits_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + y'^2}\, dx} = \frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{\frac{d\,(\operatorname{arctg} y')}{dx}}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Отсюда

$$\tilde{\varkappa} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

4. **Выпуклые и вогнутые кривые.** Пусть L — регулярная кривая, заданная параметризацией

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases}$$

где

$$f(x) \in C^{(k)}[a, b] \qquad (k \geqslant 2).$$

Кривая L называется ***выпуклой****, если она целиком расположена над каждой своей касательной* (см. рис. 128, *а*)).

Кривая L называется ***вогнутой****, если она целиком расположена под каждой своей касательной* (см. рис. 128, *б*)).

Теорема 3. *Для того чтобы кривая L была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы во всех ее точках кривизна со знаком* $\varkappa$ *была неотрицательна.*

Теорема 4. *Для того чтобы кривая L была вогнутой, необходимо и достаточно, чтобы во всех ее точках кривизна со знаком* $\varkappa$ *была неположительна.*

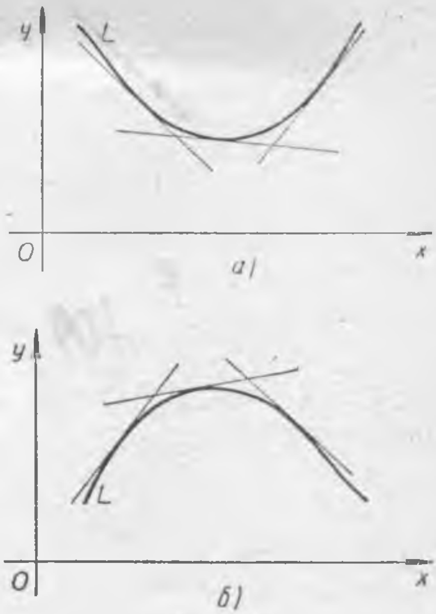


Рис. 128

Мы ограничимся доказательством теоремы 3. Теорема 4 доказывается вполне аналогично.

Доказательство теоремы 3. Для кривизны со знаком $\tilde{\varkappa}$ имеет место формула

$$\tilde{\varkappa} = \frac{f''(x)}{\left(1+f'^2(x)\right)^{3/2}}.$$

Поэтому необходимое и достаточное условие выпуклости кривой сводится к тому, что всюду на сегменте $[a, b]$

$$f''(x) \geqslant 0.$$

а) Проверка необходимости условия. Пусть L — выпуклая кривая. Возьмем произвольную точку X_0 на L и проведем в ней касательную t (см. рис. 129). Пусть x_0 — абсцисса точки X_0 и x — любая точка промежутка $[a, b]$. Обозначим через X и $\tilde{X}$ точки, лежащие соответственно на кривой L и касательной t, имеющие x своей абсциссой. Если y и $\tilde{y}$—ординаты точек X и $\tilde{X}$, то

$$y = f(x),$$
$$\tilde{y} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

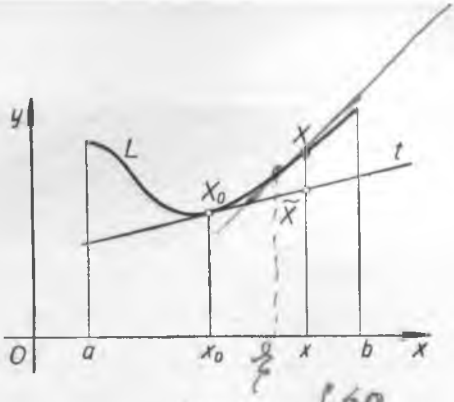


Рис. 129

Разложим $f(x)$ по формуле Тейлора до членов второго порядка:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2;$$

через ξ обозначена точка, лежащая между x_0 и x. Так как $\widetilde{X}$ лежит под X (кривая L выпуклая), то

$$y \geqslant \tilde{y},$$

или в развернутом виде

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2 \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

$f(\widetilde{X})$

Отсюда

$$f''(\xi) \geqslant 0.$$

Устремляя x к x_0, получим, что ξ стремится к x_0, и так как $f''(x)$ — непрерывная функция, то

$$f''(x_0) = \lim_{\xi \to x_0} f''(\xi) \geqslant 0.$$

Так как точка $x_0 \in [a, b]$ взята произвольно, то всюду на $[a, b]$ имеем

$$f''(x) \geqslant 0.$$

б) Проверка достаточности условия. Пусть на кривой L всюду

$$f''(x) \geqslant 0.$$

Возьмем на L произвольную точку X_0 и проведем в ней касательную t. Пусть, далее, X и $\widetilde{X}$ — точки на L и t, имеющие общую абсциссу x (см. рис. 130). Нам надо доказать, что для ординат y и $\tilde{y}$ этих точек выполнено неравенство

$$y \geqslant \tilde{y}.$$

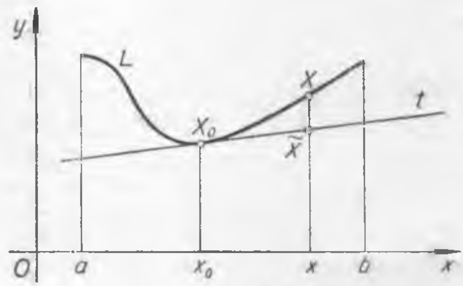


Рис. 130

В обозначениях, которые были использованы выше, имеем:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2,$$
$$\tilde{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Отсюда

$$y - \tilde{y} = \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2 \geqslant 0,$$

и мы получаем, что при всех $x \in [a, b] : y \geqslant \tilde{y}$.

Следовательно, кривая L выпуклая.

§ 10. Соприкасающаяся плоскость

В § 8 было установлено, что для кривой касательная локально есть прямая наилучшего приближения. Теперь мы хотим найти плоскость наилучшего локального приближения к данной кривой.

Введем необходимые понятия. Пусть L — регулярная кривая и

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(s) \in C^{(k)}[0, S] \qquad (k \geqslant 2)$$

— ее естественная параметризация. Зафиксируем на L произвольную точку $X(s_0)$ (см. рис. 131). Пусть $X(s_0 + \Delta s)$ — переменная точка L и Q — некоторая плоскость, проходящая через точку $X(s_0)$. Обозначим через $\rho(Q, \Delta s)$ расстояние точки $X(s_0 + \Delta s)$ до плоскости Q.

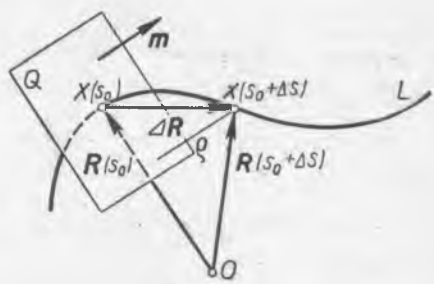


Рис. 131

Плоскость P называется *соприкасающейся плоскостью к L в точке $X(s_0)$*, если для любой плоскости Q, отличной от P, справедливо соотношение

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\rho(P, \Delta s)}{\rho(Q, \Delta s)} = 0.$$

Ясно, что если в данной точке кривой есть соприкасающаяся плоскость, то она является плоскостью наилучшего приближения к кривой в любой достаточно малой окрестности рассматриваемой точки.

Если L — прямая линия, то любая плоскость, проходящая через L, может быть взята в качестве соприкасающейся. У прямой во всех точках кривизна равна нулю. Поэтому условия существования единственной соприкасающейся плоскости в данной точке кривой связаны с отличием от нуля кривизны в этой точке. Это видно из следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть L — регулярная кривая и*

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(s) \in C^{(k)}[0, S] \qquad (k \geqslant 2)$$

— ее естественная параметризация. Пусть, далее, $X(s_0)$ — произвольная точка L, в которой кривизна отлична от нуля. Тогда в точке $X(s_0)$ существует единственная соприкасающаяся плоскость. Эта плоскость проходит через касательную и главную нормаль в точке $X(s_0)$.

Доказательство. Легко видеть (см. рис. 131), что

$$\rho(Q, \Delta s) = |(\boldsymbol{m}, \Delta\boldsymbol{R})|,$$

где $\boldsymbol{m}$ — единичная нормаль к плоскости Q, а

$$\Delta\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(s_0+\Delta s) - \boldsymbol{R}(s_0).$$

Применяя формулу Тейлора, имеем:

$$\Delta\boldsymbol{R} = \left.\frac{d\boldsymbol{R}}{ds}\right|_{s=s_0} \Delta s + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\boldsymbol{R}}{ds^2}\right|_{s=s_0} \Delta s^2 + \boldsymbol{\varepsilon}(s_0, \Delta s)\,\Delta s^2.$$

Напомним, что

$$\lim_{\Delta s \to 0} |\boldsymbol{\varepsilon}(s_0, \Delta s)| = 0.$$

Вектор

$$\boldsymbol{t}(s) = \frac{d\boldsymbol{R}}{ds}$$

есть единичный вектор касательной. Далее, используя первую формулу Френе, имеем:

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \varkappa(s)\,\boldsymbol{n}.$$

Таким образом,

$$\Delta\boldsymbol{R} = \boldsymbol{t}(s_0)\,\Delta s + \frac{1}{2}\varkappa(s_0)\,\boldsymbol{n}(s_0)\,\Delta s^2 + \boldsymbol{\varepsilon}(s_0, \Delta s)\,\Delta s^2,$$

и формула для $\rho(Q, \Delta s)$ принимает вид

$$\rho(Q, \Delta s) = \Big|(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{t}(s_0))\,\Delta s + \frac{1}{2}\varkappa(s_0)\,(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}(s_0))\,\Delta s^2 + \\ + (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\varepsilon}(s_0, \Delta s))\,\Delta s^2\Big|.$$

Из этой формулы видно, что величина $\rho(Q, \Delta s)$ имеет порядок относительно Δs не выше второго, если плоскость Q не проходит хотя бы через один из векторов $\boldsymbol{t}(s_0)$ или $\boldsymbol{n}(s_0)$. Для плоскости P, проходящей через неколлинеарные векторы $\boldsymbol{t}(s_0)$ и $\boldsymbol{n}(s_0)$, и только для нее, величина $\rho(P, \Delta s)$ относительно Δs имеет порядок выше второго, так как в этом случае

$$(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{t}(s_0)) = 0,$$
$$(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}(s_0)) = 0.$$

А тогда

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\rho(P, \Delta s)}{\rho(Q, \Delta s)} = 0.$$

Теорема доказана.

Напишем теперь уравнение соприкасающейся плоскости P_0 в точке $X(s_0)$. Из теоремы 1 следует, что в плоскости P_0 лежат векторы $\boldsymbol{U} - \boldsymbol{R}(s_0)$, $\boldsymbol{t}(s_0)$, $\boldsymbol{n}(s_0)$, где $\boldsymbol{U} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$ — текущий вектор плоскости P_0 (см. рис. 132). Поэтому уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид:

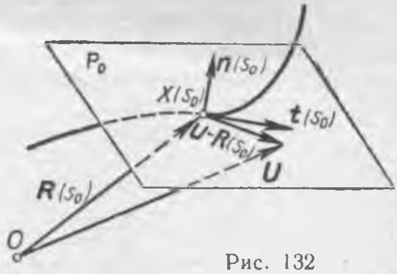


Рис. 132

$$\begin{vmatrix} X - x(s_0) & Y - y(s_0) & Z - z(s_0) \\ t_x^0 & t_y^0 & t_z^0 \\ n_x^0 & n_y^0 & n_z^0 \end{vmatrix} = 0.$$

Если

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \in C^{(k)} \qquad (k \geqslant 2)$$

— некоторая параметризация кривой L, то в пункте 2 § 9 было доказано, что векторы

$$\boldsymbol{t} \text{ и } \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

коллинеарны, а главная нормаль коллинеарна вектору

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}}{ds^2} = A\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + B\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}.$$

Следовательно, векторы $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ и $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ лежат в соприкасающейся плоскости. Эти векторы не коллинеарны, так как

$$\varkappa = \frac{\left|\left[\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}, \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right]\right|}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|^3} > 0.$$

Поэтому уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид:

$$\left(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{r}(t_0), \left[\frac{d\boldsymbol{r}(t_0)}{dt}, \frac{d^2\boldsymbol{r}(t_0)}{dt^2}\right]\right) = 0.$$

Если

$$x = x(t),$$
$$y = y(t),$$
$$z = z(t)$$

— составляющие вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$, то уравнение соприкасающейся плоскости можно записать в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} X - x(t_0) & Y - y(t_0) & Z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

§ 11. Кручение

При перемещении точки вдоль регулярной кривой L в направлении возрастания естественного параметра вместе с точкой перемещаются касательная и соприкасающаяся плоскость. Поскольку в каждой точке кривой L соприкасающаяся плоскость проходит через касательную, то движение соприкасающейся плоскости можно рассматривать как вращение вокруг касательной. Такое вращение может быть правым или левым. Условимся угол поворота соприкасающейся плоскости брать со знаком «+», если указанное вращение правое, и со знаком «—» — в противном случае. Введенный угол между соприкасающимися плоскостями назовем *ориентированным*.

Пусть L — регулярная кривая и

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(s) \in \boldsymbol{C}^{(k)}[0, S] \qquad (k \geqslant 3)$$

— ее естественная параметризация. Пусть, кроме того, L имеет в каждой точке единственную соприкасающуюся плоскость. Обозначим через $\psi(s_0, \Delta s)$ ориентированный угол между соприкасающимися плоскостями в точках $X(s_0)$ и $X(s_0 + \Delta s)$. (Важно подчеркнуть, что направление вращения, связанное с выбором знака угла, берется от соприкасающейся плоскости в точке $X(s_0)$, если $\Delta s > 0$, и от соприкасающейся плоскости в точке $X(s_0 + \Delta s)$, если $\Delta s < 0$.)

Кручением *кривой L в точке $X(s_0)$ называется число*

$$\tau = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\psi(s_0, \Delta s)}{|\Delta s|}.$$

Для описания свойств кручения удобно ввести вектор

$$\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}].$$

Этот вектор перпендикулярен соприкасающейся плоскости и называется *бинормалью*. Так как $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{n}$ — единичные ортогональные между собой векторы, то $|\boldsymbol{b}| = 1$. Очевидно, *в каждой точке L векторы $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных единичных векторов.*

Теорема 1. *Пусть L — регулярная кривая и*

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(s) \in \boldsymbol{C}^{(k)}[0, S] \quad (k \geqslant 3)$$

— ее естественная параметризация. Пусть, кроме того, во всех точках L кривизна строго положительна. Тогда справедлива формула

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\tau \boldsymbol{n},$$

где τ — кручение.

Доказательство. По определению бинормали имеем:

$$\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}]. \qquad (*)$$

Соотношение (*) имеет место в каждой точке кривой, так как из условий теоремы вытекает, что в каждой точке L есть касательная и главная нормаль. Дифференцируя по s тождество (*), имеем:

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \left[\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}, \boldsymbol{n}\right] + \left[\boldsymbol{t}, \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right] = [\varkappa\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}] + \left[\boldsymbol{t}, \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right] = \left[\boldsymbol{t}, \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right]$$

(здесь мы пользуемся трехкратной дифференцируемостью вектор-функции $\boldsymbol{R}(s)$).

Из соотношения

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \left[\boldsymbol{t}, \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right]$$

вытекает, что вектор $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{t}$. Так как вектор $\boldsymbol{b}$ имеет единичную длину, то из леммы 1 § 9 гл. IV вытекает, что векторы $\boldsymbol{b}$ и $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ ортогональны. Так как векторы $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b}$ попарно ортогональны, то $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ коллинеарен главной нормали $\boldsymbol{n}$ и имеет место формула

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \mu\boldsymbol{n}.$$

Докажем, что

$$\mu = -\tau.$$

Прежде всего установим, что

$$|\mu| = |\tau|.$$

Очевидно,

$$|\mu| = \left|\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\right|.$$

Используя определение производной и лемму 2 § 9 гл. IV, имеем:

$$\left|\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{b}|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{|\psi(s_0, \Delta s)|}{|\Delta s|} = |\tau|.$$

Итак,

$$|\mu| = |\tau|.$$

Рассмотрим вопрос о согласовании знаков μ и τ.

Если $\mu > 0$ (рис. 133), то вращение соприкасающейся плоскости левое и, следовательно, $\tau < 0$. Поэтому $\mu = -\tau$.

Если $\mu < 0$ (рис. 134), то вращение соприкасающейся плоскости правое и, следовательно, $\tau > 0$.

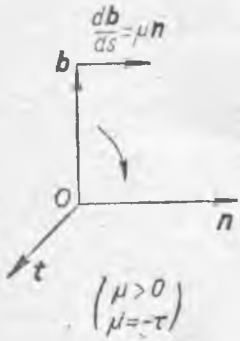


Рис. 133

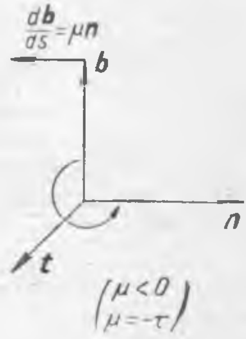


Рис. 134

Поэтому

$$\mu = -\tau.$$

Итак, $\mu = -\tau$, и мы имеем формулу:

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\tau\boldsymbol{n}.$$

Теорема доказана.

Формула

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\tau\boldsymbol{n}$$

называется т р е т ь е й ф о р м у л о й Ф р е н е.

Нетрудно видеть, что кручение характеризует степень отклонения пространственной кривой от плоской. Этот факт подчеркивает следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Пусть L — регулярная кривая и*

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(s) \in C^{(k)}[0, S] \qquad (k \geqslant 3)$$

— ее естественная параметризация. Тогда если кручение во всех точках L равно нулю, то кривая плоская.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\tau = 0$, то из третьей формулы Френе следует, что во всех точках L бинормали равны. Следовательно, во всех точках L соприкасающиеся плоскости параллельны. Для того чтобы доказать, что все соприкасающиеся плоскости совпадают, достаточно установить, что все они удалены от начала координат на одинаковое расстояние.

Пусть

$$h = (\boldsymbol{R}(s),\ \boldsymbol{b}(s))$$

(см. рис. 135), тогда $|h|$ и есть расстояние соприкасающейся плоскости к L в точке $X(s)$ от начала координат.

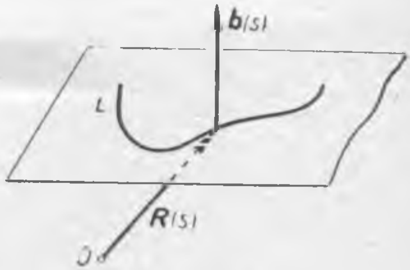


Рис. 135

Имеем:

$$\frac{dh}{ds} = (\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{b}) + \left(\boldsymbol{R},\ \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\right) = 0.$$

Следовательно, $h = \text{const}$ и тем более $|h| = \text{const}$. Таким образом, все соприкасающиеся плоскости к L совпадают с одной и той же плоскостью P_0, а тогда все точки L лежат в плоскости P_0 и эта кривая — плоская.

§ 12. Формулы Френе

Пусть L — регулярная кривая и

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(s) \in C^{(k)}[0,\ S] \qquad (k \geqslant 3)$$

— ее естественная параметризация. Предположим, что в каждой точке L кривизна строго положительна. Тогда в каждой точке L определена правая тройка из единичных попарно ортогональных векторов: касательного вектора $\boldsymbol{t}$, главной нормали $\boldsymbol{n}$ и бинормали $\boldsymbol{b}$. Эту тройку векторов называют *трехвекторником Френе*.

В каждой точке L векторы $\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$, $\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$, $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ можно разложить по элементам трехвекторника Френе. Полученные при этом разложения называют *формулами Френе*. Две из них мы уже вывели:

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \varkappa \boldsymbol{n},$$

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\tau \boldsymbol{n}.$$

Выведем теперь формулу разложения $\frac{dn}{ds}$ по элементам трехвекторника Френе. Имеем:

$$\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{t}].$$

Отсюда

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = \left[\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}, \ \boldsymbol{t}\right] + \left[\boldsymbol{b}, \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right] = -\tau[\boldsymbol{n}, \ \boldsymbol{t}] + \varkappa[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{n}] = -\varkappa\boldsymbol{t} + \tau\boldsymbol{b}.$$

Итак, *формулы Френе имеют вид:*

$$\left|\begin{aligned} &\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \varkappa\boldsymbol{n}, \\ &\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\varkappa\boldsymbol{t} + \tau\boldsymbol{b}, \\ &\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\tau\boldsymbol{n}. \end{aligned}\right.$$

§ 13. Натуральные уравнения

Из формул Френе видно, что при движении вдоль кривой закон изменения трехвекторника Френе описывается через свойства кривизны и кручения, которые суть функции естественного параметра s. Рассматривая формулы Френе как нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, можно доказать следующие основные теоремы теории кривых.

Теорема 1. *Пусть L_1 и L_2 — две регулярные кривые, имеющие одинаковую длину S, и*

$$\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_1(s) \in C^{(k)}[0, \ S]; \ \ \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{R}_2(s) \in C^{(k)}[0, \ S] \qquad k \geqslant 3$$

— их естественные параметризации. Тогда если при всех $s \in [0, S]$:

$$\varkappa_1(s) = \varkappa_2(s) > 0,$$
$$\tau_1(s) = \tau_2(s),$$

то кривые L_1 и L_2 равны, т. е. L_1 и L_2 могут быть совмещены движением в пространстве.

Теорема 2. *Пусть $\varkappa(s)$ и $\tau(s)$ — две произвольные непрерывные функции на промежутке $[0, S]$ и пусть, кроме того, функция $\varkappa(s)$ строго положительна. Тогда существует кривая L, имеющая длину S, для которой функции $\varkappa(s)$ и $\tau(s)$ являются соответственно кривизной и кручением как функции длины дуги.*

Доказательство этих теорем мы приводить не будем. Интересующихся мы отсылаем к книге П. К. Рашевского «Курс дифференциальной геометрии» (М., ГИТТЛ, 1956).

Кривая L, заданная параметризацией

$$\boldsymbol{r}(t) = (R\cos\omega t)\,\boldsymbol{i} + (R\sin\omega t)\,\boldsymbol{j} + (at)\,\boldsymbol{k}, \quad t \in [0, +\infty),$$

называется *винтовой линией*. Легко видеть, что эта линия расположена на цилиндре $x^2 + y^2 = R^2$ (см. рис. 136) и представляет собой траекторию движения точки по цилиндру с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z и постоянной скоростью a вдоль оси z. Оказывается, что у винтовой линии кривизна и кручение во всех точках одинаковы и равны:

$$\varkappa = \frac{R\omega^2}{R^2\omega^2 + a}, \quad \tau = \frac{a\omega}{R^2\omega^2 + a^2}.$$

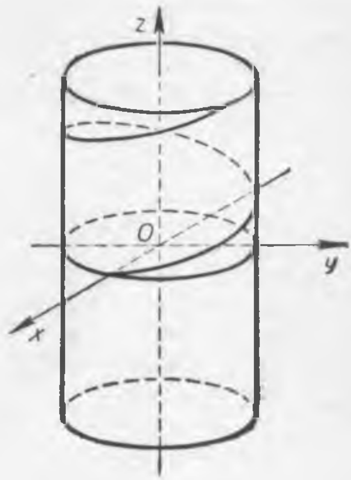


Рис. 136

Из теоремы 1 вытекает, что *единственными кривыми с постоянными кривизной и кручением являются винтовые линии.*

Кривизна и кручение, заданные как функции длины дуги:

$$\varkappa = \varkappa(s),$$
$$\tau = \tau(s),$$

называются *натуральными уравнениями кривой.*

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

1. Даны пути

$$\begin{aligned} x &= a\cos t,\\ y &= b\sin t,\\ 0 &\leqslant t \leqslant 2\pi \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} x &= a\cos(\tau^3 + 1),\\ y &= b\sin(\tau^3 + 1),\\ -1 &\leqslant \tau \leqslant \sqrt[3]{2\pi - 1}. \end{aligned}$$

Установить, эквивалентны они или нет.

2. Тот же вопрос решить для пар путей:

а) $l_1: \begin{cases} x = \cos t,\\ y = \sin t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 4;\\ z = t, \end{cases}$

$l_2: \begin{cases} x = \cos t^2,\\ y = \sin t^2, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi;\\ z = 2t, \end{cases}$

б)
$$l_1:\ \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t, \end{cases} \qquad 0 < t < 2\pi;$$
$$l_2:\ \begin{cases} x = -\cos 2t, \\ y = \sin 2t, \end{cases} \qquad 0 < t < \pi.$$

3. Найти параметрическое представление пути, описываемого точкой M в пространстве, при условии, что проекция точки M на плоскость xOy равномерно движется по окружности $x^2 + y^2 = R^2$ со скоростью ω, а проекция на ось z движется равномерно со скоростью a. За начальное положение точки M принять точку с координатами $(R,\ 0,\ 0)$.

Ответ. Путь, описываемый точкой M, называется *винтовой линией*; его представление имеет вид:
$$\begin{cases} x = R \cos \omega t, \\ y = R \sin \omega t, \\ z = at. \end{cases}$$

4. Окружность радиуса R без скольжения катится вдоль оси x. Найти параметрическое представление пути l, который описывает точка M, неподвижно закрепленная на этой окружности, если в начальный момент точка M совпадала с началом координат.

Ответ. Путь, описываемый точкой M, называется *циклоидой*; его представление имеет вид:
$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R - R\cos t, \end{cases}$$
где t — угол поворота окружности.

5. Для винтовой линии
$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = t \end{cases}$$
в точке $(1,\ 0,\ 0)$ составить уравнения касательной, соприкасающейся плоскости, главной нормали и бинормали.

Ответ. $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$; $y - z = 0$; $y = z = 0$;
$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}.$$

6. Найти уравнение касательной к кривой, заданной уравнениями
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = x, \end{cases}$$
в точке $(0,\ 0,\ 1)$.

Ответ. $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{0}.$

7. Доказать, что если касательные регулярной кривой проходят через одну точку, то кривая есть либо некоторая прямая, либо полупрямая, либо некоторый прямолинейный отрезок.

8. Доказать, что касательные винтовой линии

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t, \\ y = R\sin\omega t, \\ z = at \end{cases}$$

наклонены под постоянным углом к плоскости xOy, а все ее главные нормали пересекают ось z.

9. Доказать, что если касательные некоторой кривой параллельны одной и той же плоскости, то кривая плоская.

10. Доказать, что условие, необходимое и достаточное для того, чтобы кривая

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

была плоской, состоит в том, что

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0.$$

11. Найти длину пути

$$\begin{cases} x = a\operatorname{ch} t, \\ y = a\operatorname{sh} t, \\ z = at \end{cases}$$

между точками $t = 0$ и $t = 1$.

Ответ. $s = a\sqrt{2}\operatorname{sh} 1$.

12. Найти длину одной арки циклоиды

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t). \end{cases}$$

Ответ. $s = 8R$.

13. Найти кривизну кривой

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ z = 4\sin\dfrac{t}{2}. \end{cases}$$

Ответ. $\varkappa = \dfrac{1}{4}\sqrt{1 + \sin^2\dfrac{t}{2}}$.

14. Найти выражение для кривизны плоской кривой, заданной уравнением $\rho = \rho(\Theta)$ в полярных координатах.

Ответ. $$\varkappa = \frac{\left|\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''\right|}{\left[1 + \left(\frac{1}{\rho}\right)'^2\right]^{3/2}}.$$

15. Показать, что кривизна и кручение винтовой линии постоянны.

16. Доказать, что если кривизна и кручение кривой постоянны и отличны от нуля, то кривая есть винтовая линия.

17. Пусть кривая L_2 получается проективным преобразованим из кривой L_1. Доказать, что если в точке P кривой L_1 кривизна (кручение) равна нулю, то в соответствующей точке кривой L_2 кривизна (кручение) также равна нулю.

ГЛАВА V. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 1. Понятие поверхности

Пусть M и N — два точечных множества. Ниже мы по большей части будем считать, что множество M лежит в евклидовой плоскости, а N — в евклидовом пространстве. Случай, когда M лежит в евклидовом пространстве, будет оговариваться специально. Для дальнейшего нам будет существенно лишь, что между любой парой точек $X_1, X_2 \in M$ и любой парой точек $Y_1, Y_2 \in N$ определены евклидовские расстояния, равные соответственно длинам отрезков

$$X_1X_2 \text{ и } Y_1Y_2.$$

Будем говорить, что последовательность точек X_1, X_2, ..., X_n, ... $\in M$ сходится к точке X_0, если длины отрезков $X_n X_0$ стремятся к нулю.

Точка X_0 может как принадлежать множеству M, так и не принадлежать ему. В обоих случаях точка X_0 принадлежит евклидовой плоскости (евклидовому пространству), в которой расположено множество M.

Совокупность всех точек X евклидовой плоскости (пространства), для которых можно указать последовательность сходящихся к ним точек $X_n \in M$ (быть может, и совпадающих при всех номерах n), называется *замыканием множества* M и обозначается $\overline{M}$.

Совершенно аналогично вводится понятие *сходящейся последовательности точек* $Y_n \in N$ и понятие *замыкания множества* N в том евклидовом пространстве, где лежит N .

Тот факт, что X_0 или Y_0 есть предел последовательности точек X_n или Y_n, будем записывать так:

$$X_0 = \lim_{n \to \infty} X_n, \quad Y_0 = \lim_{n \to \infty} Y_n.$$

Пусть теперь дано отображение

$$Y = f\ (X)$$

множества M в множество N, т. е. определено однозначное соответствие, которое по определенному правилу точке X множества M сопоставляет точку Y множества N. *Отображение f называется не-*

прерывным в точке *$X_0 \in M$, если для любой последовательности точек $X_n \in M$, сходящихся к точке X_0, имеем:*

$$\lim_{n \to \infty} f(X_n) = f(X_0).$$

Отображение f называется ***непрерывным отображением множества*** *M* ***во множество*** *N, если оно непрерывно в каждой точке множества M.*

Топологическим, или гомеоморфным, отображением множества *M* ***во множество*** *N называют отображение φ, которое взаимно однозначно и взаимно непрерывно.* Если $\varphi(M) = N$, то говорят о топологическом отображении *M на N*. Отображение φ часто называют также *гомеоморфизмом.*

Множество точек на плоскости будем называть *простой областью,* если оно является образом открытого круга при некотором гомеоморфизме.

Множество Φ точек пространства будем называть *простой поверхностью,* если оно является образом простой области при некотором топологическом отображении ее в пространство.

Пусть Φ — простая поверхность, получаемая в результате топологического отображения f простой области G в пространство. Введем на плоскости систему декартовых координат u, v, а в пространстве систему декартовых координат x, y, z. Пусть, далее, u, v— координаты произвольной точки области G, а x, y, z — координаты соответствующей точки пространства. Координаты x, y, z точки поверхности будут тогда непрерывными функциями координат точки области G:

$$x = f_1(u, v), \; y = f_2(u, v), \; z = f_3(u, v). \tag{1}$$

Систему равенств (1), задающую отображение f области G в пространство, называют *параметрическими уравнениями поверхности* Φ.

Удобно рассматривать также векторное задание простой поверхности Φ, которое порождается системой (1):

$$\boldsymbol{r}(u, v) = f_1(u, v)\,\boldsymbol{i} + f_2(u, v)\,\boldsymbol{j} + f_3(u, v)\,\boldsymbol{k}.$$

Очевидно, что задание отображения f области G в пространство с помощью непрерывной вектор-функции $\boldsymbol{r}(u, v)$ равносильно заданию этого отображения системой равенств (1).

Понятие простой поверхности есть естественное обобщение понятия пути, которое рассматривалось в предыдущей главе и которое было использовано нами для построения определения кривой.

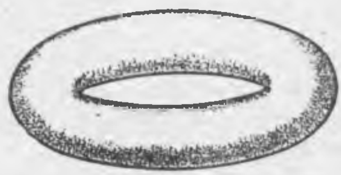
Понятие поверхности является более сложным по сравнению с понятием кривой. Для его построения нам понадобится еще одно важное понятие параметрической поверхности.

Множество Ф точек пространства будем называть ***параметрической поверхностью,*** *если это множество связно*[1] *и каждая точка X этого множества имеет в пространстве такую окрестность*[2] *U, что часть Ф, лежащая в U, является простой поверхностью.*

Всякая простая поверхность является параметрической. Обратное не верно, простыми поверхностями далеко не исчерпываются все параметрические поверхности. Например, сфера есть параметрическая поверхность, но она не является простой поверхностью. Другие примеры параметрических, но не простых поверхностей изображены на рис. 137, 138, 139.

Эллипсоид

Рис. 137



Тор

Рис. 138

Крендель

Рис. 139

Приведем важный пример простой поверхности. Пусть G — простая область на плоскости xOy (в частном случае G может быть и всей плоскостью xOy) и пусть $z = f(x, y)$ — непрерывная функция, заданная в G. Тогда в пространстве график функции $f(x, y)$ представляет собой простую поверхность. Действительно, отображение области G в пространство с помощью непрерывной вектор-функции

$$\boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + f(x, y)\boldsymbol{k}$$

есть некоторая простая поверхность Ф. Очевидно, что Ф совпадает с графиком функции $f(x, y)$ (см. рис. 140). Отсюда, в частности, вытекает, что любой сферический сегмент без края, не больший полусферы, есть простая поверхность. Для доказательства этого достаточно в качестве плоскости xOy взять плоскость края (см. рис. 141). Из последнего утверждения и связности сферы непосредственно вытекает, что *сфера есть параметрическая поверхность.*

[1] Множество M называется *связным*, если для любых двух точек $X, Y \in M$ существует путь l, лежащий целиком в M, с концами в точках X и Y.

[2] Под *окрестностью* точки X в пространстве понимается любой открытый шар с центром в точке X.

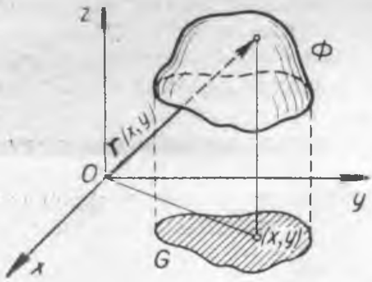


Рис. 140

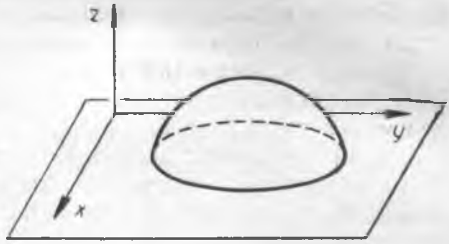


Рис. 141

Точка X_0 пространства называется ***предельной*** *для параметрической поверхности Φ, если существует последовательность точек $X_n \in Ф$, сходящаяся к X_0.* Предельная точка параметрической поверхности может не принадлежать поверхности. Параметрическая поверхность называется *полной,* если она содержит все свои предельные точки. Например, сфера, эллипсоид, параболоид суть полные поверхности, а сферический сегмент не является полной поверхностью (разумеется, речь идет о сферическом сегменте без ограничивающей его окружности).

Если полная параметрическая поверхность представляет собой ограниченное множество точек в пространстве, то она называется ***замкнутой***. Кроме сферы, замкнутыми поверхностями являются, например, тор и «крендели» с различным числом отверстий (см. рис. 138, 139, 142). Более подробно теория замкнутых поверхностей будет разобрана в главе VII.

Рис. 142

Если Φ — параметрическая неполная поверхность, то совокупность предельных точек Φ, ей не принадлежащих, называется ***краем поверхности,*** *а сама поверхность Φ называется* ***поверхностью с краем***.

Очевидно, замкнутая поверхность края не имеет. Например, всякая простая поверхность, лежащая в ограниченной части пространства, имеет край. *Отсюда следует, что сфера не есть простая поверхность, ибо она, как замкнутая поверхность, не имеет края.*

Окрестностью точки X на параметрической поверхности Φ называется общая часть поверхности Φ и некоторой пространственной окрестности точки *X*. Согласно определению, у каждой точки параметрической поверхности есть окрестность, которая является простой поверхностью. В дальнейшем, говоря об окрестности точки на поверхности, мы будем иметь в виду именно такую окрестность.

Отображение f параметрической поверхности Φ в пространство будем называть **локально гомеоморфным,** *или* **локальным гомеоморфизмом,** *если у каждой точки $X \in \Phi$ есть окрестность, для которой отображение f является гомеоморфизмом.*

Приведем пример локально гомеоморфного, но не гомеоморфного отображения параметрической поверхности. В качестве исходной поверхности возьмем прямой круговой цилиндр Z, направляющей которого является окружность единичного радиуса с центром в начале координат, лежащая в плоскости xOy, и образующие которого параллельны оси Oz. Цилиндр Z является, очевидно, параметрической поверхностью. Если на плоскости xOy ввести полярную систему координат ρ, θ, то декартовы координаты x, y, z любой точки M цилиндра удобно задать так:

$$\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \sin\theta, \qquad (0 \leqslant \theta < 2\pi) \\ z = z, \end{cases}$$

где θ—полярный угол проекции точки M на плоскость xOy (см. рис. 143).

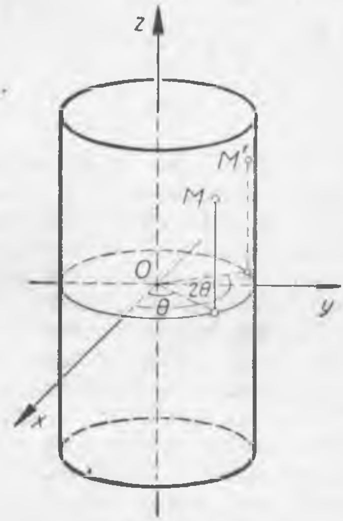


Рис. 143

Рассмотрим отображение f цилиндра Z, которое каждую точку M ($\cos\theta$, $\sin\theta$, z) переводит в точку M' с координатами

$$\begin{cases} x' = \cos 2\theta, \\ y' = \sin 2\theta, \\ z' = z. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что точка M' принадлежит цилиндру Z и, следовательно, отображение f переводит цилиндр Z в себя. Более того, образ Z при отображении f покрывает весь цилиндр Z, и при этом прообраз каждой точки состоит из двух точек. Действительно, в точку M' с координатами $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, z отображение f переводит точки M $\left(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}, z\right)$ и M_1 $\left(\cos\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right), \sin\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right), z\right)$. Отсюда видно, что f не является гомеоморфизмом. С другой стороны, очевидно, что у каждой точки $M \in Z$ есть окрестность, для которой отображение f есть гомеоморфизм. Следовательно, отображение f есть локальный гомеоморфизм цилиндра Z на себя.

Рассматривая отображение F_n, которое каждой точке $M(\cos\theta, \sin\theta, z) \in Z$ относит точку M' с декартовыми координатами

$$\begin{cases} x' = (1+z^2)\cos n\theta, \\ y' = (1+z^2)\sin n\theta, \\ \qquad z' = z, \end{cases} \quad (n \text{ — некоторое натуральное число})$$

получаем локально гомеоморфное отображение цилиндра Z на поверхность вращения Φ, которая образована вращением кривой

$$\begin{cases} y = 1 + z^2, \\ x = 0 \end{cases}$$

вокруг оси Oz.

Если $n = 1$, то отображение F_n есть просто гомеоморфизм.

Пусть теперь Φ_1 и Φ_2 — две параметрические поверхности и f_1 и f_2 — локальные гомеоморфизмы, отображающие соответственно Φ_1 и Φ_2 в пространство.

Будем говорить, что образы параметрических поверхностей Φ_1 и Φ_2 относительно отображений f_1 и f_2 определяют в пространстве ***одну и ту же поверхность*** *S, если существует такой гомеоморфизм φ между Φ_1 и Φ_2, при котором образы соответствующих точек Φ_1 и Φ_2 относительно отображений f_1 и f_2 совпадают, т. е. для любой точки $M_1 \in \Phi_1$ и соответствующей ей точки $M_2 = \varphi(M_1) \in \Phi_2$ справедливо равенство*

$$f_1(M_1) = f_2(M_2).$$

Таким образом, введено *отношение эквивалентности* между локально гомеоморфными отображениями параметрических поверхностей в пространство. Так же как и в теории кривых, можно установить, что *это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно*. Поэтому класс эквивалентных между собой локально гомеоморфных отображений параметрических поверхностей в пространство определяет в пространстве одну и ту же поверхность. Следовательно, ***поверхностью*** *можно назвать класс эквивалентных между собой локальных гомеоморфизмов параметрических поверхностей в пространство*. Каждая поверхность S в пространстве определена, если указано некоторое локально гомеоморфное отображение f какой-либо параметрической поверхности Φ. *Пара объектов — параметрическая поверхность Φ и ее локальный гомеоморфизм f в пространство — называется* ***параметрическим представлением поверхности*** *S*.

Согласно определению, все параметрические поверхности, которые участвуют в описании одной и той же поверхности, гомеоморфны между собой.

В определении кривой роль параметрических поверхностей играли сегменты числовой прямой, которые тривиальным образом гомеоморфны между собой. Переход от кривых к поверхностям связан с появлением большого количества параметрических поверхностей, имеющих различную топологическую структуру. Некоторое представление о разнообразии параметрических поверхностей дает следующее построение. Если из произвольной параметрической поверхности удалить любое замкнутое множество точек так, чтобы не нарушить связность поверхности, то оставшаяся часть будет также параметрической поверхностью (см. рис. 144, где построение проведено для сферы).

Рис. 144

Пусть S — некоторая поверхность в пространстве. Обозначим через A класс параметрических поверхностей Φ и через F множество локальных гомеоморфизмов f_Φ таких, что пара Φ, f_Φ есть параметрическое представление поверхности S. Выберем в классе A поверхность Φ_0 и пусть $f_{\Phi_0} \in F$ — соответствующий ей локальный гомеоморфизм. Обозначим через H совокупность гомеоморфизмов h, переводящих Φ_0 в Φ, и таких, что для любой точки $M_0 \in \Phi_0$ имеем: $f_{\Phi_0}(M_0) = f_\Phi(h(M_0))$.

Каждой точке $M_0 \in \Phi_0$ соответствуют на поверхностях $\Phi \in A$ точки $M = h(M_0)$. Согласно определению, образы всех точек M при отображениях f_Φ совпадают и определяют в пространстве некоторую точку X. *Точка X называется точкой поверхности S.* Точка X может оказаться образом двух и более различных совокупностей соответствующих между собой точек $M \in \Phi$ и $M' \in \Phi$ при отображениях f_Φ, тогда она рассматривается на поверхности S в двух и более экземплярах. Так обстояло дело с поверхностью, которая имела своим параметрическим представлением пару: цилиндр Z и локальный гомеоморфизм F_n (стр. 286).

Так как f_{Φ_0} есть локальный гомеоморфизм, то у точки M_0 на параметрической поверхности Φ_0 есть окрестность V_0, где f_{Φ_0} есть просто гомеоморфизм. Если мы обозначим через V окрестности точек $M \in \Phi$, которые гомеоморфизмами h^{-1} переводятся в V_0, т. е.

$$V_0 = h^{-1}(V),$$

то на V отображения f_Φ будут, очевидно, гомеоморфизмами. Кроме того, для всех точек $N_0 \in V_0$ имеем:

$$N = h(N_0) \in V \quad \text{и} \quad f_{\Phi_0}(N_0) = f_\Phi\ (N).$$

Поэтому точки поверхности S, соответствующие системе окрестностей V точек $M \in \Phi$, выделяют на S некоторое множество U, для которого X есть внутренняя точка. *Множество U называется* **окрестностью точки** *X на поверхности S.* Для любой точки $Y \in U$ во множестве V_0 существует только одна точка N_0, имеющая Y своим образом при отображении f_{Φ_0}.

Из определения параметрической поверхности следует, что окрестность V_0 можно взять такой, чтобы она была простой поверхностью, т. е. чтобы она была гомеоморфным образом некоторой простой области. Но тогда и все окрестности $V = h(V_0)$ являются гомеоморфными образами V_0, и потому все V суть простые поверхности. Но так как на V отображения f_Φ являются гомеоморфизмами, то окрестность U точки $X \in S$ есть также простая поверхность.

Итак, если каждую точку X поверхности S рассматривать в единственном экземпляре, т. е. различать между собой совпавшие образы различных точек параметрической поверхности Φ_0 при локальном гомеоморфизме f_{Φ_0}, то у любой точки $X \in S$ есть окрестность, являющаяся простой поверхностью. При этом если одной и той же точке X пространства на поверхности S отвечает несколько экземпляров точек X_i, то у каждого экземпляра можно указать свою окрестность U_i, представляющую собой простую поверхность и такую, что если U_i порождается с помощью некоторой области $V_0^{(i)} \in \Phi_0$, то множества $V_0^{(i)}$ не имеют общих точек и в каждом из них находится лишь одна точка M_0^i, для которой

$$f_{\Phi_0}(M_0^i) = X_i.$$

Все проведенные выше рассмотрения показывают, что при изучении поверхности в малом, т. е. в некоторой достаточно малой окрестности, любой ее точки, целесообразно ограничиться параметрическим представлением, которое порождается в пределах этой окрестности простой поверхностью Φ_0 и гомеоморфизмом поверхности f_{Φ_0} в пространство.

Рассмотрения, которые были проведены для поверхности в целом, понадобятся нам в главе VII при изучении замкнутых поверхностей.

§ 2. Гладкие и регулярные поверхности

Пусть G — простая область на плоскости с декартовыми координатами u, v. В области G рассмотрим вектор-функцию

$$\boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\,\boldsymbol{i} + y(u, v)\,\boldsymbol{j} + z(u, v)\,\boldsymbol{k},$$

значения которой суть радиус-векторы пространства; при этом предполагается, что в пространстве фиксирована декартова система координат $Oxyz$.

Вектор-функцию $\boldsymbol{r}(u, v)$ будем называть ***регулярной****, если в G $\boldsymbol{r}(u, v)$, или, что то же, функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ k раз непрерывно дифференцируемы ($k \geqslant 1$) и всюду в G*

$$[\boldsymbol{r}_u, \ \boldsymbol{r}_v] \neq 0.$$

При $k = 1$ вектор-функцию $\boldsymbol{r}(u, v)$ также называют ***гладкой***.

Если простую область G рассматривать как простую поверхность, то регулярная вектор-функция $\boldsymbol{r}(u, v)$, заданная в G, определяет некоторое отображение G в пространство. Естественно, возникает вопрос, определяется ли при этом отображении некоторая поверхность. Ответ дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть G — простая область на плоскости с декартовыми координатами u, v и пусть в G определена регулярная вектор-функция $\boldsymbol{r}(u, v)$. Тогда эта вектор-функция определяет некоторую поверхность S в пространстве.*

Другими словами, поверхность S есть образ простой области G в пространстве при локальном гомеоморфизме, который точке $(u, v) \in G$ относит точку пространства с декартовыми координатами $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$.

Доказательство. Докажем прежде всего, что отображение области G в пространство локально взаимно однозначно. Допустим, что это не так, тогда в области G найдется точка (u_0, v_0), в сколь угодно малой окрестности V которой существуют две различные точки (u_1, v_1) и (u_2, v_2) такие, что

$$
\begin{aligned}
x(u_1, v_1) - x(u_2, v_2) &= 0,\\
y(u_1, v_1) - y(u_2, v_2) &= 0,\\
z(u_1, v_1) - z(u_2, v_2) &= 0.
\end{aligned}
$$

Используя формулу конечных приращений, получаем:

$$
\left\{
\begin{aligned}
x(u_1, v_1) - x(u_2, v_2) &= (v_1 - v_2)\, x_v(u_1, \theta_1) + (u_1 - u_2)\, x_u(\theta_1', v_2) = 0,\\
y(u_1, v_1) - y(u_2, v_2) &= (v_1 - v_2)\, y_v(u_1, \theta_2) + (u_1 - u_2)\, y_u(\theta_2', v_2) = 0,\\
z(u_1, v_1) - z(u_2, v_2) &= (v_1 - v_2)\, z_v(u_1, \theta_3) + (u_1 - u_2)\, z_u(\theta_3', v_2) = 0,
\end{aligned}
\right. \quad (*)
$$

при этом во всех трех равенствах первые производные вычислены в точках окрестности V.

Так как $u_1 - u_2$, $v_1 - v_2$ не равны нулю одновременно, то из равенств (*) следует, что все определители второго порядка, порожденные матрицей

$$
\begin{pmatrix}
x_v(u_1, \theta_1), & y_v(u_1, \theta_2), & z_v(u_1, \theta_3)\\
x_u(\theta_1', v_2), & y_u(\theta_2', v_2), & z_u(\theta_3', v_2)
\end{pmatrix},
$$

равны нулю. Так как V — сколь угодно малая окрестность точки (u_0, v_0), то и в самой этой точке все определители второго порядка, порожденные матрицей

$$
\begin{pmatrix}
x_u & y_u & z_u\\
x_v & y_v & z_v
\end{pmatrix},
$$

равны нулю, поскольку первые производные функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ непрерывны в (u_0, v_0).

С другой стороны, из регулярности вектор-функции $\boldsymbol{r}(u, v)$ следует, что

$$[\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0), \quad \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)] \neq \mathbf{0}.$$

Но

$$
[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v] = \begin{vmatrix}
\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\
x_u & y_u & z_u\\
x_v & y_v & z_v
\end{vmatrix}.
$$

Поэтому хотя бы один из определителей, порожденных матрицей

$$
\begin{pmatrix}
x_u & y_u & z_u\\
x_v & y_v & z_v
\end{pmatrix},
$$

в точке (u_0, v_0) отличен от нуля, что невозможно.

Итак, локальная взаимная однозначность отображения доказана.

Непрерывность отображения области G в пространство вытекает из непрерывности вектор-функции $\boldsymbol{r}(u, v)$.

Пусть $(\overline{u}, \overline{v})$ — произвольная точка области G. Тогда существует окрестность V этой точки, в которой отображение

$$f:\ x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)$$

взаимно однозначно. В точке $(\overline{u}, \overline{v})$ хотя бы один из определителей второго порядка, порожденных матрицей

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix},$$

отличен от нуля. Пусть для определенности

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда существует окрестность $V_1 \subset V$ точки $(\overline{u}, \overline{v})$, в которой

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

и отображение

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases} \qquad (*)$$

обратимо, причем обратное отображение непрерывно. Пусть W_1 — образ окрестности V_1 при отображении $(*)$ и U_1 — образ окрестности V_1 при отображении $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$.

Обозначим через

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases} \quad (x, y) \in W_1$$

обратное отображение для отображения $(*)$. Тогда для $(x, y, z) \in U_1$

$$f^{-1}:\ u = u(x, y),\ v = v(x, y).$$

Поэтому в окрестности V_1 отображение

$$f:\ x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),$$

порождаемое регулярной функцией $\boldsymbol{r}(u, v)$, взаимно непрерывно.

Итак, отображение простой области G в пространство посредством регулярной вектор-функции $\boldsymbol{r}(u, v)$ есть локальный гомеоморфизм. Следовательно, вектор-функция $\boldsymbol{r}(u, v)$ определяет в пространстве некоторую поверхность S.

Теорема доказана.

Введем следующее основное определение.

Поверхность будем называть ***регулярной****, если у каждой ее точки есть окрестность, являющаяся простой поверхностью, которая задана регулярной вектор-функцией.*

То же самое будем более кратко формулировать так.

Поверхность регулярна*, если каждая ее точка имеет окрестность, допускающую регулярную параметризацию.*

В дальнейшем рассматриваются лишь регулярные поверхности. Так как в этой главе нас будут интересовать свойства поверхности в достаточно малой окрестности точки, то мы будем считать, что на всей поверхности введена единая регулярная параметризация. Это означает, что поверхность определяется в пространстве регулярной вектор-функцией $\boldsymbol{r}\ (u, v)$, определенной в некоторой простой области G, и отображение в пространство, которое осуществляет вектор-функция $\boldsymbol{r}\ (u,\ v)$, есть гомеоморфизм.

§ 3. Внутренние координаты на поверхности

Пусть S — регулярная поверхность и $\boldsymbol{r}\ (u,\ v)$ — ее регулярная параметризация. Тогда между точками области G и точками поверхности S установлено взаимно однозначное соответствие, так как вектор-функция $\boldsymbol{r}\ (u,\ v)$ определяет гомеоморфное отображение области G в пространство. Следовательно, пару чисел $u,\ v$ можно рассматривать как координаты точки на поверхности S. Числа $u,\ v$ связаны только с теми точками пространства, которые лежат на поверхности S, и потому описывают свойства геометрических образов лишь внутри поверхности S. В связи с этим они называются *внутренними координатами точки на поверхности.*

Итак, *каждая регулярная параметризация поверхности S порождает на ней вполне определенную систему внутренних координат.*

Регулярная поверхность в некоторой окрестности каждой своей точки допускает бесконечное множество регулярных параметризаций. Тем самым в указанной окрестности можно ввести бесконечное множество различных систем внутренних координат.

Действительно, пусть

$$x = x\ (u,\ v),\ y = y\ (u,\ v),\ z = z\ (u,\ v)$$

— какая-нибудь регулярная параметризация поверхности в некоторой окрестности точки $X\ (u_0,\ v_0)$. Пусть k — натуральное число, указывающее порядок непрерывной дифференцируемости функций $x\ (u,\ v)$, $y\ (u,\ v)$, $z\ (u,\ v)$. Если $\varphi\ (\alpha,\ \beta)$ и $\psi\ (\alpha,\ \beta)$ — любые k раз непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие в точке $(\alpha_0,\ \beta_0)$ условиям

$$\begin{aligned} u_0 &= \varphi\,(\alpha_0,\ \beta_0), \\ v_0 &= \psi\,(\alpha_0,\ \beta_0), \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} \varphi_\alpha & \varphi_\beta \\ \psi_\alpha & \psi_\beta \end{vmatrix} \neq 0,$$

то уравнения

$$\begin{aligned} x &= \bar{x}\,(\alpha,\ \beta), \\ y &= \bar{y}\,(\alpha,\ \beta), \\ z &= \bar{z}\,(\alpha,\ \beta), \end{aligned}$$

где

$$\bar{x}(\alpha, \beta) = x(\varphi(\alpha, \beta), \quad \psi(\alpha, \beta)),$$
$$\bar{y}(\alpha, \beta) = y(\varphi(\alpha, \beta), \quad \psi(\alpha, \beta)),$$
$$\bar{z}(\alpha, \beta) = z(\varphi(\alpha, \beta). \quad \psi(\alpha, \beta)),$$

также дают регулярную параметризацию поверхности S в окрестности точки X. Это непосредственно вытекает из того, что формулы

$$u = \varphi(\alpha, \beta), \ v = \psi(\alpha, \beta)$$

задают k раз непрерывно дифференцируемый гомеоморфизм достаточно малой окрестности точки (α_0, β_0) плоскости α, β на некоторую окрестность точки (u_0, v_0) плоскости u, v.

Рассмотрим одну специальную параметризацию регулярной поверхности, которая в дальнейшем будет играть существенную роль. Пусть k раз непрерывно дифференцируемые функции

$$x = x(u, v), \ y = y(u, v), \ z = z(u, v)$$

определяют регулярную параметризацию поверхности S в окрестности точки $X(u_0, v_0)$. Тогда всюду ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

равен двум и, не ограничивая общности, можно считать, что в точке (u_0, v_0) отличен от нуля определитель

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}.$$

По теореме о неявных функциях существуют k раз непрерывно дифференцируемые функции

$$u = f(x, y), \ v = g(x, y),$$

являющиеся обращением системы

$$x = x(u, v), \ \ y = y(u, v)$$

в некоторой окрестности точки (u_0, v_0). Функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ определены в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0), где $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$; они тождественно удовлетворяют системе уравнений

$$x = x(f(x, y), g(x, y)), \ y = y(f(x, y), g(x, y))$$

и

$$u_0 = f(x_0, y_0), \qquad v_0 = g(x_0, y_0).$$

Отсюда следует, что искомая поверхность в достаточно малой окрестности точки X допускает регулярную параметризацию

$$x = x, \quad y = y, \quad z = z(f(x, y), \ g(x, y)) = \bar{z}(x, y),$$

или. что то же самое,

$$z = \bar{z}(x, y).$$

т. е. *достаточно малая окрестность точки X допускает регулярное параметрическое представление с помощью явного уравнения*

$$z = \bar{z}\ (x, y).$$

§ 4. Кривые на регулярной поверхности

Пусть S — регулярная поверхность и

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$$

— ее регулярная параметризация. Не нарушая общности, можно считать, что k раз непрерывно дифференцируемая функция $\boldsymbol{r}(u, v)$ задана в прямоугольнике

$$G: \begin{matrix} a < u < b, \\ c < v < d. \end{matrix}$$

Пусть

$$l: \ u = u(t), \quad v = v(t)$$

— регулярный путь в G. Пути l на поверхности S соответствует путь $\bar{l}$, который в пространстве задается вектор-функцией

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{r}(u(t), \ v(t))$$

(рис. 145).

Путь $\bar{l}$ в пространстве определяет некоторую кривую L. Ниже мы устанавливаем регулярность пути $\bar{l}$ и кривой L.

Теорема 1. *Пусть функции*

$$u = u(t), \qquad v = v(t),$$

задающие путь l, k раз непрерывно дифференцируемы. Тогда путь $\bar{l}$ и кривая L регулярны, причем функция $\boldsymbol{R}(t)$ k раз непрерывно дифференцируема.

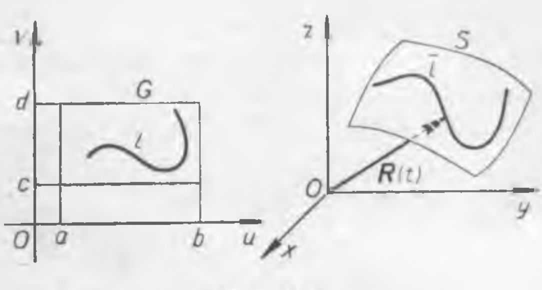


Рис. 145

Доказательство. Прежде всего отметим, что вектор-функция

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{r}(u(t), \ v(t))$$

k раз непрерывно дифференцируема как сложная функция двух k раз непрерывно дифференцируемых функций.

Далее имеет место равенство:

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \boldsymbol{r}_u \frac{du}{dt} + \boldsymbol{r}_v \frac{dv}{dt}$$

Так как для любой точки $(u, v) \in G$

$$[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v] \neq 0$$

и при любых t

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \neq 0,$$

то при всех t и при всех $(u, v) \in G$ имеем:

$$\boldsymbol{r}_u \frac{du}{dt} + \boldsymbol{r}_v \frac{dv}{dt} \neq 0$$

и, следовательно,

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} \neq 0$$

во всех точках пути $\bar{l}$.

Из проведенных рассуждений вытекает, что путь $\bar{l}$, лежащий на поверхности S, является регулярным путем в пространстве. Так как $\bar{l}$ есть регулярная параметризация кривой L, то кривая L, согласно определению, является регулярной.

Теорема доказана.

Параметрические уравнения пути l в G:

$$u = u\ (t),\ v = v\ (t)$$

называют ***внутренними уравнениями пути $\bar{l}$ на*** *S; ту же пару уравнений*

$$u = u\ (t),\ v = v\ (t)$$

называют ***регулярной внутренней параметризацией*** *кривой L.*

Теорема 2. *Пусть даны две регулярные параметризации одной и той же регулярной поверхности S. Пусть, далее, первая параметризация осуществляется с помощью вектор-функции $\boldsymbol{r}_1\ (u, v)$, заданной в простой области G_1, а вторая — вектор-функцией $\boldsymbol{r}_2\ (u', v')$, заданной в простой области G_2. Пусть, далее, между G_1 и G_2 установлен k раз непрерывно дифференцируемый гомеоморфизм φ, при котором*

$$\boldsymbol{r}_1 (u, v) = \boldsymbol{r}_2 (\varphi (u, v)).$$

Тогда если регулярные пути $l_1 \in G_1$ и $l_2 \in G_2$ совмещаются гомеоморфизмом φ и при этом они оказываются эквивалентными, то *они на поверхности S определяют эквивалентные регулярные пути $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$ и, стало быть, уравнения путей l_1 и l_2 являются регулярными внутренними параметризациями одной и той же кривой L на S.*

Доказательство этой теоремы весьма просто, и оно предлагается читателям как полезное упражнение.

Пусть, по-прежнему, S—регулярная поверхность и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$— ее регулярная параметризация, причем вектор-функция $\boldsymbol{r}(u, v)$ задана в прямоугольнике

$$G: \begin{array}{l} a < u < b, \\ c < v < d. \end{array}$$

Кривые на S, определяемые путями

$$l: \begin{cases} u = t, \\ v = v_0 = \text{const}, \end{cases}$$

и

$$m: \begin{cases} u = u_0 = \text{const}, \\ v = t \end{cases}$$

(рис. 146), *будем называть* ***координатными линиями***. Координатные линии образуют два семейства регулярных кривых. Семейство, порожденное путями l, будем называть *линиями* $v = \text{const}$ и обозначать $\tilde{l}_{v_0}$, а семейство, порожденное путями m — *линиями* $u =$

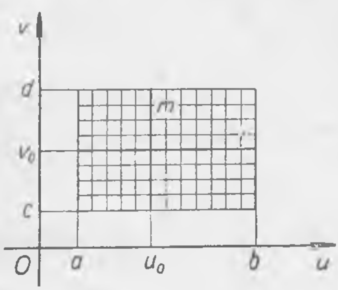


Рис. 146

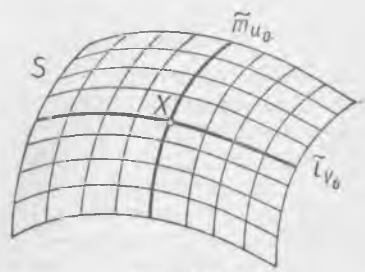


Рис. 147

$= \text{const}$ и обозначать $\tilde{m}_{u_0}$(рис. 147). В произвольной точке $X(u_0, v_0)$ поверхности S векторы $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ и $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$ суть, очевидно, касательные векторы к координатным линиям $\tilde{l}_{v_0}$ и $\tilde{m}_{u_0}$ в точке X. Так как $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ — регулярная параметризация S, то

$$[\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0), \quad \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)] \neq \mathbf{0}.$$

Это значит, что в точке $X(u_0, v_0)$ касательные векторы отличны от нуля и координатные линии $\tilde{l}_{v_0}$ и $\tilde{m}_{u_0}$ пересекаются в этой точке под углом, отличным от нуля и π (рис. 148).

Рис. 148

Итак, условие, что всюду на поверхности

$$[\boldsymbol{r}_u, \quad \boldsymbol{r}_v] \neq 0,$$

равносильно следующему: касательные векторы к координатным линиям всегда отличны от нуля, а любые две координатные линии, взятые из разных семейств, пересекаются под углом, отличным от нуля и π.

§ 5. Касательная плоскость

Пусть S — регулярная поверхность и X — произвольная точка на ней. ***Контингенцией поверхности** S **в точке** X называется множество точек, лежащих на касательных в точке X ко всем регулярным кривым, лежащим на S и проходящим через X.*

Если контингенция к поверхности S в точке X представляет собой плоскость, то эта плоскость называется *касательной к S в точке X*.

Т е о р е м а 1. *У регулярной поверхности S в каждой точке контингенция есть плоскость. Таким образом, в каждой точке регулярной поверхности существует касательная плоскость.*

Далее, если

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\ (u, v)$$

— регулярная параметризация S и $X\ (u_0, v_0)$ — произвольная точка S, то касательная плоскость в этой точке совпадает с плоскостью, проходящей через векторы $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ и $\boldsymbol{r}_v\ (u_0, v_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\ (u, v)$ — регулярная параметризация поверхности S, о которой говорится в условии теоремы. Пусть L — произвольная регулярная кривая, лежащая на S и проходящая через точку $X\ (u_0, v_0)$, и $u = u\ (t)$, $v = v\ (t)$ — ее внутренняя регулярная параметризация. Тогда вектор-функция

$$\boldsymbol{R}\ (t) = \boldsymbol{r}\ (u\ (t), \quad v\ (t))$$

определяет в пространстве согласно теореме 1 § 3 регулярный путь $\bar{l}$. Касательный вектор к $\bar{l}$ в точке X находится по формуле:

$$\frac{d\boldsymbol{R}\ (t_0)}{dt} = \boldsymbol{r}_u\ (u_0, v_0)\ u'\ (t_0) + \boldsymbol{r}_v\ (u_0, v_0)\ v'\ (t_0);$$

здесь точке $X\ (u_0, v_0)$ отвечает значение параметра $t = t_0$ и

$$u_0 = u\ (t_0),$$
$$v_0 = v\ (t_0)$$

(см. рис. 149). Отсюда следует, что касательная к L лежит в плоскости P, проходящей через векторы $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ и $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$. Таким образом, контингенция к S в точке X содержится в плоскости P.

Рис. 149

Для завершения доказательства теоремы достаточно доказать обратное включение, т. е. убедиться в том, что плоскость P входит в состав контингенции к S в точке X.

Пусть g — произвольная прямая на плоскости P. Обозначим через $\boldsymbol{a}$ какой-нибудь вектор, лежащий на g. Так как $\boldsymbol{a}$ расположен в плоскости P, то $\boldsymbol{a}$ есть линейная комбинация векторов $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ и $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$:

$$\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) + \beta \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0);$$

здесь через α и β обозначены некоторые числа.

В прямоугольнике G рассмотрим путь

$$l : \begin{cases} u = u_0 + \alpha t, \\ v = v_0 + \beta t, \end{cases} \quad t \in [-\varepsilon, \varepsilon],$$

где $\varepsilon > 0$ выбрано так, чтобы при всех t точка

$$(u_0 + \alpha t, \ v_0 + \beta t) \in G.$$

Вектор-функция

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{r}(u_0 + \alpha t, \ v_0 + \beta t)$$

определяет регулярный путь $\overline{l}$, лежащий на S и проходящий через точку $X(u_0, v_0)$, причем точке $X(u_0, v_0)$ соответствует значение параметра $t = 0$. Касательная к кривой L, для которой путь $\overline{l}$ является регулярной параметризацией, в точке $X(u_0, v_0)$ совпадает с вектором $\dfrac{d\boldsymbol{R}(0)}{dt}$.

Но

$$\frac{d\boldsymbol{R}(0)}{dt} = \boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)\alpha + \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)\beta = \boldsymbol{a}$$

Поэтому прямая g совпадает с касательной к кривой L в точке X и, стало быть, входит в состав контингенции к поверхности S в точке X. Так как g была выбрана произвольно на плоскости P, то плоскость P содержится в контингенции поверхности S в точке X.

Этим, как уже отмечалось выше, и завершается доказательство теоремы.

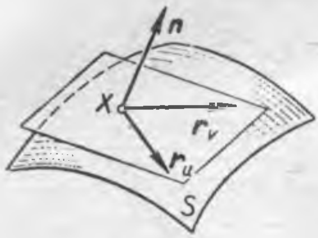


Рис. 150

Положение касательной плоскости в пространстве удобно характеризовать с помощью единичного вектора $\boldsymbol{n}$, перпендикулярного к этой плоскости. *Вектор* $\boldsymbol{n}$ *называют* ***нормалью поверхности***. Для того чтобы однозначно фиксировать направление вектора $\boldsymbol{n}$, его определяют формулой:

$$\boldsymbol{n} = \frac{[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]}{|[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]|}. \qquad (*)$$

Формула (*) задает нормаль поверхности S как вектор-функцию внутренних координат u, v поверхности (рис. 150).

С касательной плоскостью удобно связать некоторую специальную параметризацию окрестности произвольной точки регулярной поверхности.

Именно имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть S — регулярная поверхность и X — произвольная точка S. Возьмем систему декартовых координат так, чтобы ее начало совпадало с точкой X, оси x и y лежали в касательной плоскости к S в точке X и ось Z была направлена по нормали к поверхности в точке X. Тогда у точки X существует окрестность, которую в декартовых координатах x, y, z можно задать явным уравнением*

$$z = f(x, y).$$

Более того, если $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ — регулярная параметризация поверхности S и вектор-функция $\boldsymbol{r}$ k раз непрерывно дифференцируема, то функция $f(x, y)$ в достаточно малой окрестности точки $(0, 0)$ на плоскости x, y также k раз непрерывно дифференцируема, а в точке $(0, 0)$ имеют место соотношения:

$$f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0.$$

Доказательство. Пусть S — регулярная поверхность и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ — ее регулярная параметризация, о которой говорится в условии теоремы 2. Пусть $X(u_0, v_0)$ — произвольная точка поверхности S и P — касательная плоскость к S в точке X (см. рис. 151).

Пусть, далее, x, y, z — система декартовых координат, построенная так, как указано в условии теоремы 2. Тогда

$$\boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\boldsymbol{i} + y(u, v)\boldsymbol{j} + z(u, v)\boldsymbol{k},$$

где $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ — k раз непрерывно дифференцируемые функции переменных u, v, причем

$$[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v] \neq 0.$$

Согласно рассмотрениям, проведенным в § 3, для установления того факта, что достаточная малая окрестность V точки $X(u_0, v_0)$ на поверхности S может быть задана явным уравнением

$$z = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ — k раз непрерывно дифференцируемая функция в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ на плоскости x, y, достаточно проверить справедливость неравенства

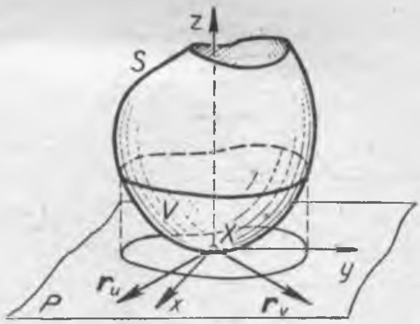


Рис. 151

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

в точке (u_0, v_0).

Прежде всего отметим, что в точке $X(u_0, v_0)$ векторы $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ и $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$ лежат в касательной плоскости к S в точке X, или, что то же, в плоскости P. Поэтому

$$\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) = x_u(u_0, v_0)\,\boldsymbol{i} + y_u(u_0, v_0)\,\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0) = x_v(u_0, v_0)\,\boldsymbol{i} + y_v(u_0, v_0)\,\boldsymbol{j}.$$

Далее,

$$[\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0), \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} \boldsymbol{k},$$

и так как в любой точке поверхности

$$[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v] \neq 0,$$

то

$$\begin{vmatrix} x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Так как поверхность S проходит через точку X, являющуюся началом декартовой системы координат, то

$$f(0, 0) = 0.$$

Далее, касательные к сечениям поверхности плоскостями xz и yz в точке X лежат в плоскости xy, поэтому

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

Теорема полностью доказана.

§ 6. Первая квадратичная форма поверхности. Измерение длин кривых и углов между ними на поверхности

Пусть S — регулярная поверхность и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ — ее регулярная параметризация.

Первой квадратичной формой поверхности *S называется квадрат полного дифференциала вектор-функции $\boldsymbol{r}(u, v)$:*

$$\mathrm{I} = d\boldsymbol{r}^2.$$

Так как

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv,$$

то для первой квадратичной формы имеем следующее выражение:

$$\mathrm{I} = d\boldsymbol{r}^2 = (\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv)^2 =$$
$$= (\boldsymbol{r}_u^2)\, du^2 + 2(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)\, du dv + (\boldsymbol{r}_v^2) dv^2.$$

Для коэффициентов первой квадратичной формы введены специальные обозначения:

$$E = \boldsymbol{r}_u^2, \quad F = (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v), \; G = \boldsymbol{r}_v^2.$$

Таким образом,

$$\mathrm{I} = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Первая квадратичная форма поверхности является положительно определенной формой, т. е. при всех значениях du и dv она принимает неотрицательные значения и обращается в нуль, только при $du = dv = 0$. Действительно, если $d\boldsymbol{r}^2 = 0$, то

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv = \boldsymbol{0}.$$

А так как $[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v] \neq \boldsymbol{0}$, то это возможно лишь при условии, что $du = dv = 0$.

При переходе от одной параметризации поверхности S к другой, или, что то же, при переходе от одних внутренних координат u, v на поверхности к другим внутренним координатам u', v', коэффициенты первой квадратичной формы могут изменяться, но значения всей квадратичной формы в целом не изменяются.

Действительно, если уравнения

$$\begin{cases} u = u(u', v'), \\ v = v(u', v') \end{cases}$$

определяют регулярный гомеоморфизм между простыми областями, в которых заданы вектор-функции $\boldsymbol{r}(u, v)$ и $\boldsymbol{r}_1(u', v')$, то

$$\boldsymbol{r}_1(u', v') = \boldsymbol{r}(u(u', v'), v(u', v')),$$

и, пользуясь инвариантностью первого дифференциала, получим:

$$d\boldsymbol{r}_1^2 = d\boldsymbol{r}^2.$$

Итак, первая квадратичная форма не зависит от выбора конкретной регулярной параметризации поверхности S.

Рассмотрим вопрос о длине кривой на поверхности S. Пусть L — кривая на S и $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — ее регулярная параметризация. *Пару уравнений* $u = u(t)$ и $v = v(t)$ *будем также называть* ***внутренними уравнениями кривой*** L.

Пусть $\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{r}(u(t), v(t))$ — вектор-функция, определяющая в пространстве кривую L. Тогда из результатов § 5 гл. IV для длины $s(L)$ кривой L справедлива формула

$$s(L) = \int_a^b \left|\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}\right| dt =$$

$$= \int_a^b \left|\boldsymbol{r}_u \frac{du}{dt} + \boldsymbol{r}_v \frac{dv}{dt}\right| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\boldsymbol{r}_u \frac{du}{dt} + \boldsymbol{r}_v \frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt. \qquad (*)$$

Кратко формулу (*) записывают иногда так:

$$s(L) = \int_a^b |d\boldsymbol{r}(u(t), v(t))| = \int_L \sqrt{\mathrm{I}}.$$

Итак, для измерения длин кривых на поверхности достаточно знать первую квадратичную форму. Поэтому говорят, что первая квадратичная форма задает ***метрику*** *поверхности.*

Найдем первую квадратичную форму для некоторых поверхностей.

Пример 1. Пусть S — сфера радиуса R с центром в начале координат. В качестве внутренних координат выберем географические координаты (долготу и широту) φ и θ (см. рис. 152). Тогда $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Уравнения сферы в этих координатах таковы:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\cos\theta, \\ y = R\sin\varphi\cos\theta, \\ z = R\sin\theta. \end{cases}$$

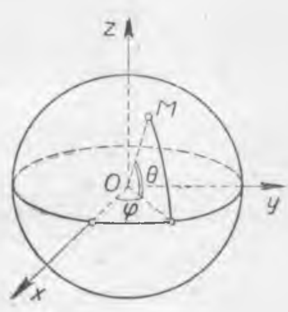


Рис. 152

Вектор-функция $\boldsymbol{r}(\varphi, \theta) = x(\varphi, \theta)\,\boldsymbol{i} + y(\varphi, \theta)\,\boldsymbol{j} + z(\varphi, \theta)\,\boldsymbol{k}$, представляющая собой параметризацию сферы, всюду регулярна, кроме полюсов.

После простых вычислений находим:

$$E = \boldsymbol{r}_\varphi^2 = R^2 \cos^2\theta,$$
$$F = 0,$$
$$G = \boldsymbol{r}_\theta^2 = R^2,$$

и, следовательно, первая квадратичная форма сферы имеет вид:

$$\mathrm{I} = R^2 \cos^2\theta\, d\varphi^2 + R^2\, d\theta^2.$$

Если L — некоторая кривая на S, имеющая внутренние уравнения

$$\varphi = \varphi, \quad \theta = f(\varphi) \quad (\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2),$$

то ее длина находится по формуле

$$s(L) = R\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\cos^2(f(\varphi)) + f'^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

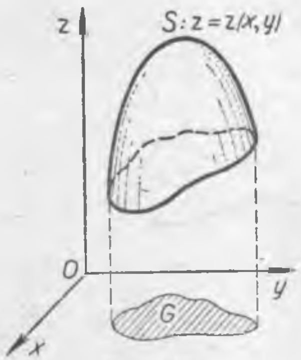


Рис. 153

Пример 2. Пусть регулярная поверхность S задана явным уравнением

$$z = z(x, y),$$

где $z(x, y)$ — k раз непрерывно дифференцируемая функция в простой области G на плоскости xOy (см. рис. 153). Тогда вектор-функция, являющаяся регулярной параметризацией S, имеет вид:

$$\boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z(x, y)\,\boldsymbol{k}.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{r}_x = \boldsymbol{i} + z_x\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r}_y = \boldsymbol{j} + z_y\boldsymbol{k}, \qquad (*)$$

и потому

$$E = \boldsymbol{r}_x^2 = 1 + z_x^2,$$
$$F = (\boldsymbol{r}_x, \boldsymbol{r}_y) = z_x z_y,$$
$$G = \boldsymbol{r}_y^2 = 1 + z_y^2.$$

Следовательно, первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$\mathrm{I} = (1 + z_x^2)\, dx^2 + 2z_x z_y\, dx\, dy + (1 + z_y^2)\, dy^2.$$

Отметим, что простыми вычислениями из формул (*) для $\boldsymbol{r}_x$ и $\boldsymbol{r}_y$ легко находим уравнение касательной плоскости к S и нормаль $\boldsymbol{n}$:

$$z - z(x, y) = z_x(x, y)(X - x) + z_y(x, y)(Y - y),$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{[\boldsymbol{r}_x, \boldsymbol{r}_y]}{\|[\boldsymbol{r}_x, \boldsymbol{r}_y]\|} = \frac{-z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}\,\boldsymbol{i} + \frac{-z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}\,\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}\,\boldsymbol{k}.$$

Направлением $(du : dv)$ ***в данной точке*** $X(u, v)$ ***на поверхности*** S *будем называть направление вектора* $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv$. Само собой разумеется, что рассматривается регулярная параметризация S с помощью вектор-функции $\boldsymbol{r}(u, v)$.

Углом между направлениями $(du : dv)$ и $(\delta u : \delta v)$ *называется угол между векторами*

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv \quad \text{и} \quad \delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u \delta u + \boldsymbol{r}_v \delta v.$$

Если θ — угол между направлениями $(du : dv)$ и $(\delta u : \delta v)$, то

$$(d\boldsymbol{r}, \delta\boldsymbol{r}) = |d\boldsymbol{r}|\,|\delta\boldsymbol{r}|\cos\theta.$$

Так как

$$d\boldsymbol{r}^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

$$\delta\boldsymbol{r}^2 = E\,\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2,$$

$$(d\boldsymbol{r}, \delta\boldsymbol{r}) = E du\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + G\,dv\delta v,$$

то

$$\cos\theta = \frac{E\,du\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + G du\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\,\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}.$$

Будем говорить, что кривая L *на поверхности, заданной регулярной вектор-функцией* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, *в точке* (u, v) ***имеет направление*** $(du : dv)$, *если вектор* $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv$ *есть касательный вектор кривой в этой точке.*

Если кривая задана на поверхности внутренними уравнениями

$$u = u(t), \qquad v = v(t),$$

то в точке $(u(t), v(t))$ она, очевидно, имеет направление $(u'(t) : v'(t))$.

Пусть кривые L_1 и L_2 на поверхности S имеют общую точку X. ***Углом между этими кривыми*** *в точке* X *будем называть угол между направлениями этих кривых в точке* X. Легко видеть, что угол между кривыми на поверхности — это угол между касательными к кривым в точке пересечения, и потому он не зависит ни от способа параметризации поверхности, ни от способа параметризации кривых.

Выясним, чему равен угол между координатными линиями. Линии $v = \text{const}$ имеют направления $(du : 0)$, а линии $u = \text{const}$ —

направления $(0 : dv)$. Отсюда для угла θ между координатными линиями получаем формулу:

$$\cos\theta = \frac{F\,du\delta v}{\sqrt{Edu^2}\,\sqrt{G\delta v^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Отсюда следует, что *координатная сеть на поверхности будет ортогональна* (координатные линии пересекаются под прямым углом) *в том и только в том случае, когда* $F = 0$.

§ 7. Площадь поверхности

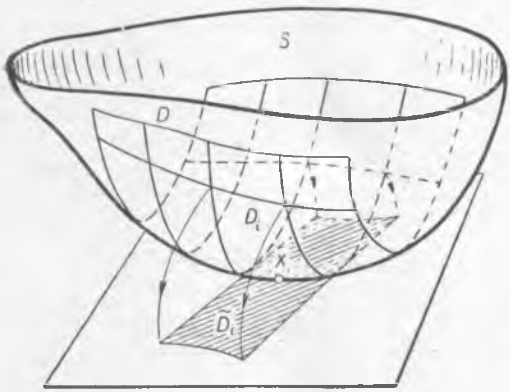


Рис. 154

Подробно вопрос о площади поверхности рассматривается в курсе математического анализа. Здесь мы ограничимся выводом формулы для площади области на поверхности в случае, когда поверхность задана с помощью регулярной параметризации $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$.

Напомним определение *площади области на поверхности*, которое используется в курсе математического анализа. Пусть S — регулярная поверхность и D — область на этой поверхности, ограниченная конечным числом регулярных кривых (см. рис. 154). Разобьем D на малые области регулярными кривыми, и пусть D_i — одна из таких областей. В области D_i берем произвольную точку X_i и спроектируем эту область на касательную плоскость в точке X_i. Если диаметр области D_i достаточно мал, то из теоремы 2 § 5 вытекает, что проектирование D_i на касательную плоскость есть взаимно однозначное отображение. Результат проектирования D_i на касательную плоскость есть некоторая область $\widetilde{D}_i$, причем граница $\widetilde{D}_i$ состоит из конечного числа регулярных кривых. Через $\sigma(\widetilde{D}_i)$ обозначим площадь области $\widetilde{D}_i$.

*Под **площадью области** D поверхности S будем понимать*

$$\lim \sum \sigma(\widetilde{D}_i),$$

где суммирование проводится по всем областям D_i, на которые разбита D, а предельный переход осуществляется при условии, что наибольший из диаметров областей D_i стремится к нулю.

Если регулярная поверхность допускает параметризацию с помощью явного уравнения

$$z = z(x, y),$$

где $z(x, y)$ — k раз непрерывно дифференцируемая функция ($k \geqslant 1$), заданная в простой области G_1, то, как известно из анализа, для площади любой области D поверхности S справедлива формула:

$$\sigma(D) = \iint\limits_{\widetilde{D}_1} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy;$$

здесь через $\widetilde{D}_1$ обозначена проекция D на плоскость x, y.

Пусть дана другая регулярная параметризация поверхности S:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v),$$

где $\boldsymbol{r}(u, v)$— k раз непрерывно дифференцируемая функция, заданная в простой области G на плоскости u, v. Пусть, далее,

$$f: \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

— регулярный гомеоморфизм между G и G_1, при котором

$$x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z(x(u, v), y(u, v))\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{r}(u, v). \qquad (*)$$

Тогда, используя формулу замены переменных под знаком двойного интеграла, получим:

$$\sigma(D) = \iint\limits_{\widetilde{D}_1} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy = \iint\limits_{\widetilde{D}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} dudv,$$

где $\widetilde{D}_1$ — образ области $\widetilde{D}$ при гомеоморфизме f.

Из соотношения (*), которое справедливо во всей области G, имеем:

$$[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v] = [x_u\boldsymbol{i} + y_u\boldsymbol{j} + (z_x x_u + z_y y_u)\,\boldsymbol{k},\ x_v\boldsymbol{i} + y_v\boldsymbol{j} + (z_x x_v + z_y y_v)\,\boldsymbol{k}] =$$

$$= \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} (-z_x\boldsymbol{i} - z_y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}).$$

Отсюда

$$|[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \left| \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right|.$$

С другой стороны,

$$|[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]|^2 = \boldsymbol{r}_u^2 \boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)^2 = EG - F^2.$$

Поэтому

$$\sigma(D)=\iint\limits_{\tilde D}\sqrt{EG-F^2}\,dudv.$$

Итак, *для площади любой области $D\subset S$ справедлива формула*

$$\sigma(D)=\iint\limits_{\tilde D}\sqrt{EG-F^2}\,dudv. \qquad (\ast\ast)$$

Формула $(\ast\ast)$ выведена в предположении, что поверхность S допускает параметризацию

$$x=x,\ y=y,\ z=z\ (x,\ y).$$

Оказывается, что это предположение не существенно, и формула $(\ast\ast)$ справедлива для любой регулярной поверхности, допускающей единую параметризацию $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\ (u,\ v)$. Доказательство этого факта можно провести непосредственно, опираясь на определение площади, как это делается в курсе анализа. На этом мы останавливаться не будем.

В заключение отметим, что *площадь области на поверхности есть аддитивная функция*. Действительно, пусть область D регулярными кривыми разбита на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек. Пусть, далее, областям D, D_1, D_2 в простой области G, где определена регулярная параметризация $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\ (u,\ v)$, соответствуют области $\tilde D$, $\tilde D_1$, $\tilde D_2$. Тогда

$$\sigma(D)=\iint\limits_{\tilde D}\sqrt{EG-F^2}\,dudv=\iint\limits_{\tilde D_1}\sqrt{EG-F^2}\,dudv+$$
$$+\iint\limits_{\tilde D_2}\sqrt{EG-F^2}\,dudv=\sigma(D_1)+\sigma(D_2).$$

Если поверхность допускает регулярную параметризацию в достаточно малой окрестности каждой своей точки, то вычисление площади малых частей поверхности можно проводить, используя аддитивность площади, с помощью специальных параметризаций этих частей.

§ 8. Вторая квадратичная форма поверхности

Пусть S — регулярная поверхность и $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\ (u,\ v)$ — ее регулярная параметризация. Через $\boldsymbol{n}\ (u,\ v)$, как и раньше, будем обозначать нормаль поверхности S в точке $X\ (u,\ v)$. Напомним, что

$$\boldsymbol{n}=\frac{[\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v]}{|[\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v]|}.$$

Второй квадратичной формой поверхности называется форма

$$\mathrm{II} = (-d\boldsymbol{r},\ d\boldsymbol{n}) = (-\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{n}_u)\,du^2 + ((-\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{n}_v) + (-\boldsymbol{r}_v,\ \boldsymbol{n}_u))\,du\,dv + (-\boldsymbol{r}_v,\ \boldsymbol{n}_v)\,dv^2.$$

Для коэффициентов этой формы вводятся специальные обозначения

$$(-\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{n}_u) = L,\quad (-\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{n}_v) + (-\boldsymbol{r}_v,\ \boldsymbol{n}_u) = 2M,$$
$$(-\boldsymbol{r}_v,\ \boldsymbol{n}_v) = N,$$

в которых вторая квадратичная форма принимает вид:

$$\mathrm{II} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

Так как $(d\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n}) = 0$ и, следовательно,

$$d(d\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n}) = (d^2\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n}) + (d\boldsymbol{r},\ d\boldsymbol{n}) = 0,$$

то

$$\mathrm{II} = (d^2\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{r}_{uu},\ \boldsymbol{n})\,du^2 + 2(\boldsymbol{r}_{uv},\ \boldsymbol{n})\,du\,dv + (\boldsymbol{r}_{vv},\ \boldsymbol{n})\,dv^2.$$

Следовательно,

$$L = (\boldsymbol{r}_{uu},\ \boldsymbol{n}),$$
$$M = (\boldsymbol{r}_{uv},\ \boldsymbol{n}),$$
$$N = (\boldsymbol{r}_{vv},\ \boldsymbol{n}).$$

В частности, если поверхность задана явным уравнением $z = z(x,\ y)$, то

$$L = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}},$$
$$M = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}},$$
$$N = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}.$$

§ 9. Кривизна кривой на поверхности

Пусть S — регулярная поверхность и L — регулярная кривая на ней. Пусть, далее, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\ (u,\ v)$ — регулярная параметризация поверхности S. В качестве параметра во внутренних уравнениях L

$$u = u\,(s),\qquad v = v\,(s),\qquad 0 \leqslant s \leqslant s\,(L),$$

возьмем естественный параметр s на L, т. е. длину переменной дуги L с одним фиксированным концом (см. гл. IV, § 6).

На L возьмем произвольную точку $X\ (u,\ v)$ и пусть $(du\colon dv)$ — направление L в этой точке.

Обозначим через

$$\boldsymbol{R}\,(s) = \boldsymbol{r}\ (u\,(s),\ v\,(s))$$

естественную параметризацию кривой L. Введем следующие обозначения:

$\boldsymbol{t}$ — единичный касательный вектор к L в точке X;

$\boldsymbol{m}$ — главная нормаль к L в той же точке;

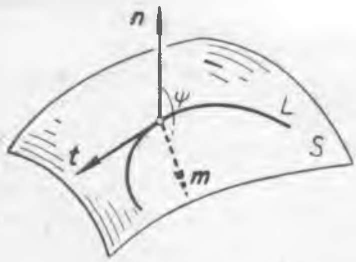


Рис. 155

$\varkappa$ — кривизна кривой L в точке X;

$\boldsymbol{n}$ — нормаль поверхности S в точке X;

ψ — угол между векторами $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{m}$ (см. рис. 155).

Из первой формулы Френе следует, что

$$\frac{d^2R}{ds^2} = \varkappa \boldsymbol{m}.$$

Тогда

$$\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}, \boldsymbol{n}\right) = \varkappa(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) = \varkappa|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|\cos\psi = \varkappa\cos\psi.$$

С другой стороны,

$$\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}, \boldsymbol{n}\right) = \left(\boldsymbol{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \right.$$

$$\left. + \boldsymbol{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \boldsymbol{r}_u\frac{d^2u}{ds^2} + \boldsymbol{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}, \boldsymbol{n}\right) =$$

$$= \frac{(\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{n})\,du^2 + 2(\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{n})\,dudv + (\boldsymbol{r}_{vv}, \boldsymbol{n})\,dv^2}{ds^2} =$$

$$= \frac{L\,du^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{E\,du^2 + 2F\,dudv + Gdv^2}.$$

Отсюда

$$\varkappa\cos\psi = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \qquad (*)$$

Величины L, M, N, E, F, G в точке $X(u, v)$ поверхности S определены однозначно, а

$$\frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{L\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2M\frac{du}{dv} + N}{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F\frac{du}{dv} + G};$$

поэтому правая часть равенства (*) зависит только от направления кривой L в точке $X(u, v)$. Таким образом,

$$\varkappa\cos\psi = \varkappa_0 = \mathrm{const}$$

в точке X (u, v) для всех кривых L, проходящих через точку X и имеющих в ней одно и то же направление, или, что то же, одну и ту же касательную.

Равенство

$$\varkappa \cos \psi = \varkappa_0$$

составляет содержание теоремы Менье.

Величина $\varkappa_0$ *называется* ***нормальной кривизной поверхности в данном направлении*** *$(du:dv)$ в точке X.*

Можно доказать, что *если пересечь поверхность S плоскостью, проходящей через нормаль поверхности в точке X, то в достаточно малой окрестности точки X пересечение будет плоской регулярной кривой. Эту регулярную кривую называют* ***нормальным сечением поверхности.*** *Нормальное сечение поверхности в точке X определяется однозначно тем направлением $(du:dv)$, которое оно содержит.*

Из теоремы Менье вытекает, что *величина* $\varkappa_0$ *есть с точностью до знака кривизна нормального сечения поверхности в точке X, имеющего в этой точке то же направление, что и кривая L.*

Действительно, если $\boldsymbol{m}_1$ — главная нормаль к нормальному сечению в точке X, то $\boldsymbol{m}_1 = \pm \boldsymbol{n}$. Поэтому угол ψ_1 между $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{n}$ равен нулю или π, и если $\varkappa_{\text{н}}$— кривизна нормального сечения, то

$$\varkappa_{\text{п}} = \pm \varkappa_{\text{н}}.$$

§ 10. Классификация точек поверхности. Главные направления. Средняя и гауссова кривизны

Для изучения поверхности в малой окрестности данной точки поверхности удобно перейти к параметризации

$$x = x,\ y = y,\ z = z\ (x,\ y),$$

где декартова система координат x, y, z выбирается так: оси x, y лежат в касательной плоскости к поверхности в данной точке, а ось z направлена по нормали поверхности в данной точке.

Как доказано в § 5, в такой системе координат малая окрестность точки задается уравнением

$$z = z\ (x,\ y),$$

причем

$$z\ (0,\ 0) = z_x\ (0,\ 0) = z_y\ (0,\ 0) = 0. \qquad (*)$$

Итак, пусть дана регулярная поверхность S. Возьмем на ней произвольную точку X и построим систему декартовых координат x, y, z указанным выше способом (см. рис. 156).

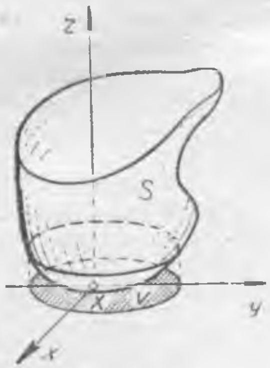


Рис. 156

Тогда начало системы координат совпадает с точкой X, и в малой окрестности V точки $(0, 0)$ на плоскости x, y достаточно малую окрестность точки X на поверхности S можно задать явным уравнением

$$z = z\ (x,\ y).$$

Как уже отмечалось, $z\ (x, y)$ — k раз непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая в начале координат условиям (*). Здесь и ниже мы будем предполагать, что $k \geqslant 2$.

Разлагая функцию $z\ (x, y)$ по формуле Тейлора в точке $(0, 0)$, будем иметь:

$$z(x,\ y) = \frac{1}{2}(z_{xx}(0,\ 0)\,x^2 + 2z_{xy}(0,\ 0)\,xy + z_{yy}(0,\ 0)\,y^2) + \\ + \varepsilon(x,\ y)\,(x^2 + y^2),$$

где

$$\lim_{x^2+y^2\to 0} \varepsilon\,(x,\ y) = 0.$$

Главной частью написанного разложения будет квадратичная форма

$$Z_0 = \frac{1}{2}(z_{xx}(0,\ 0)\,x^2 + 2z_{xy}(0,\ 0)\,xy + z_{yy}(0,\ 0)\,y^2).$$

График функции $Z_0\ (x, y)$ представляет собой параболоид. *Этот параболоид называется* ***соприкасающимся параболоидом поверхности*** S ***в точке*** X.

Очевидно, что все геометрические характеристики поверхности в точке X, зависящие от первых и вторых производных функции $z\ (x, y)$ в точке X, совпадают с соответствующими величинами для соприкасающегося параболоида. Такими величинами, например, являются коэффициенты первых и вторых квадратичных форм, нормальные кривизны в точке X, касательные плоскости в этой точке.

Отсюда следует, что *поверхность S в малой окрестности точки X отличается от соприкасающегося параболоида на величины более второго порядка малости по отношению к* $\sqrt{x^2 + y^2}$. Таким образом, качественное изучение поверхности в малой окрестности точки X сводится к изучению пространственной формы соприкасающегося параболоида.

До сих пор направления осей x и y в касательной плоскости были произвольными. Из аналитической геометрии известно, что надлежащим поворотом осей x и y в касательной плоскости уравнение соприкасающегося параболоида может быть приведено к виду

$$Z_0 = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2).$$

При этом, если $k_1 > k_2$, то направления осей x и y, в которых соприкасающийся параболоид имеет уравнение

$$Z_0 = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2),$$

определяются однозначно. Это утверждение будет доказано ниже, в § 11.

Направления в точке X, соответствующие координатным осям x и y, в которых соприкасающийся параболоид имеет уравнение

$$Z_0 = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2),$$

называются ***главными направлениями*** *в точке X.*

Нормальные сечения поверхности в точке X, проведенные в главных направлениях, называются ***главными нормальными сечениями***, *а нормальные кривизны поверхности, соответствующие главным направлениям, называются* ***главными нормальными кривизнами.***

Главные нормальные сечения соприкасающегося параболоида представляют собой параболы

$$Z_0 = \frac{1}{2}k_1x^2$$

и

$$Z_0 = \frac{1}{2}k_2y^2.$$

Кривизны этих сечений в точке X будут соответственно равны

$$\varkappa_1 = \frac{|Z_0''|}{(1 + |Z_{0x}'|^2)^{3/2}}\bigg|_{x=0} = |k_1|$$

и

$$\varkappa_2 = |k_2|.$$

Если $k_1 > 0$, то главная нормаль к параболе

$$Z_0 = \frac{1}{2}k_1x^2$$

совпадает с нормалью соприкасающегося параболоида; если же $k_1 < 0$, то угол между этими нормалями равен π. Из определения нормальной кривизны поверхности в данном направлении (см. § 9) вытекает тогда, что в главном направлении соприкасающегося параболоида, отвечающего направлению оси x, число k_1 будет главной нормальной кривизной. Но, так как у поверхности S и ее соприкасающегося параболоида в общей точке X одинаковые нормальные кривизны, то k_1 будет также главной нормальной кривизной поверхности S в точке X в направлении оси x.

Аналогично k_2 есть нормальная кривизна поверхности S в точке X в направлении, определяемом осью y.

Величины

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

и

$$K = k_1 k_2$$

называются соответственно ***средней и гауссовой кривизной поверхности S в точке X***. Средняя и гауссова кривизны есть функции точки поверхности S.

Рассмотрим классификацию точек поверхности в зависимости от знака гауссовой кривизны.

1. *Пусть в точке X регулярной поверхности S гауссова кривизна $K > 0$.* Тогда в этой точке одновременно главные нормальные кривизны k_1 и k_2 или обе положительны, или обе отрицательны. В обоих случаях соприкасающийся параболоид

$$Z_0 = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2)$$

эллиптический. В первом случае он, касаясь плоскости xy в своей вершине, лежит над этой плоскостью, а во втором, касаясь той же плоскости в своей вершине, лежит под ней. Достаточно малая окрестность точки X на поверхности S устроена в пространстве так же, как соприкасающийся параболоид, поэтому в малой окрестности точки X поверхность S имеет вид, изображенный на рис. 157.

Точки, в которых гауссова кривизна $K > 0$, называются ***эллиптическими точками поверхности***. Отметим еще раз, что достаточно малая окрестность эллиптической точки поверхности *лежит по одну сторону от касательной плоскости в этой точке и, кроме точки касания, не имеет с касательной плоскостью общих точек.*

2. *Пусть в точке X регулярной поверхности S гауссова кривизна $K < 0$.* Тогда в этой точке главные нормальные кривизны k_1 и k_2 отличны от нуля и имеют разные знаки. В этом случае соприкасающийся параболоид — гиперболический, и касательная плоскость пересекает его по паре прямых, угол между которыми отличен от нуля. Поэтому малая окрестность точки X на поверхности S имеет вид седла. Касательная плоскость в точке X пересекает эту окрестность по паре кривых, пересекаю-

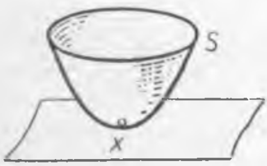


Рис. 157

щихся в точке X и составляющих друг с другом ненулевой угол (см. рис. 158). Окрестность расположена по обе стороны от касательной плоскости в точке X.

Точки поверхности S, где $K < 0$, называются ***гиперболическими.***

3. *Пусть в точке X регулярной поверхности S гауссова кривизна $K = 0$. Точки S, где $K = 0$, называют* ***параболическими.*** В параболической точке или одна из главных нормальных кривизн, скажем k_1, равна нулю, либо обе главные нормальные кривизны равны нулю: $k_1 = k_2 = 0$.

В первом случае малая окрестность точки X имеет вид куска параболического цилиндра

$$Z_0 = \frac{1}{2} k_1 x^2$$

(см. рис. 159).

Во втором случае точка X называется *точкой уплощения*, и в малой ее окрестности поверхность может иметь весьма сложное строение. На рис. 160 изображена окрестность точки уплощения, имеющая вид так называемого «обезьяньего седла». Исследование строения поверхности в малой окрестности точки уплощения связано с рассмотрением производных функции $z(x, y)$ третьего и более высоких порядков.

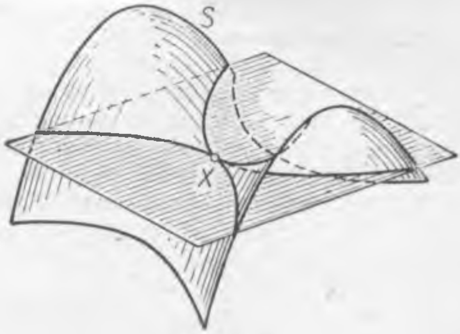


Рис. 158

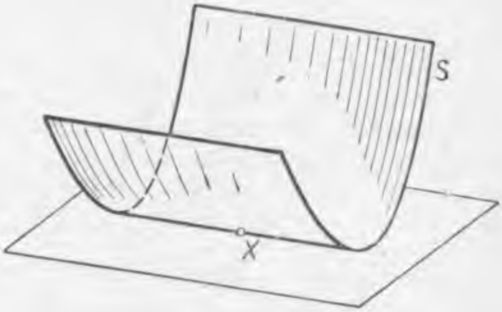


Рис. 159

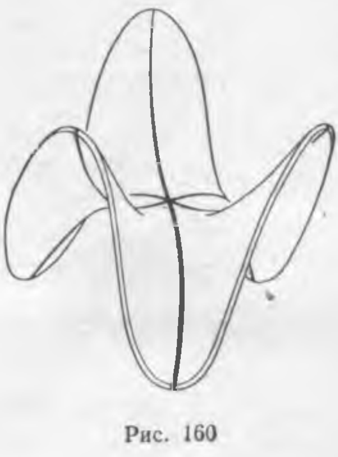


Рис. 160

§ 11. Теорема Эйлера. Экстремальные свойства главных направлений

Пусть S — регулярная поверхность и X — произвольная точка на ней. Пусть, далее, x, y, z — система декартовых координат в пространстве, для которой начало совпадает с точкой X, оси x и y расположены в касательной плоскости к S в точке X и идут в главных направлениях в этой точке, и, наконец, ось z направлена по нормали $\boldsymbol{n}$ в точке X.

Тогда достаточно малая окрестность точки X на S представима явным уравнением

$$z = z(x,\ y) = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2) + \varepsilon(x,\ y)(x^2 + y^2),$$

причем

$$\lim_{x^2+y^2 \to 0} \varepsilon(x,\ y) = 0.$$

В точке X у поверхности S и соприкасающегося параболоида совпадают первые и вторые квадратичные формы.

Пользуясь уравнением соприкасающегося параболоида

$$Z_0 = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2),$$

находим коэффициенты первой и второй квадратичной форм поверхности S в точке X:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1,$$
$$L = k_1, \quad M = 0, \quad N = k_2.$$

Отсюда в точке X квадратичные формы имеют вид:

$$\mathrm{I} = dx^2 + dy^2,$$
$$\mathrm{II} = k_1dx^2 + k_2dy^2.$$

Проведем теперь нормальное сечение S, составляющее в точке X с первым главным направлением угол φ. Если $(dx : dy)$ — направление этого сечения, то (см. рис. 161)

$$\cos\varphi = \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Используя формулу для нормальной кривизны в направлении $(dx : dy)$, имеем:

$$k = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{k_1dx^2 + k_2dy^2}{dx^2 + dy^2} = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi.$$

Соотношение

$$k = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi$$

называется ***формулой Эйлера***. Оно и составляет содержание теоремы Эйлера.

Теорема 1 (теорема Эйлера). *Нормальная кривизна k в точке X поверхности S в направлении, составляющем угол φ с первым главным направлением, равна*

$$k = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi,$$

где k_1 и k_2 — главные нормальные кривизны S в точке X.

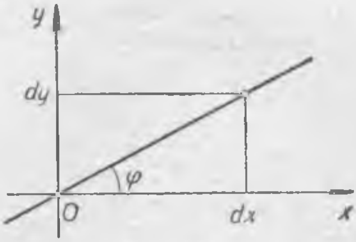


Рис. 161

Теорема 2. *Главные направления в данной точке X регулярной поверхности S— это те направления, в которых нормальные кривизны достигают экстремумов.*

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1. $k_1 \neq k_2$ и пусть для определенности $k_1 > k_2$. Тогда для направления, составляющего угол φ с первым главным направлением, имеем:

$$k = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi = k_1 (1 - \sin^2 \varphi) + k_2 \sin^2 \varphi.$$

Отсюда

$$k = k_1 - (k_1 - k_2) \sin^2 \varphi.$$

Ясно, что наибольшее значение k достигается при $\varphi = 0, \pi$, а наименьшее — при $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Следовательно, экстремумы нормальных кривизн достигаются в главных направлениях, и они равны соответственно k_1 и k_2.

2. $k_1 = k_2$. Тогда для любого направления

$$k = k_1 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = k_1.$$

В этом случае все направления между собой равноправны, и поэтому любое направление считается главным. В точке, где $k_1 = k_2$, имеем нестрогий экстремум нормальных кривизн.

Теорема доказана.

Итак, точки регулярной поверхности могут быть только двух типов:

1. *В точке существуют два различных главных направления. В такой точке главные нормальные кривизны не равны между собой.*

2. *Все направления в точке главные. В такой точке главные нормальные кривизны равны между собой*

§ 12. Нахождение главных направлений. Формулы для гауссовой и средней кривизн

Пусть, по-прежнему, S—регулярная поверхность и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ — ее регулярная параметризация. Возьмем на S произвольную точку X (u, v). Пусть $(du : dv)$— произвольное направление в точке X. Тогда нормальная кривизна в точке X, соответствующая этому направлению, выражается формулой:

$$k = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}.$$

Нахождение главных направлений сводится к тому, чтобы найти отношения $(du : dv)$, в которых нормальная кривизна, или, что то же, отношение второй квадратичной формы к первой, достигает экстремумов.

Для удобства проведения выкладок положим

$$\xi = du, \quad \eta = dv.$$

Тогда направление в точке X характеризуется отношением $(\xi : \eta)$, причем $\xi^2 + \eta^2 \neq 0$. Формула для нормальной кривизны принимает вид:

$$k = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2}.$$

Так как в главных направлениях нормальная кривизна принимает экстремальные значения, то

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial \xi} &= \frac{2(L\xi + M\eta)\cdot \mathrm{I} - 2(E\xi + F\eta)\,\mathrm{II}}{\mathrm{I}^2} = 0, \\ \frac{\partial k}{\partial \eta} &= \frac{2(M\xi + N\eta)\,\mathrm{I} - 2(F\xi + G\eta)\,\mathrm{II}}{\mathrm{I}^2} = 0. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Систему соотношений (1) удобно записать так:

$$\left\{\begin{aligned} L\xi + M\eta &= \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}(E\xi + F\eta), \\ M\xi + N\eta &= \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}(F\xi + G\eta). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Исключая из этих соотношений $\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$, получим:

$$\begin{vmatrix} L\xi + M\eta & E\xi + F\eta \\ M\xi + N\eta & F\xi + G\eta \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, имеем:

$$(LF - ME)\xi^2 + (LG - NE)\xi\eta + (MG - NF)\eta^2 = 0. \tag{3}$$

Написанное равенство представляет собой уравнение второго порядка относительно отношения $(\xi : \eta)$, корни этого уравнения как раз и определяют главные направления поверхности S в точке X. Уравнение (3) удобно также записывать в виде определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} -\eta^2 & \xi\eta & -\xi^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Если вместо ξ и η подставить их выражения du и dv, то уравнение для нахождения главных направлений будет иметь вид:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} -dv^2 & dudv & -du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Могут представиться два случая:

1. В точке $X(u, v)$ имеем:

$$\frac{E}{L} = \frac{F}{M} = \frac{G}{N}.$$

Тогда определитель тождественно равен нулю для любого направления $(du : dv)$, т. е. все направления главные.

2. Если это условие не выполнено, то в уравнении

$$(LF - ME)\,du^2 + (LG - NE)\,dudv + (MG - NF)\,dv^2 = 0 \qquad (5)$$

хотя бы один из коэффициентов не равен нулю. Пусть, например,

$$MG - NF \neq 0.$$

Тогда, записывая уравнение (5) в виде

$$(LF - ME) + (LG - NE)\frac{dv}{du} + (MG - NF)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0$$

и решая это квадратное уравнение, находим два главных направления в точке X. Если же в уравнении (5) коэффициенты при du^2 и dv^2 оба равны нулю, то $LG - NE \neq 0$ и уравнение (5) сводится к

$$(LG - NE)\,dudv = 0.$$

Отсюда главные направления суть $(du : 0)$ и $(0 : dv)$.

Итак, указан способ нахождения главных направлений.

Пусть теперь $(du : dv)$ определяет главное направление. Напомним, что $k = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$. Поэтому для главной нормальной кривизны, отвечающей этому направлению, справедлива формула

$$k = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2},$$

причем

$$du^2 + dv^2 \neq 0.$$

Систему уравнений (2) можно записать в виде:

$$\begin{cases} Ldu + Mdv - k(Edu + Fdv) = 0, \\ Mdu + Ndv - k(Fdu + Gdv) = 0. \end{cases}$$

Приводя в левых частях подобные члены, будем иметь:

$$\begin{cases} (L - kE)\,du + (M - kF)\,dv = 0, \\ (M - kF)\,du + (N - kG)\,dv = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Система уравнений (6) есть система линейных однородных уравнений относительно du и dv, имеющая ненулевое решение (в каждой точке поверхности есть главные направления). Поэтому

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение для определения главных нормальных кривизн поверхности в данной точке:

$$(EG - F^2) k^2 + (2MF - EN - LG) k + (LN - M^2) = 0.$$

Пользуясь формулами Виета, получаем выражения гауссовой и средней кривизн через коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности:

$$K = k_1 \cdot k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

$$2H = k_1 + k_2 = \frac{EN - 2MF + LG}{EG - F^2}.$$

§ 13. Линии кривизны. Теорема Родрига

1. **Необходимые и достаточные условия того, что координатные линии в данной точке поверхности направлены по главным направлениям.** Пусть в данной точке X регулярной поверхности S координатные линии направлены по главным направлениям, тогда в этой точке

$$F = M = 0.$$

Действительно,

$$F = 0,$$

так как главные направления ортогональны. Из уравнения для нахождения главных направлений

$$(LF - ME)du^2 + (LG - NE)dudv + (MG - NF)dv^2 = 0$$

имеем:

$$LF - ME = 0, \qquad (*)$$

так как на первом главном направлении $du \neq 0$ и $dv = 0$, и

$$MG - NF = 0, \qquad \binom{*}{*}$$

так как на втором главном направлении $du = 0$, $dv \neq 0$. Так как $EG - F^2 > 0$ и $F = 0$, то из соотношений (*) и $\binom{*}{*}$ следует, что $M = 0$.

Пусть теперь в точке X имеем

$$F = M = 0;$$

докажем, что в этой точке координатные линии направлены по главным направлениям.

Действительно, в уравнении для нахождения главных направлений коэффициенты при du^2 и dv^2 равны нулю, и это уравнение сводится к следующему:

$$(LG - NE)dudv = 0.$$

Отсюда ясно, что если

$$LG - NE \neq 0,$$

то координатные линии направлены по главным направлениям. Если же $LG - NE = 0$, то вместе с условиями

$$F = M = 0$$

получаем, что в данной точке определитель

$$\begin{vmatrix} -dv^2 & dudv & -du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}$$

равен нулю для любого направления. Следовательно, любое направление главное, и, стало быть, координатные линии в точке X направлены по главным направлениям.

В точке, где координатные линии направлены по главным направлениям, первая и вторая квадратичные формы имеют вид:

$$\mathrm{I} = ds^2 = Edu^2 + Gdv^2,$$
$$\mathrm{II} = Ldu^2 + Ndv^2.$$

2. Линии кривизны. *Кривая L на регулярной поверхности S называется* ***линией кривизны****, если она в каждой точке направлена по какому-нибудь главному направлению.*

Другими словами, в любой точке линии кривизны касательная направлена по какому-нибудь главному направлению поверхности в этой точке.

Точка, в которой все направления главные, называется ***омбилической точкой поверхности.*** Ниже мы будем рассматривать поверхность без омбилических точек. Отметим без доказательства, что систему внутренних координат на такой поверхности можно выбрать так, чтобы координатными линиями были линии кривизны. В такой координатной сети на поверхности

$$F = M = 0$$

и, следовательно, на всей поверхности первая и вторая квадратичные формы имеют вид:

$$\mathrm{I} = Edu^2 + Gdv^2,$$
$$\mathrm{II} = Ldu^2 + Ndv^2.$$

Для главных нормальных кривизн, гауссовой и средней кривизн справедливы формулы:

$$k_1 = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{N}{G},$$
$$K = \frac{LN}{EG}, \ \ 2H = \frac{LG + EN}{EG}.$$

3. Теорема Родрига. *Если в точке X регулярной поверхности S координатные линии направлены по главным направлениям, то*

$$\boldsymbol{n}_u = -k_1\boldsymbol{r}_u, \ \ \boldsymbol{n}_v = -k_2\boldsymbol{r}_v.$$

Доказательство. Так как нормаль поверхности $\boldsymbol{n}$ есть вектор-функция единичной длины, то векторы $\boldsymbol{n}_u$ и $\boldsymbol{n}_v$ перпендикулярны $\boldsymbol{n}$. Поэтому в точке X векторы $\boldsymbol{n}_u$ и $\boldsymbol{n}_v$ лежат в касательной плоскости к S в этой точке. Отсюда

$$\boldsymbol{n}_u = \alpha\boldsymbol{r}_u + \beta\boldsymbol{r}_v,$$
$$\boldsymbol{n}_v = \gamma\boldsymbol{r}_u + \delta\boldsymbol{r}_v.$$

Докажем, что

$$\alpha = -k_1 \ \text{и} \ \beta = 0.$$

Так как главные направления ортогональны, то

$$F = 0,$$

и мы имеем:

$$(\boldsymbol{r}_u, \ \boldsymbol{n}_u) = \alpha\boldsymbol{r}_u^2 + \beta(\boldsymbol{r}_u, \ \boldsymbol{r}_v) = \alpha E + \beta F = \alpha E,$$
$$(\boldsymbol{r}_v, \ \boldsymbol{n}_u) = \alpha(\boldsymbol{r}_v, \ \boldsymbol{r}_u) + \beta\boldsymbol{r}_v^2 = \alpha F + \beta G = \beta G.$$

Так как

$$(\boldsymbol{r}_u, \ \boldsymbol{n}) = 0, \quad (\boldsymbol{r}_v, \ \boldsymbol{n}) = 0,$$

то

$$(\boldsymbol{r}_u, \ \boldsymbol{n}_u) = -(\boldsymbol{r}_{uu}, \ \boldsymbol{n}),$$
$$(\boldsymbol{r}_v, \ \boldsymbol{n}_u) = -(\boldsymbol{r}_{uv}, \ \boldsymbol{n}),$$

и, следовательно, (см. § 8 гл. V)

$$(\boldsymbol{r}_u, \ \boldsymbol{n}_u) = -L,$$
$$(\boldsymbol{r}_v, \ \boldsymbol{n}_u) = -M = 0,$$

Отсюда

$$\alpha = -\frac{L}{E} = -k_1, \quad \beta = -\frac{M}{G} = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\gamma = 0, \ \ \delta = -k_2.$$

Теорема доказана.

§ 14. Сферическое изображение поверхности

Пусть S — регулярная поверхность и S_0 — сфера радиуса единица с центром в начале координат. *Отображение поверхности S в сферу S_0, осуществляемое вектор-функцией*

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(u, v) = \frac{[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]}{|[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]|},$$

называется ***сферическим изображением поверхности*** S. При сферическом изображении каждая точка $X \in S$ имеет своим образом на сфере S_0 точку $\overline{X}$, в которой касательная плоскость к S_0 параллельна касательной плоскости к S в точке X. *Точка $\overline{X}$ называется* ***сферическим изображением точки*** X.

На сферическое изображение можно так же смотреть, как на поверхность, заданную вектор-функцией

$$\boldsymbol{n}(u, v) = \frac{[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]}{|[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]|}.$$

Все точки этой поверхности лежат на сфере S_0 (см. рис. 162).

Пусть X — некоторая точка поверхности S и U — ее окрестность, тогда на сфере S_0 окрестности U соответствует некоторое множество $\overline{U}$. *Площадь множества $\overline{U}$ на сфере называется* ***площадью сферического изображения*** U. *Ее будем обозначать через* $\omega(U)$.

Имеет место следующая

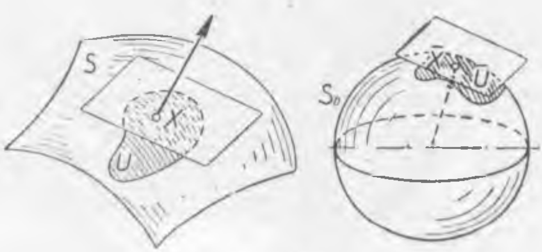


Рис. 162

Теорема Гаусса. *Если диаметр d области U стремится к нулю, то*

$$\lim_{d \to 0} \frac{\omega(U)}{\sigma(U)} = |K(X)|,$$

где $\sigma(U)$ — площадь области U, а $K(X)$ — гауссова кривизна S в точке X.

Доказательство. Будем считать, что в окрестности U точки X в качестве координатных линий взяты линии кривизны.

Тогда

$$\omega(U)=\iint_U |[\boldsymbol{n}_u, \boldsymbol{n}_v]|\,du dv.$$

По теореме Родрига имеем:

$$\boldsymbol{n}_u=-k_1\boldsymbol{r}_u,$$
$$\boldsymbol{n}_v=-k_2\boldsymbol{r}_v.$$

Поэтому

$$|[\boldsymbol{n}_u, \boldsymbol{n}_v]|=|k_1k_2|\,|[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]|=|K|\,|[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]|.$$

Следовательно,

$$\frac{\omega(U)}{\sigma(U)}=\frac{\iint_U |K|\,|[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]|du dv}{\sigma(U)}=|K(X')|\frac{\iint_U |[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]|\,du dv}{\sigma(U)}=$$
$$=|K(X')|\frac{\sigma(U)}{\sigma(U)}=|K(X')|,$$

где X' — некоторая точка, лежащая в окрестности U. Если диаметр d окрестности U стремится к нулю, то точка X' стремится к точке X и, пользуясь непрерывностью гауссовой кривизны как функции точки поверхности S, получаем:

$$\lim_{d\to 0}\frac{\omega(U)}{\sigma(U)}=|K(X)|.$$

Теорема доказана.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ V

1. Найти уравнения касательных плоскостей к поверхностям второго порядка:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{(эллипсоид)},$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{(однополостной гиперболоид)},$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad \text{(двуполостной гиперболоид)}$$

в точке (x_0, y_0, z_0).

Ответ. Для эллипсоида

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1.$$

2. Составить уравнение касательной плоскости к сфере

$$\begin{cases} x = a\cos v \sin u, \\ y = a \cos v \cos u, \\ z = a \sin u \end{cases}$$

в произвольной точке.

3. Доказать, что все касательные плоскости поверхности

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

проходят через начало координат.

4. Доказать, что все нормали поверхности

$$\begin{cases} x = \varphi(u)\cos v, \\ y = \varphi(u)\sin v, \\ z = \psi(u) \end{cases}$$

пересекают ось z.

5. Найти первую квадратичную форму поверхности

$$\begin{cases} x = \varphi(u)\cos v, \\ y = \varphi(u)\sin v, \\ z = \psi(u). \end{cases}$$

Ответ. $ds^2 = (\varphi'^2 + \psi'^2)\,du^2 + \varphi^2 dv^2$.

6. Доказать, что поверхность вращения допускает параметризацию u, v, при которой ее первая квадратичная форма имеет вид:

$$ds^2 = du^2 + G(u)\,dv^2.$$

7. Найти угол, под которым пересекаются координатные линии $x = x_0$, $y = y_0$ на поверхности $z = axy$.

Ответ.

$$\cos\varphi = \frac{a^2x_0y_0}{\sqrt{1+a^2x_0^2}\;\sqrt{1+a^2y_0^2}}.$$

8. Поверхность

$$\begin{cases} x = au\cos v, \\ y = au\sin v, \\ z = bv \end{cases}$$

называется геликоидом.

1) Доказать, что координатная сеть u, v на геликоиде ортогональна.

2) Найти площадь четырехугольника, ограниченного кривыми

$$u = 0, \quad u = \frac{k}{a},$$

$$v = 0, \; v = 1.$$

Ответ. $\sigma = \frac{b}{2}\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right)$.

9. Найти семейство кривых, пересекающих под прямым углом прямолинейные образующие $x = \mathrm{const}$ гиперболоида $z = axy$.

Ответ. $(1 + x^2y^2)\, y = \mathrm{const}$.

10. Доказать, что площади областей на параболоидах

$$z = \frac{a}{2}(x^2 + y^2),$$
$$z = axy,$$

имеющих одну и ту же проекцию на плоскость x, y, равны.

11. Найти вторую квадратичную форму поверхности

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = v. \end{cases}$$

Ответ. $\frac{2du dv}{u}$.

12. Найти нормальную кривизну параболоида

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$$

в точке $(0, 0)$ в направлении $(dx : dy)$.

Ответ. $k = \frac{adx^2 + bdy^2}{dx^2 + dy^2}$.

13. Найти уравнение соприкасающегося параболоида к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

в точке $(0, 0, c)$

Ответ. $z = c\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right)$.

14. Доказать, что при проективном (в частности, при аффинном) преобразовании свойство точки быть эллиптической, гиперболической или точкой уплощения сохраняется.

15. Доказать, что если край поверхности целиком лежит в некоторой плоскости, то либо эта поверхность есть область на плоскости, либо на ней есть эллиптические точки.

16. Доказать, что на замкнутой поверхности всегда есть эллиптические точки.

17. Доказать, что если все нормали поверхности пересекают некоторую прямую, то поверхность является поверхностью вращения.

18. На геликоиде

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = cv \end{cases}$$

определить линии кривизны. Доказать, что средняя кривизна этой поверхности во всех точках равна нулю.

Ответ. $\ln(u + \sqrt{u^2+c^2}) - v = \text{const}$,

$\ln(u + \sqrt{u^2+v^2}) + v = \text{const}$.

19. Найти линии кривизны гиперболоида

$$z = axy,$$

и в точке $x = y = 0$ определить его среднюю и гауссову кривизны.

Ответ. $\ln(ay \pm \sqrt{1+a^2y^2}) + \ln(ax \pm \sqrt{1+a^2x^2}) = \text{const}$,

$$K = -a^2, \ H = 0.$$

20. Поверхность Φ называется *параллельной* поверхности F, если она является геометрическим местом концов отрезков постоянной длины, отложенных на нормалях поверхности F. *Соответствующими* точками поверхностей Φ и F называем концы отрезков, о которых шла речь в определении. Доказать, что:

1) касательные плоскости в соответствующих точках Φ и F параллельны;

2) свойство параллельности взаимно (т. е. если Φ параллельна F, то и F параллельна Φ);

3) линиям кривизны на F соответствуют линии кривизны на Φ.

21. Вывести формулы для средней и гауссовой кривизн параллельной поверхности через среднюю и гауссову кривизны данной поверхности и расстояние между поверхностями.

22. Найти в квадратурах все поверхности вращения с постоянной гауссовой кривизной.

23. Определить величину

$$\iint\limits_{\Phi} |K| \, d\sigma,$$

где K — гауссова кривизна поверхности Φ, $d\sigma$ — элемент площади Φ, в предположении, что

1) Φ — эллипсоид,
2) Φ — эллиптический параболоид,
3) Φ — тор.

Ответ. 4π, 2π, 4π.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Гаусса, § 14.

§§ 1, 2, 9, 10

§ 1. Изометричные поверхности. Изгибание поверхности

Две регулярные поверхности S_1 и S_2 называются ***изометричными,*** *если между их точками может быть установлено взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие между собой кривые имеют одинаковые длины.*

Предположим теперь, что обе поверхности S_1 и S_2 допускают регулярные параметризации $\boldsymbol{r}_1(u, v)$ и $\boldsymbol{r}_2(u, v)$, причем вектор-функции $\boldsymbol{r}_1(u, v)$ и $\boldsymbol{r}_2(u, v)$ заданы в одной и той же области G плоскости u, v, и точки, соответствующие при изометрическом отображении между S_1 и S_2, имеют одинаковые внутренние координаты. Тогда в соответствующих между собой точках поверхностей S_1 и S_2 первые квадратичные формы совпадают. Другими словами, при всех $(u, v) \in G$ имеют место равенства:

$$\begin{aligned} E_1(u, v) &= E_2(u, v), \\ F_1(u, v) &= F_2(u, v), \\ G_1(u, v) &= G_2(u, v). \end{aligned}$$

Действительно, пусть (u_0, v_0) — произвольная точка области G. Рассмотрим три пути

$$l'_\varepsilon : \begin{cases} u = \tau + u_0, \\ v = v_0; \end{cases} \qquad l''_\varepsilon : \begin{cases} u = u_0, \\ v = \tau + v_0; \end{cases}$$

$$l'''_\varepsilon : \begin{cases} u = \tau + u_0, \\ v = \tau + v_0; \end{cases} \qquad \tau \in [-\varepsilon, +\varepsilon];$$

здесь $\varepsilon > 0$ — некоторое положительное число, подобранное так, чтобы все пути l'_ε, l''_ε, l'''_ε лежали в области G. На всех трех путях точке (u_0, v_0) отвечает значение параметра, равное нулю.

Обозначим через L'_1, L''_1, L'''_1 и L'_2, L''_2, L'''_2 кривые на поверхностях S_1 и S_2, для которых пути l'_ε, l''_ε, l'''_ε являются их внутренними регулярными параметризациями. Кривые L_1' и L'_2, L''_1 и L''_2, L'''_1 и L'''_2 соответствуют друг другу при изометрическом соответствии. Поэтому при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sqrt{E_1(\tau + u_0,\ v_0)}\, d\tau = s(L_1') = s(L_2') = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sqrt{E_2(\tau + u_0, v_0)}\, d\tau,$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sqrt{G_1(u_0,\ \tau + v_0)}\, d\tau = s(L_1'') = s(L_2'') = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sqrt{G_2(u_0, \tau + v_0)}\, d\tau,$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sqrt{E_1 + 2F_1 + G_1}\, d\tau = s(L_1''') = s(L_2''') = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sqrt{E_2 + 2F_2 + G_2}\, d\tau.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sqrt{E_1(u_0 + \tau,\ v_0)}\, d\tau = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sqrt{E_2(u_0 + \tau, v_0)}\, d\tau,$$

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sqrt{G_1} d\tau = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sqrt{G_2} d\tau,$$

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sqrt{E_1 + 2F_1 + G_1} d\tau = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sqrt{E_2 + 2F_2 + G_2} d\tau.$$

Устремляя в этих равенствах ε к нулю и переходя к пределу, получаем:

$$E_1(u_0,\ v_0) = E_2(u_0,\ v_0),\ F_1(u_0,\ v_0) = F_2(u_0,\ v_0),$$
$$G_1(u_0,\ v_0) = G_2(u_0,\ v_0).$$

Так как точка $(u_0,\ v_0)$ была взята произвольно в области G, то всюду в G имеем:

$$E_1(u,\ v) = E_2(u,\ v),\ F_1(u,\ v) = F_2(u,\ v),$$
$$G_1(u,\ v) = G_2(u,\ v).$$

Непосредственно из определения изометричных поверхностей вытекает, что если в одной и той же простой области G заданы две вектор-функции $\boldsymbol{r}_1(u,\ v)$ и $\boldsymbol{r}_2(u,\ v)$, являющиеся регулярными параметризациями поверхностей S_1 и S_2, и при всех $(u,\ v) \in G$ коэффициенты первых квадратичных форм S_1 и S_2 совпадают:

$$E_1(u,\ v) = E_2(u,\ v),$$
$$F_1(u,\ v) = F_2(u,\ v),$$
$$G_1(u,\ v) = G_2(u,\ v),$$

то отображение S_1 на S_2, переводящее точку X_1 в точку X_2 с теми же внутренними координатами $u,\ v$, является изометрическим.

С понятием изометричных поверхностей тесно связан вопрос об изгибании поверхностей. Говорят, *что регулярная поверхность*

*S_1 получена **изгибанием** регулярной поверхности S_0, если существует семейство регулярных поверхностей S_t, зависящих от параметра $t \in [0,1]$ регулярно, и таких, что при всех $t \in [0, 1]$ поверхности S_t изометричны друг другу, и, наконец, при $t = 0$ S_t совпадает с S_0, а при $t = 1$ S_t совпадает с S_1.*

Аналитически процесс изгибания удобно описывать так. Пусть G — некоторая простая область на плоскости u, v и пусть регулярные вектор-функции $\boldsymbol{r}_0(u, v)$ и $\boldsymbol{r}_1(u, v)$, заданные в G, являются параметризациями S_0 и S_1. Тогда если существует вектор-функция $\boldsymbol{r}(u, v, t)$, заданная при всех $(u, v) \in G$ и $t \in [0, 1]$ и k раз непрерывно дифференцируемая по всем переменным u, v, t, такая, что:

1) При каждом фиксированном $t_0 \in [0, 1]$ вектор-функция

$$\boldsymbol{r}_{t_0}(u, v) = \boldsymbol{r}(u, v, t_0)$$

является параметризацией некоторой регулярной поверхности S_{t_0};

2) отображение поверхности S_{t_1} на S_{t_2}, переводящее точку $X_1 \in S_{t_1}$, в точку $X_2 \in S_{t_2}$ с теми же внутренними координатами, является изометрическим;

3) поверхность $S_{t/t=0}$ совпадает с S_0, а $S_{t/t=1}$ совпадает с S_1, т. е.

$$\boldsymbol{r}_0(u, v) = \boldsymbol{r}(u, v, 0), \quad \boldsymbol{r}_1(u, v) = \boldsymbol{r}(u, v, 1),$$

то поверхность S_0 переводится в S_1 изгибанием.

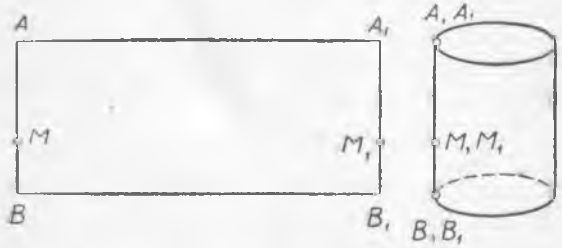


Рис. 163

В качестве примера можно привести изгибание прямоугольного листа бумаги в боковую поверхность прямого кругового цилиндра (см. рис. 163, при этом происходит отождествление точек отрезков AB и A_1B_1). Наглядно изгибание легко себе представить как процесс, при котором форма поверхности в пространстве меняется, но при этом не происходит ни растяжений, ни сжатий материала, из которого изготовлена поверхность. С помощью процесса изгибания легко строится большое количество разнообразных изометричных, но не равных между собой регулярных поверхностей.

§ 2. Внутренняя геометрия поверхности

Рассмотрение изометричных поверхностей указывает на целесообразность изучения свойств поверхности и фигур на ней, которые зависят только от длин кривых на поверхности. *Отдел геометрии, в котором изучаются эти свойства, называется* ***внутренней геометрией поверхности.*** Как было выяснено в § 1 гл. VI, понятие изометричных поверхностей удобно формулировать в терминах первой квадратичной формы поверхности. Поэтому внутреннюю геометрию регулярных поверхностей можно также рассматривать как отдел геометрии, в котором изучаются свойства поверхностей и фигур на ней, определяемые первой квадратичной формой.

Из результатов §§ 6, 7 гл. V вытекает, что к внутренней геометрии относятся длины кривых на поверхности, углы между кривыми, площади областей.

Ниже будут исследованы новые важные понятия, связанные с первой квадратичной формой поверхности. Тем самым будут указаны новые объекты внутренней геометрии поверхности.

В заключение отметим, что в процессе изгибания поверхности ее внутренняя геометрия остается неизменной.

§ 3. Формула для гауссовой кривизны

Гауссом была получена замечательная формула, выражающая гауссову кривизну поверхности только через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные. Таким образом, гауссова кривизна есть объект внутренней геометрии поверхности.

Приступим к выводу формулы Гаусса.

В § 12 гл. V для гауссовой кривизны была получена формула

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Так как

$$L = (\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{n}), \; M = (\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{n}), \; N = (\boldsymbol{r}_{vv}, \boldsymbol{n}),$$

а

$$\boldsymbol{n} = \frac{[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]}{|[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]|} = \frac{[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}},$$

то для коэффициентов второй квадратичной формы справедливы следующие формулы:

$$L = \frac{(\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{(\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$N = \frac{(\boldsymbol{r}_{vv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Отсюда

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \{(\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{r}_{vv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v) - (\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)^2\}.$$

Дальнейшее основано на следующей лемме.

Лемма. *Справедливо тождество*

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1)(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_2) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{c}_2) \\ (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) & (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_2) \\ (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{b}_2) & (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Пусть h^1, h^2, h^3 — проекции вектора $\boldsymbol{h}$ на оси x, y, z. Тогда

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 \\ c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 \end{vmatrix}, \quad (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_2) = \begin{vmatrix} a_2^1 & b_2^1 & c_2^1 \\ a_2^2 & b_2^2 & c_2^2 \\ a_2^3 & b_2^3 & c_2^3 \end{vmatrix}.$$

Поэтому

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1)(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_2) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{c}_2) \\ (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) & (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_2) \\ (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{b}_2) & (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) \end{vmatrix}.$$

Лемма доказана.

Используя лемму, получаем следующее выражение для гауссовой кривизны:

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \begin{vmatrix} (\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_{vv}) & (\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_u) & (\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_v) \\ (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_{vv}) & E & F \\ (\boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_{vv}) & F & G \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_{uv}^2 & (\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_u) & (\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_v) \\ (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_{uv}) & E & F \\ (\boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_{uv}) & F & G \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \begin{vmatrix} (\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_{vv}) - \boldsymbol{r}_{uv}^2 & (\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_u) & (\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_v) \\ (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_{vv}) & E & F \\ (\boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_{vv}) & F & G \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} 0 & (\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_u) & (\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_v) \\ (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_{uv}) & E & F \\ (\boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_{uv}) & F & G \end{vmatrix} \right\}.$$

Дифференцируя соотношения

$$\boldsymbol{r}_u^2 = E, (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v) = F, \boldsymbol{r}_v^2 = G$$

по u и v, будем иметь:

$$(\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_u) = \frac{1}{2} E_u,$$
$$(\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_u) = \frac{1}{2} E_v, \tag{1}$$
$$(\boldsymbol{r}_{vv}, \boldsymbol{r}_v) = \frac{1}{2} G_v,$$
$$(\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_v) = \frac{1}{2} G_u.$$

Далее

$$(\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_v) = (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)_u - \frac{1}{2} (\boldsymbol{r}_u^2)_v = F_u - \frac{1}{2} E_v,$$
$$(\boldsymbol{r}_{vv}, \boldsymbol{r}_u) = F_v - \frac{1}{2} G_u. \tag{2}$$

Наконец,

$$(\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_{vv}) - \boldsymbol{r}_{uv}^2 = (\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_v)_v - (\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_v)_u.$$

Отсюда

$$(\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_{vv}) - \boldsymbol{r}_{uv}^2 = -\frac{1}{2} G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv}. \tag{3}$$

Пользуясь соотношениями (1), (2), (3), получим искомую формулу для гауссовой кривизны:

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv} & \frac{1}{2} E_u & F_u - \frac{E_v}{2} \\ F_v - \frac{1}{2} G_u & E & F \\ \frac{1}{2} G_v & F & G \end{vmatrix} - \right.$$
$$\left. - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} E_v & E & F \\ \frac{1}{2} G_u & F & G \end{vmatrix} \right\}.$$

Отметим ряд важных следствий, вытекающих из формулы Гаусса.

1. Изометричные поверхности в соответствующих по изометрии точках имеют одинаковые гауссовы кривизны. В частности, при изгибании гауссова кривизна не меняется. Как было установлено, гауссова кривизна полностью определяет тип точки на поверхно-

сти. Поэтому изгибанием нельзя, например, эллиптическую точку перевести в параболическую или гиперболическую.

2. Хотя при изгибании поверхности ее пространственная форма может измениться, что повлечет за собой изменение сферических изображений фигур на поверхности, площадь сферических изображений фигур при изгибании меняться не будет.

Это вытекает из того, что для площади сферического изображения справедлива формула (см. § 14 гл. V):

$$\omega(U) = \iint_U |K| \sqrt{EG - F^2}\, du dv.$$

3. Первая и вторая квадратичные формы не независимы. Именно дискриминант $LN - M^2$ второй квадратичной формы выражается через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные.

4. Если первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$I = du^2 + G dv^2, \qquad (*)$$

то, пользуясь формулой Гаусса, в этом частном случае для гауссовой кривизны будем иметь формулу

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\sqrt{G}\right)_{uu}.$$

В дальнейшем параметризация поверхности, в которой первая квадратичная форма имеет вид (*), существенно используется при исследовании внутренних свойств поверхности.

§ 4. Деривационные формулы

Пусть S — регулярная поверхность и $\boldsymbol{r}(u, v)$ — ее регулярная параметризация. В каждой точке поверхности S определена правая тройка векторов:

$$\boldsymbol{r}_u, \ \boldsymbol{r}_v, \ \boldsymbol{n}.$$

Поэтому любой вектор в пространстве может быть однозначно разложен по векторам $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{n}$.

Рассмотрим разложение векторов $\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_{vv}$ по $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{n}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{uu} &= A_1 \boldsymbol{r}_u + B_1 \boldsymbol{r}_v + C_1 \boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{r}_{uv} &= A_2 \boldsymbol{r}_u + B_2 \boldsymbol{r}_v + C_2 \boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{r}_{vv} &= A_3 \boldsymbol{r}_u + B_3 \boldsymbol{r}_v + C_3 \boldsymbol{n}. \end{aligned} \qquad (*)$$

Прежде всего найдем коэффициенты C_1, C_2, C_3. Умножая обе части каждого из равенств (*) скалярно на $\boldsymbol{n}$, получим:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{n}) &= C_1, \\ (\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{n}) &= C_2, \\ (\boldsymbol{r}_{vv}, \boldsymbol{n}) &= C_3. \end{aligned}$$

Отсюда

$$C_1 = L, \; C_2 = M, \; C_3 = N.$$

Найдем выражения для A_1 и B_1. Имеем:

$$(\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_u) = A_1 \boldsymbol{r}_u^2 + B_1 (\boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_u),$$
$$(\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_v) = A_1 (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v) + B_1 \boldsymbol{r}_v^2.$$

Далее, так как

$$E = \boldsymbol{r}_u^2, \; F = (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v), \; G = \boldsymbol{r}_v^2,$$

то, пользуясь формулами (1) и (2) § 3, получим:

$$(\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_u) = \frac{1}{2} E_u,$$

$$(\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_v) = F_u - \frac{1}{2} E_v.$$

Итак, для нахождения A_1 и B_1 имеем систему

$$\begin{cases} A_1 E + B_1 F = \frac{1}{2} E_u, \\ A_1 F + B_1 G = F_u - \frac{1}{2} E_v. \end{cases}$$

Отсюда

$$A_1 = \frac{E_u G - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \; B_1 = \frac{-E_u F + 2EF_v - EE_v}{2(EG - F^2)}.$$

Аналогичным приемом находятся коэффициенты A_2, B_2, A_3, B_3. Важно отметить, что все величины A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 зависят только от коэффициентов первой квадратичной формы и их первых производных. Эти величины играют важную роль в теории поверхностей. Они называются *коэффициентами Кристофеля* и обозначаются так:

$$A_1 = \Gamma_{11}^1, \; A_2 = \Gamma_{12}^1, \; A_3 = \Gamma_{22}^1,$$
$$B_1 = \Gamma_{11}^2, \; B_2 = \Gamma_{12}^2, \; B_3 = \Gamma_{22}^2.$$

Как уже отмечалось, *коэффициенты Кристофеля Γ_{ij}^k зависят только от коэффициентов первой квадратичной формы и потому являются объектами внутренней геометрии поверхности.*

Итак, формулы для вторых производных радиус-вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$ теперь можно записать так:

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \boldsymbol{r}_u + \Gamma_{11}^2 \boldsymbol{r}_v + L\boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{r}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \boldsymbol{r}_u + \Gamma_{12}^2 \boldsymbol{r}_v + M\boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{r}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \boldsymbol{r}_u + \Gamma_{22}^2 \boldsymbol{r}_v + N\boldsymbol{n}. \end{cases} \qquad \binom{*}{*}$$

Формулы $\binom{*}{*}$ и называются *деривационными формулами.*

Если первая квадратичная форма имеет вид

$$\mathrm{I} = du^2 + G dv^2,$$

то

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} G_u,$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}.$$

§ 5. Геодезическая кривизна кривой на поверхности

Пусть S — регулярная поверхность и L — регулярная кривая на S. В произвольной точке X кривой L проведем касательную плоскость P к поверхности S и спроектируем на P вектор кривизны $\varkappa \boldsymbol{m}$ к L в точке X (здесь $\varkappa$ — кривизна L в точке X, а $\boldsymbol{m}$ — главная нормаль к L в точке X). *Длину проекции вектора кривизны назовем* ***геодезической кривизной*** $\varkappa_г$ *кривой L в точке X* (см. рис. 164).

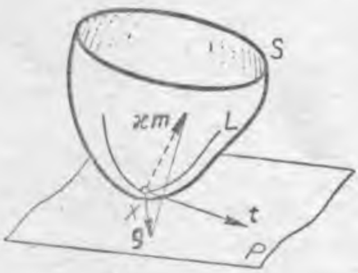


Рис. 164

Как мы докажем ниже, геодезическая кривизна есть объект внутренней геометрии поверхности. Геодезическая кривизна есть аналог кривизны плоской кривой для общего случая регулярной поверхности.

Найдем формулу для вычисления геодезической кривизны.

Для этого найдем длину проекции вектора $\varkappa \boldsymbol{m}$ на касательную плоскость P. Так как

$$\varkappa \boldsymbol{m} = \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{ds^2},$$

где s — естественный параметр на кривой L, то нам нужно найти составляющую вектора $\frac{d^2 \boldsymbol{r}}{ds^2}$, лежащую в касательной плоскости к S в точке X.

Кривая L в пространстве задается вектор-функцией

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(s), v(s)).$$

Отсюда

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{r}_u \frac{du}{ds} + \boldsymbol{r}_v \frac{dv}{ds};$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \boldsymbol{r}_{uu} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv} \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \boldsymbol{r}_{vv} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \boldsymbol{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \boldsymbol{r}_v \frac{d^2v}{ds^2}.$$

Пользуясь деривационными формулами, получаем:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = (\Gamma^1_{11}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2_{11}\boldsymbol{r}_v + L\boldsymbol{n})\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2(\Gamma^1_{12}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2_{12}\boldsymbol{r}_v +$$

$$+ M\boldsymbol{n})\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + (\Gamma^1_{22}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2_{22}\boldsymbol{r}_v + N\boldsymbol{n})\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \boldsymbol{r}_u\frac{d^2u}{ds^2} + \boldsymbol{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}.$$

Введем обозначения:

$$A = \Gamma^1_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma^1_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2;$$

$$B = \Gamma^2_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma^2_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma^2_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2.$$

Тогда для $\boldsymbol{g}$ — проекции вектора $\varkappa\boldsymbol{m}$ на плоскость P будем иметь формулу:

$$\boldsymbol{g} = \left(\frac{d^2u}{ds^2} + A\right)\boldsymbol{r}_u + \left(\frac{d^2v}{ds^2} + B\right)\boldsymbol{r}_v.$$

Вектор

$$\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{r}_u\frac{du}{ds} + \boldsymbol{r}_v\frac{dv}{ds}$$

есть единичный вектор, лежащий на касательной к L в точке X, поэтому он перпендикулярен вектору $\boldsymbol{g}$ и, следовательно,

$$\varkappa_\Gamma = |\boldsymbol{g}| = |\boldsymbol{g}|\,|\boldsymbol{t}|\sin(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{g}) = |[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{g}]| =$$

$$= |[\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v]|\left|\left(\frac{d^2v}{ds^2} + B\right)\frac{du}{ds} - \left(\frac{d^2u}{ds^2} + A\right)\frac{dv}{ds}\right|.$$

Отсюда

$$\varkappa_\Gamma = \sqrt{EG - F^2}\left|\left(\frac{d^2v}{ds^2} + B\right)\frac{du}{ds} - \left(\frac{d^2u}{ds^2} + A\right)\frac{dv}{ds}\right| =$$

$$= \sqrt{EG - F^2}\left|\left(\frac{d^2v}{ds^2}\frac{du}{ds} - \frac{d^2u}{ds^2}\frac{dv}{ds}\right) + \Gamma^2_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^3 + (2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})\left(\frac{du}{ds}\right)^2\frac{dv}{ds} +\right.$$

$$\left. + (\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12})\frac{du}{ds}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 - \Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^3\right|.$$

Из написанной формулы для геодезической кривизны вытекает следующая важная теорема.

Т е о р е м а. *Геодезическая кривизна есть объект внутренней геометрии поверхности.*

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что при изгибании поверхности геодезическая кривизна любой кривой на ней не меняется.

Если кривая L имеет параметризацию

$$\begin{cases} u = u, \\ v = f(u), \end{cases}$$

то для геодезической кривизны имеем формулу:

$$\varkappa_\Gamma = \sqrt{\frac{EG - F^2}{(E + 2Ff' + Gf'^2)^3}} \left| f'' + \Gamma^2_{11} + (2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) f' + \right.$$

$$\left. + (\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12}) f'^2 - \Gamma^1_{22} f'^3 \right|.$$

Эта формула получается из выражения для $\varkappa_\Gamma$, если учесть, что

$$ds = \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \sqrt{E + 2Ff' + Gf'^2}\, du,$$

$$f'(u) = \frac{dv}{du} = \frac{dv}{ds} : \frac{du}{ds}, \quad f''(u) = \frac{\frac{d^2v}{ds^2}\frac{du}{ds} - \frac{d^2u}{ds^2}\frac{dv}{ds}}{\left(\frac{du}{ds}\right)^3}.$$

Если первая квадратичная форма имеет вид

$$\mathrm{I} = du^2 + Gdv^2,$$

то, как показано в § 4 гл. VI,

$$\Gamma^1_{11} = 0, \quad \Gamma^1_{12} = 0, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2} G_u,$$

$$\Gamma^2_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{G_u}{2G}, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{G_v}{2G},$$

и потому

$$\varkappa_\Gamma = \frac{\sqrt{G}}{(u'^2 + Gv'^2)^{3/2}} \left| (v''u' - u''v') + \frac{1}{2} G_u v'^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{G_v}{2G} u'v'^2 + \frac{G_u}{G} u'^2 v' \right|.$$

Если L — кривая на евклидовой плоскости с декартовыми координатами u, v, то

$$\mathrm{I} = du^2 + dv^2; \quad G \equiv 1, \; G_u = G_v \equiv 0,$$

и формула для геодезической кривизны кривой принимает вид:

$$\varkappa_\Gamma = \frac{|v''u' - u''v'|}{(u'^2 + v'^2)^{3/2}},$$

т. е. на плоскости геодезическая кривизна кривой совпадает с обычной кривизной.

§ 6. Геодезические линии

Геодезической линией *на поверхности называется кривая, у которой в каждой точке геодезическая кривизна равна нулю.*

Геодезические линии являются, очевидно, объектом внутренней геометрии поверхности. Так как на евклидовой плоскости геодезическими являются прямые, то на геодезические линии произвольной поверхности можно смотреть как на естественные аналоги прямых.

Отметим ряд свойств геодезических.

1. *Если две поверхности касаются друг друга вдоль некоторой кривой L, которая является геодезической на одной из них, то она будет геодезической и на другой.* Действительно, в рассматриваемой ситуации геодезическая кривизна кривой L будет одна и та же независимо от того, на какой поверхности лежит кривая L.

2. *Для того чтобы кривая L, лежащая на поверхности S, была геодезической, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке L, где $\varkappa \neq 0$, главная нормаль к L была коллинеарна нормали поверхности.*

Действительно, если $\boldsymbol{m}$ — главная нормаль к кривой L, $\boldsymbol{n}$ — нормаль к поверхности S и $\boldsymbol{g}$ — проекция $\varkappa\boldsymbol{m}$ на касательную плоскость, то

$$|\boldsymbol{g}| = \varkappa \text{ и } \varkappa\boldsymbol{m} = \boldsymbol{g} + \lambda\boldsymbol{n}. \qquad (*)$$

Так как для геодезической $\varkappa_{\text{г}} = 0$, то из соотношения (*) вытекает непосредственно сформулированное выше утверждение.

Теорема. *Через каждую точку регулярной поверхности в любом направлении можно провести и притом единственную геодезическую.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ — регулярная параметризация поверхности. Возьмем на поверхности произвольную точку $X(u_0, v_0)$ и произвольное направление $(u_0' : v_0')$ в этой точке. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2u}{ds^2} + A = 0, \quad \frac{d^2v}{ds^2} + B = 0,$$

в достаточно малой окрестности точки $X(u_0, v_0)$. Согласно теореме о существовании решения эта система имеет решение

$$u = u(s), \qquad v = v(s),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} u(s_0) = u_0, & u'(s_0) = u_0', \\ v(s_0) = v_0, & v'(s_0) = v_0'. \end{cases}$$

Кривая, определенная внутренними уравнениями

$$u = u(s), \; v = v(s),$$

будет геодезической, так как

$$\varkappa_{\text{г}} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)^{3/2}} \left|[-v'(u'' + A) + u'(v'' + B)]\right| = 0.$$

Очевидно, что эта геодезическая проходит через точку $X(u_0, v_0)$ и имеет в этой точке направление $(u_0' : v_0')$.

Докажем, что через точку $X(u_0, v_0)$ в указанном направлении проходит единственная геодезическая.

Пусть через точку (u_0, v_0) на поверхности проходят две геодезические L_1 и L_2, имеющие в точке (u_0, v_0) одинаковое направление $(u_0' : v_0')$. Допустим, что $u_0' \neq 0$, тогда в малой окрестности точки (u_0, v_0) эти кривые могут быть заданы уравнениями:

$$L_1: u = u, \quad v = v_1(u);$$
$$L_2: u = u, \quad v = v_2(u).$$

(Этот факт есть простое следствие теоремы анализа об обращении функции $u = u(s)$ в окрестности точки, где $u \neq 0$.)

Так как L_1 и L_2 — геодезические, то функции $v_1(u)$ и $v_2(u)$ есть решения одного и того же дифференциального уравнения:

$$v_1'' - Av_1' + B = 0,$$
$$v_2'' - Av_2' + B = 0$$

при одних и тех же начальных данных:

$$v_1(u_0) = v_0, \quad v_1'(u_0) = \frac{v_0'}{u_0'},$$
$$v_2(u_0) = v_0, \quad v_2'(u_0) = \frac{v_0'}{u_0'}.$$

Отсюда следует, что

$$v_1(u) \equiv v_2(u),$$

т. е. геодезические L_1 и L_2 совпадают.

Теорема доказана.

Выясним, что представляют собой геодезические линии на прямом круговом цилиндре и сфере.

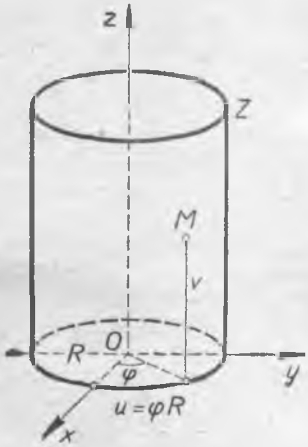


Рис. 165

Пусть Z — прямой круговой цилиндр. Не нарушая общности, можно считать, что направляющей цилиндра является окружность

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

а образующие параллельны оси z.

Регулярную параметризацию Z можно задать формулами:

$$\begin{cases} x = R\cos\dfrac{u}{R}, \\ y = R\sin\dfrac{u}{R}, \\ z = v, \end{cases}$$

где

$$u = \varphi R \quad (0 \leqslant \varphi < 2\pi);$$

геометрический смысл параметров u, φ изображен на рис. 165.

Тогда первая квадратичная форма Z имеет вид:

$$\mathrm{I} = du^2 + dv^2,$$

и уравнение геодезических

$$v''u' - u''v' = 0.$$

Решениями этого уравнения на плоскости u, v являются прямые

$$\begin{cases} u = at + b, \\ v = ct + d, \end{cases}$$

которые определяют на Z геодезические:

$$\begin{cases} x = R\cos\dfrac{at+b}{R}, \\ y = R\sin\dfrac{at+b}{R}, \\ z = ct + d, \end{cases}$$

являющиеся в пространстве винтовыми линиями.

Через каждую точку цилиндра Z в любом направлении можно провести винтовую линию, лежащую на Z. Поэтому в силу теоремы о единственности геодезической, проходящей через данную точку в данном направлении, на цилиндре Z винтовыми линиями исчерпываются все геодезические.

На сфере геодезическими являются большие круги, так как главная нормаль к большому кругу идет по радиусу сферы и, следовательно, коллинеарна нормали к сфере. Через каждую точку сферы можно провести большой круг в любом направлении. Поэтому семейством больших кругов на сфере исчерпывается множество геодезических линий этой поверхности.

§ 7. Полугеодезическая система координат на поверхности. Экстремальное свойство геодезической

Система внутренних координат u, v на регулярной поверхности S называется ***полугеодезической****, если в ней первая квадратичная форма имеет вид*:

$$\mathrm{I} = du^2 + G dv^2.$$

Так как $F = 0$, то сеть координатных линий в полугеодезической системе координат ортогональна.

Рассмотрим на поверхности линии, вдоль которых $v = \mathrm{const}$. Тогда на этих линиях $dv = 0$, и мы имеем:

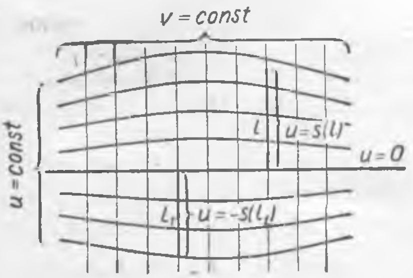


Рис. 166

$$ds^2 = du^2.$$

Отсюда $ds = \pm du$ на любой линии $v = \text{const}$, и, следовательно, u есть с точностью до знака длина дуги координатной линии, один конец которой находится на координатной линии $u = 0$ (см. рис. 166).

Нетрудно видеть, что длины всех дуг координатных линий $v = \text{const}$, концы которых лежат на координатных линиях $u = u_1$ и $u = u_2$, равны между собой.

Докажем, что координатные линии $v = \text{const}$ являются геодезическими. Линии $v = \text{const}$ имеют уравнения

$$v = f(u) = \text{const},$$

поэтому

$$f'(u) = f''(u) = 0.$$

Используя формулу для геодезической кривизны (см. § 5), получаем:

$$\varkappa_\Gamma = \frac{\sqrt{G}}{E^{3/2}} \left| \Gamma_{11}^2 \right|.$$

Но из формулы для Γ_{11}^2, данной в § 4, имеем:

$$\Gamma_{11}^2 = 0.$$

Отсюда следует, что вдоль линий $v = \text{const}$ $\varkappa_\Gamma = 0$, т. е. эти линии суть геодезические.

Итак, координатные линии полугеодезической системы устроены так: семейство линий $v = \text{const}$ — геодезические, а семейство линий $u = \text{const}$ — ортогональные траектории к ним.

Из изложенного выше ясен способ построения полугеодезических координат на поверхности. В окрестности W точки X некоторая линия L, проходящая через X, берется за линию $u = 0$. В качестве линий $v = \text{const}$ берутся отрезки геодезических, перпендикулярных к L. Тогда через точку Y окрестности W проходит только одна гео-

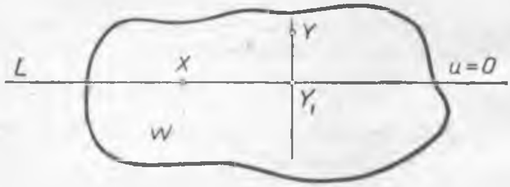


Рис. 167

дезическая L_1, которая пересекает под прямым углом линию L в единственной точке Y_1. Длины кривых YY_1 и XY_1, взятые с соответствующими знаками (см. рис. 167), берутся за координаты u и v точки Y. Так как для точек линии L координата v есть естественный параметр, то из соотношения

$$ds^2 = G(0, v)dv^2$$

вытекает, что

$$G(0, v) = 1.$$

Можно доказать, что указанный способ построения полугеодезической системы координат всегда осуществим в достаточно малой окрестности любой точки регулярной поверхности. На доказательстве этого предложения мы останавливаться не будем.

Отметим в заключение, что если в качестве линии L взять геодезическую, то из формулы

$$\varkappa_\Gamma = \frac{\sqrt{G}}{(u'^2 + Gv'^2)^{3/2}} \Big| (v''u' - u''v') + \frac{1}{2} G_u v'^3 + \frac{G_v}{2G} u'v'^2 + \frac{G_u}{G} u'^2 v' \Big| = 0$$

вытекает

$$\varkappa_\Gamma = \frac{1}{2G} |G_u| = 0.$$

Поэтому

$$G_u(0, v) = 0.$$

Теорема. *Дуга геодезической γ между точками A и B будет кривой наименьшей длины среди всех кривых на поверхности с концами в этих же точках, если точки A и B достаточно близки (т. е. длина дуги геодезической AB достаточно мала).*

Доказательство. Берем точку A за начало полугеодезической системы координат. В качестве линии $v = 0$ берем геодезическую, проходящую через точку B. Точки A и B имеют соответственно координаты $(0, 0)$ и $(u_0, 0)$, где u_0 — длина отрезка геодезической между точками A и B. Не нарушая общности, достаточно рассмотреть длины кривых, лежащих на S, с концами в точках A и B, имеющих параметрические представления

$$\begin{cases} u = u, \\ v = f(u), \end{cases} \quad u \in [0, u_0].$$

Если L — такая кривая и она отлична от дуги l геодезической γ с концами A и B, то найдется отрезок $[\alpha, \beta] \subset [0, u_0]$, на котором $f'(u) \neq 0$.

Поэтому

$$s(L)=\int_0^{u_0}\sqrt{1+G(u,f(u))f'^2(u)}\,du>\int_0^{u_0}du=u_0=s(l).$$

Теорема доказана.

§ 8. Формула Гаусса — Бонне

В теории кривых было показано, что для плоских кривых целесообразно ввести понятие кривизны со знаком. Так как геодезическая кривизна кривой на поверхности есть естественный аналог кривизны кривой на плоскости, то полезно ввести понятие геодезической кривизны кривой со знаком. Именно пусть L — регулярная кривая на поверхности S, тогда ее геодезическая кривизна со знаком $\tilde{\varkappa}_г$ определяется формулой:

$$\tilde{\varkappa}_г=\sqrt{EG-F^2}\left[\left(\frac{d^2v}{ds^2}\frac{du}{ds}-\frac{d^2u}{ds^2}\frac{dv}{ds}\right)+\Gamma^2_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^3+\right.$$
$$\left.+\left(2\Gamma^2_{12}-\Gamma^1_{11}\right)\left(\frac{du}{ds}\right)^2\frac{dv}{ds}+\left(\Gamma^2_{22}-2\Gamma^1_{12}\right)\frac{du}{ds}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2-\Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^3\right]$$

($u=u(s)$, $v=v(s)$ — параметризация кривой L).

Во многих вопросах дифференциальной геометрии важную роль играет *формула Гаусса—Бонне*[1], связывающая между собой интеграл от гауссовой кривизны по площади области с интегралом от геодезической кривизны со знаком вдоль ее границы по длине дуги последней.

Итак, пусть дана регулярная поверхность S. На S рассмотрим гомеоморфную кругу область G, граница которой L состоит из конечного числа регулярных кривых L_i, последовательно примыкающих друг к другу. Про такие кривые L будем говорить, что они *кусочно-регулярны*; регулярные кривые, входящие в состав L, будем называть ее *звеньями*. Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ углы, образуемые звеньями L_1, L_2, ..., L_n кривой L со стороны области G (см. рис. 168). На кривой L введем направление так, чтобы оно относительно нормали n в точках области G определяло правый винт (см. рис. 168).

Рис. 168

Имеет место следующая теорема.

[1] О. Бонне — известный французский геометр XIX века.

Теорема Гаусса—Бонне.

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{L_i}\widetilde{\varkappa}_{r}ds+\sum_{i=1}^{n}(\pi-\alpha_i)=2\pi-\iint_{G}K\,d\sigma, \tag{*}$$

где K — гауссова кривизна поверхности, а интегрирование справа ведется по площади области G.

В частности, если L — регулярная кривая, то все $\alpha_i=\pi$ и (*) принимает вид

$$\oint_{L}\widetilde{\varkappa}_{r}\,ds=2\pi-\iint_{G}K\,d\sigma.$$

Формула (*) и называется формулой Гаусса—Бонне. Доказательство теоремы мы приводить не будем.

Отметим ряд важных следствий из формулы Гаусса—Бонне.

1. Если все звенья L_i кривой L являются геодезическими, то область G называется *геодезическим многоугольником*. В этом случае формула Гаусса—Бонне принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n}(\pi-\alpha_i)=2\pi-\iint_{G}K\,d\sigma.$$

Угол

$$\beta_i=\pi-\alpha_i$$

является внешним углом геодезического многоугольника G и потому формулу Гаусса—Бонне можно рассматривать как формулу для нахождения суммы внешних углов геодезического многоугольника:

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i=2\pi-\iint_{G}K\,d\sigma.$$

В случае плоскости эта формула хорошо известна из курса элементарной геометрии:

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i=2\pi$$

(напомним, что на плоскости гауссова кривизна $K=0$).

2. Геодезический многоугольник, граница которого состоит из трех геодезических, называется *геодезическим треугольником*. Для геодезического треугольника T с углами α, β, γ формула Гаусса—Бонне может быть записана так:

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=\iint_{T}K\,d\sigma.$$

Величину

$$\nu(T)=\alpha+\beta+\gamma-\pi$$

называют обычно *избытком геодезического треугольника* T, а величину

$$\omega(T) = \iint_T K\, d\sigma$$

интегральной кривизной треугольника T.

Избыток треугольника характеризует отличие суммы углов треугольника T от суммы углов треугольника на евклидовой плоскости. Формула Гаусса—Бонне показывает, что мерой этого отклонения является интегральная кривизна треугольника T. Поэтому можно сказать, что *интегральная кривизна характеризует меру отклонения внутренней геометрии поверхности от внутренней геометрии евклидовой плоскости.*

3. Рассмотрим поверхности, у которых гауссова кривизна постоянна

$$K = K_0 = \text{const}.$$

Для геодезического треугольника на такой поверхности формулу Гаусса—Бонне можно записать в виде

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = K_0\, \sigma(T).$$

Отсюда ясно, что избыток треугольника T пропорционален площади этого треугольника, если $K_0 \neq 0$. Далее, если $K_0 > 0$, то сумма углов любого геодезического треугольника больше π; если же $K_0 < 0$, то сумма углов любого геодезического треугольника меньше π, и, наконец, если $K_0 = 0$, то сумма углов любого треугольника равна π.

§ 9. Поверхности постоянной гауссовой кривизны

Пусть S — регулярная поверхность постоянной гауссовой кривизны K и X_0 — произвольная точка этой поверхности. На поверхности S в некоторой окрестности точки X_0 введем полугеодезическую систему координат (см. § 7 гл. VI) с началом в точке X_0, в качестве линии $u = 0$ выберем какую-нибудь геодезическую, проходящую через точку X_0.

Первая квадратичная форма поверхности в указанной системе координат имеет вид:

$$\mathrm{I} = du^2 + G dv^2,$$

причем

$$G(0, v) = 1, \quad G_u(0, v) = 0.$$

Для гауссовой кривизны (см. § 3 гл. VI) справедлива формула

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\sqrt{G}\right)_{uu}.$$

Отсюда имеем, что коэффициент G удовлетворяет уравнению

$$(\sqrt{G})_{uu} + K\sqrt{G} = 0$$

и начальным условиям

$$\sqrt{G(0,\ v)} = 1,\ (\sqrt{G(0, v)})_u = 0.$$

Рассмотрим 3 случая:

1. $K > 0$.
2. $K < 0$.
3. $K = 0$.

В первом случае интегрируя уравнение

$$(\sqrt{G})_{uu} + K\sqrt{G} = 0,$$

имеем формулу для общего вида $\sqrt{G}$:

$$\sqrt{G} = A(v)\cos(\sqrt{K}\,u) + B(v)\sin(\sqrt{K}\,u).$$

Так как $G(0,\ v) = 1$ и $G_u(0,\ v) = 0$, то

$$A(v) = 1 \quad \text{и} \quad B(v) = 0.$$

Таким образом, в случае $K > 0$ первая квадратичная форма в полугеодезической параметризации имеет вид:

$$\mathrm{I} = du^2 + \cos^2(\sqrt{K}\ u)\ dv^2.$$

Аналогичными вычислениями во втором и третьем случае найдем соответственно

$$\mathrm{I} = du^2 + \operatorname{ch}^2(\sqrt{-K}\ u)\ dv^2$$

и

$$\mathrm{I} = du^2 + dv^2.$$

Теорема. *Пусть S_1 и S_2 — поверхности постоянной гауссовой кривизны K, X_1 и X_2 — произвольные точки на этих поверхностях, l_1 и l_2 — произвольные направления в этих точках. Тогда существует изометрическое отображение некоторой окрестности точки X_1 поверхности S_1 на надлежаще выбранную окрестность точки X_2 на поверхности S_2, при котором направлению l_1 в точке X_1 соответствует направление l_2 на поверхности S_2 в точке X_2.*

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из построения в окрестностях точек X_1 и X_2 на поверхностях S_1 и S_2 полугеодезических систем координат, у которых геодезические, взятые за линии $u = 0$, имеют в точках X_1 и X_2 направления соответственно l_1 и l_2. Действительно, при этом первые квадратичные формы поверхностей будут одинаковыми, и требуемое изометрическое отображение получается при сопоставлении точек с одинаковыми координатами.

§ 10. Простейшие поверхности постоянной гауссовой кривизны

Простейшей поверхностью постоянной положительной гауссовой кривизны $K > 0$ является *сфера* радиуса

$$R = \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Действительно, нормальными сечениями сферы являются ее большие круги. Поэтому в каждой точке сферы ее главные нормальные кривизны равны между собой и равны $\frac{1}{R}$, где R — радиус сферы. Отсюда

$$K = \frac{1}{R^2},$$

или

$$R = \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Простейшей поверхностью нулевой гауссовой кривизны, очевидно, является *плоскость*.

Рассмотрим поверхность постоянной отрицательной кривизны. Простейшей из них является *псевдосфера*, к построению которой мы сейчас и переходим.

На плоскости xOy рассмотрим кривую, у которой отрезок касательной от точки прикосновения до точки пересечения с осью x равен постоянной величине a. Эту кривую называют *трактрисой*. Ее общий вид изображен на рис. 169. Опуская подробные выкладки, отметим некоторые свойства этой кривой.

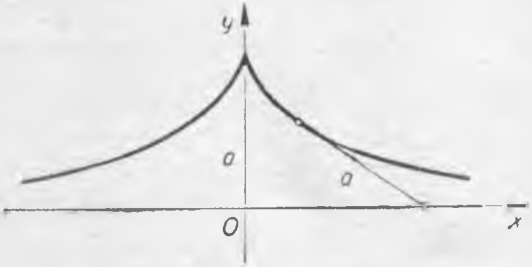


Рис. 169

Прежде всего, трактриса имеет точку возврата, удаленную на расстояние a от оси x. Из точки возврата выходят две ветви, симметричные друг другу, каждая из которых неограниченно приближается к оси x, т. е. ось x есть асимптота трактрисы. Все точки трактрисы, кроме точки возврата, неособые, т. е. трактрису можно задать уравнением

$$y = y(x),$$

где функция $y(x)$ непрерывна на всем промежутке $(-\infty, +\infty)$

и дважды непрерывно дифференцируема всюду, кроме точки $x = 0$ (заметим, что абсцисса точки возврата равна нулю). Во всех своих неособых точках трактриса—выпуклая кривая, обращенная выпуклостью в сторону оси x.

Поверхность, образованная вращением трактрисы вокруг оси x, называется *псевдосферой* (см. рис. 170). Псевдосфера состоит из

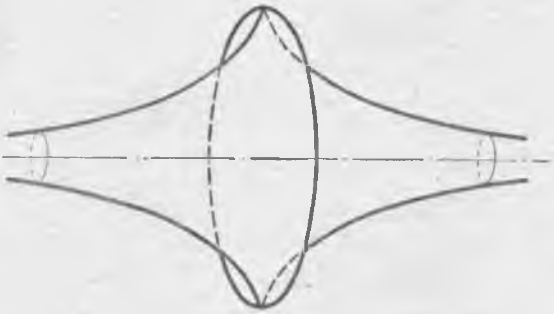


Рис. 170

двух симметричных частей, представляющих собой регулярные поверхности, которые соединены вдоль особой линии — ребра возврата. Каждая из этих частей при удалении в бесконечность стягивается к оси x.

В дальнейшем, рассматривая псевдосферу, мы будем иметь в виду одну из ее регулярных частей.

Докажем, что псевдосфера имеет во всех точках постоянную отрицательную гауссову кривизну

$$K = -\frac{1}{a^2}.$$

Так как псевдосфера есть поверхность вращения, то достаточно установить, что гауссова кривизна псевдосферы в точках, лежащих на одном меридиане, равна $-\frac{1}{a^2}$. В качестве такого меридиана возьмем меридиан псевдосферы, расположенный в первой четверти плоскости xOy, и пусть $y = y(x)$ — его уравнение. При каждом $x > 0$ будем иметь $a > y > 0$; кроме того, так как при возрастании x точка трактрисы приближается монотонно к оси x, то $y' < 0$, а так как выпуклость трактрисы обращена к оси x, то $y'' > 0$.

Пусть теперь M (см. рис. 171) — произвольная точка меридиана $y = y(x)$. Так как главные направления поверхности вращения суть направления ее меридиана и параллели, то главные нормальные кривизны псевдосферы в точке M теперь уже легко найти непосредственно.

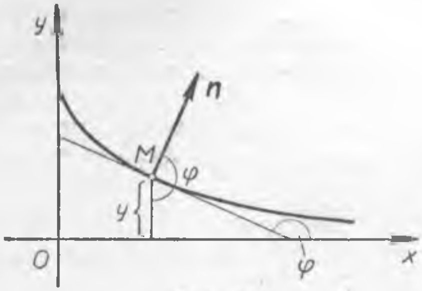


Рис. 171

Нормаль псевдосферы направлена в сторону вогнутости кривой $y = y(x)$, поэтому главная кривизна k_1, соответствующая направлению меридиана, положительна и равна кривизне этого меридиана, т.е.

$$k_1 = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Кривизна широты равна $\frac{1}{y}$; следовательно, главная нормальная кривизна k_2, соответствующая второму главному направлению, может быть определена по формуле Менье:

$$k_2 = \frac{\cos\varphi}{y},$$

где φ — угол между нормалью $\boldsymbol{n}$ и отрезком y. Так как этот угол равен углу наклона касательной к оси x, то

$$\operatorname{tg}\varphi = y'$$

и

$$\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Поэтому

$$k_2 = -\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}}.$$

Отсюда гауссова кривизна в точках меридиана $y = y(x)$ такова:

$$K = -\frac{y''}{y\sqrt{1+y'^2}}.$$

Пусть $(X, 0)$ — координаты точки пересечения касательной к трактрисе в точке $M(x, y)$ с осью x. Из уравнения касательной

$$Y - y = y'(X - x),$$

при $Y = 0$, находим:

$$X - x = -\frac{y}{y'}.$$

По определению трактрисы

$$X - x = -a\cos\varphi,$$

и потому

$$\frac{y}{y'} = a\cos\varphi.$$

Заменяя здесь $\cos\varphi$ выражением

$$\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

получаем дифференциальное уравнение трактрисы:

$$\frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'} = -a.$$

Отсюда

$$y'^2(a^2 - y^2) = y^2,$$

$$y''(a^2 - y^2) = y(1 + y'^2).$$

Из последних соотношений находим

$$K = -\frac{y'^2}{y^2(1+y'^2)},$$

и, стало быть,

$$K = -\frac{1}{a^2}.$$

Таким образом, псевдосфера имеет во всех своих точках одинаковую гауссову кривизну

$$K = -\frac{1}{a^2}.$$

Число a называется *параметром* трактрисы, вращением которой образована данная псевдосфера. Придавая a различные значения из интервала $(0, +\infty)$, получим семейство псевдосфер, в котором содержится поверхность, имеющая любую данную отрицательную постоянную гауссову кривизну.

Из теоремы о свойствах поверхностей постоянной гауссовой кривизны, которая была установлена в § 9 гл. VI, вытекает, что *у любой точки регулярной поверхности постоянной гауссовой кривизны K существует окрестность U, которая изометрична некоторой области на сфере радиуса $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$, если $K>0$, или некоторой области на псевдосфере с параметром $a = \frac{1}{\sqrt{-K}}$, если $K < 0$, или наконец, некоторой области на плоскости, если $K = 0$.*

Общее представление о разнообразии поверхностей постоянной гауссовой кривизны можно составить себе из следующего построения: берем простую область на сфере, псевдосфере или плоскости и подвергаем ее изгибанию. В результате получаются поверхности, имеющие соответственно постоянную положительную, отрицательную или нулевую гауссову кривизну.

§ 11. Многообразия с дифференциальной метрикой

Пусть D — простая область на плоскости с декартовыми координатами u, v (в частном случае D может быть и всей плоскостью u, v). Рассмотрим в D три дважды непрерывно дифференцируемые функции

$$E(u, v),\ F(u, v),\ G(u, v),$$

которые порождают в D положительно определенную квадратичную форму

$$ds^2 = E(u, v)\, du^2 + 2F(u, v)\, du\, dv + G(u, v)\, dv^2.$$

Мы будем говорить, что квадратичная форма

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

в области D порождает ***многообразие с дифференциальной метрикой,*** *если длина любого регулярного пути*

$$l\colon\ u = u(t),\quad v = v(t),\quad a \leqslant t \leqslant b$$

определяется формулой

$$s(l) = \int_a^b \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, dt.$$

Легко видеть, что в смысле внутренней геометрии любая регулярная поверхность представляет собой многообразие с дифференциальной метрикой.

В многообразии $\mathfrak{M}$ с дифференциальной метрикой по аналогии с внутренней геометрией поверхности можно ввести понятия угла между кривыми, площади области, гауссовой кривизны метрики, геодезической кривизны и, наконец, геодезических линий.

Укажем кратко, как вводятся эти понятия.

1. В каждой точке многообразия $\mathfrak{M}$ с координатами (u, v) направление характеризуется отношением $(du : dv)$. Если через эту точку проходит регулярный путь l, то направление в рассматриваемой точке определяется отношением $(u'(t) : v'(t)) = (du : dv)$. Заметим, что при определении направления всегда предполагается, что

$$du^2 + dv^2 \neq 0.$$

Это условие, в частности, выполняется для любого регулярного пути $u = u(t)$, $v = v(t)$. Поэтому достаточно определить угол между направлениями в многообразии, после чего угол между кривыми определяется очевидным образом (см. § 6 гл. V).

Углом между направлениями $(du : dv)$ *и* $(\delta u : \delta v)$ в точке с координатами (u, v) называется угол $\varphi \in [0, \pi]$, для которого

$$\cos\varphi = \frac{Edu\,\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdu\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\ \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}\,.$$

2. Пусть $U \subset D$ — некоторая область. *Площадью* области U в многообразии $\mathfrak{M}$ будем называть число

$$\sigma(U) = \iint_U \sqrt{EG - F^2}\, du dv.$$

3. *Гауссовой кривизной* многообразия $\mathfrak{M}$ будем называть выражение

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv} & \frac{1}{2} E_u & F_u - \frac{E_v}{2} \\ F_v - \frac{1}{2} G_u & E & F \\ \frac{1}{2} G_v & F & G \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} 0 & \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & E & F \\ \frac{G_u}{2} & F & G \end{vmatrix} \right\}.$$

Очевидно, что гауссова кривизна есть функция точки многообразия $\mathfrak{M}$

4. В каждой точке многообразия $\mathfrak{M}$ определяем коэффициенты Кристофеля Γ_{ij}^k по формулам, приведенным в § 4 гл. VI.

5. Если L — регулярная кривая в многообразии $\mathfrak{M}$, определяемая параметризацией

$$u = u\ (t), \qquad v = v\ (t),$$

то *геодезической кривизной* $\varkappa_\Gamma$ называется величина

$$\varkappa_\Gamma = \sqrt{EG - F^2} \left| \left(\frac{d^2 v}{ds^2} \frac{du}{ds} - \frac{d^2 u}{ds^2} \frac{dv}{ds} \right) + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^3 + \right.$$

$$\left. + \left(2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \right) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \frac{dv}{ds} + \left(\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1 \right) \frac{du}{ds} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 - \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds} \right)^3 \right|.$$

Геодезическими линиями многообразия $\mathfrak{M}$ называются кривые, у которых в каждой точке геодезическая кривизна равна нулю.

Для геодезических в многообразии с дифференциальной метрикой справедливы выводы, сделанные в §§ 6, 7 о свойствах геодезических. В частности, в достаточно малой окрестности каждой точки многообразия с дифференциальной метрикой можно ввести полугеодезическую систему координат.

6. В многообразии с дифференциальной метрикой справедлива формула Гаусса—Бонне:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{L_i} \tilde{\varkappa}_\Gamma\, ds + \sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i) = 2\pi - \iint_Q K\, d\sigma,$$

где $\tilde{\varkappa}_г$ — геодезическая кривизна кривой L_l со знаком.

7. *Мы будем говорить, что многообразие* $\mathfrak{M}$ *с дифференциальной метрикой* ds^2 ***регулярно вложено в пространство****, если существует регулярная поверхность* S, *имеющая параметризацию*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) \in C^{(k)}(D) \qquad (k \geqslant 3),$$

для которой первая квадратичная форма совпадает с дифференциальной метрикой

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

многообразия $\mathfrak{M}$. Другими словами,

$$E = \boldsymbol{r}_u^2, \; F = (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v), \; G = \boldsymbol{r}_v^2$$

при всех $(u, v) \in D$.

Если многообразие $\mathfrak{M}$ вложено регулярно в пространство с помощью поверхности S, то между точками $\mathfrak{M}$ и S естественно устанавливается взаимно однозначное отображение, при котором длины соответствующих кривых оказываются равными. Таким образом, *регулярное вложение многообразия с дифференциальной метрикой в пространство можно рассматривать как изометрическое отображение многообразия в пространство.*

Далеко не всякое многообразие с дифференциальной метрикой может быть регулярным образом вложено в пространство. Если у каждой точки многообразия с дифференциальной метрикой есть окрестность, которая может быть регулярно вложена в пространство, то говорят, что это многообразие допускает локально регулярное вложение в пространство. Очевидно, что необходимым и достаточным условием такого вложения многообразия в пространство является существование у каждой точки многообразия окрестности, изометричной некоторой регулярной поверхности в пространстве.

Докажем, что многообразия с дифференциальной метрикой, имеющие в каждой точке одинаковую гауссову кривизну

$$K = \text{const},$$

допускают локально регулярное вложение в пространство.

Действительно, повторяя построения § 9 гл. VI в достаточно малой окрестности произвольной точки многообразия с постоянной гауссовой кривизной K, получим, что первая квадратичная форма многообразия будет иметь вид:

$$\begin{aligned} ds^2 &= du^2 + \cos^2(\sqrt{K}\,u)\, dv^2, && \text{если } K > 0,\\ ds^2 &= du^2 + \operatorname{ch}^2(\sqrt{-K}\,u)\, dv^2, && \text{если } K < 0,\\ ds^2 &= du^2 + dv^2, && \text{если } K = 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что указанная окрестность изометрична некоторой области на сфере, если $K > 0$, некоторой области на псевдосфере, если $K < 0$, или, наконец, некоторой области на плоскости, если $K = 0$.

§ 12. О регулярном погружении в пространство плоскости Лобачевского

На плоскости Лобачевского полугеодезическая система координат может быть введена сразу для всей плоскости. Действительно, пусть l — произвольная прямая на плоскости Лобачевского. Рассмотрим пучок прямых, перпендикулярных к l. Этот пучок состоит из расходящихся прямых, покрывающих все точки плоскости Лобачевского. Ортогональными траекториями для прямых этого пучка, как мы знаем, являются эквидистанты с базой l (см. рис. 172).

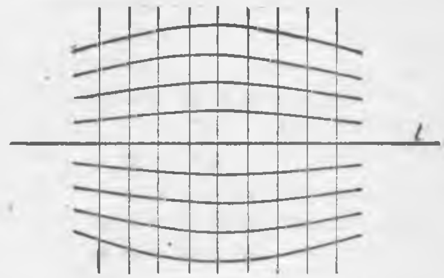


Рис. 172

Рассмотренный пучок расходящихся прямых и совокупность ортогональных к нему эквидистант как раз и образуют полугеодезическую сеть.

Можно доказать (см. Н. В. Ефимов «Высшая геометрия», гл. VII), что в введенной полугеодезической сети плоскость Лобачевского есть многообразие с дифференциальной метрикой, задаваемой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2\left(\sqrt{-K_0}u\right) dv^2.$$

Отсюда гауссова кривизна на плоскости Лобачевского равна

$$K = K_0 = \text{const} < 0$$

и, стало быть, *плоскость Лобачевского есть многообразие постоянной отрицательной гауссовой кривизны.*

Из п. 7 § 11 гл. VI вытекает, что у каждой точки плоскости Лобачевского есть окрестность, изометричная некоторой области на псевдосфере. Таким образом, *плоскость Лобачевского локально регулярно вкладывается в пространство.*

Гильберт установил, что *не существует регулярного вложения всей плоскости Лобачевского в пространство, т. е. не существует регулярной поверхности в евклидовом пространстве, изометричной плоскости Лобачевского.*

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

1. Координатная сеть u, v на поверхности называется *изотермической*, если первая квадратичная форма в ней имеет вид:

$$ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2).$$

Найти выражения для гауссовой кривизны и коэффициентов Кристофеля в изотермической сети.

Ответ. Для гауссовой кривизны справедлива формула

$$K = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial v^2}\right).$$

2. Координатная сеть u, v на поверхности, в которой первая квадратичная форма имеет вид:

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\varphi(u, v)\, du dv + dv^2,$$

называется чебышевской. Найти выражения для гауссовой кривизны и коэффициентов Кристофеля в чебышевской сети.

Ответ. Для гауссовой кривизны справедлива формула

$$K = \frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{d^2\varphi}{\partial u \partial v}.$$

3. Если геодезическая линия является одновременно линией кривизны, то она плоская кривая.

4. Доказать, что уравнение геодезических в полугеодезической системе координат u, v $(ds^2 = du^2 + G dv^2)$ может быть записано в виде:

$$\frac{d\alpha}{dv} = -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u},$$

где α — угол, под которым геодезическая пересекает линии $v = \mathrm{const}$.

5. Описать строение геодезических на прямом круговом конусе.

6. Доказать, что в окрестности произвольной точки P регулярной поверхности может быть введена так называемая геодезическая полярная система координат

$$ds^2 = du^2 + G dv^2,$$

обладающая следующими свойствами: а) линии u — геодезические, проходящие через точку P, б) линии v — геодезические окружности с центром P, в) v — угол, образуемый геодезической с некоторым фиксированным направлением в точке P,

г) $$\lim_{u\to 0} G = 0;\ \lim_{u\to 0}(\sqrt{G})_u = 1;\ \lim_{u\to 0}\left\{-\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}\right\} = K(P),$$

где $K(P)$ — гауссова кривизна в точке P.

7. Пусть $l(r)$ — длина геодезической окружности на поверхности F с центром в точке P и радиусом r. Доказать, что

$$\lim_{r\to 0}\frac{2\pi r - l(r)}{r^3} = \frac{\pi}{3} K(P),$$

где $K(P)$ — гауссова кривизна в точке P.

8. Пусть k_1 и k_2 — соответственно геодезические кривизны координатных линий $v = \mathrm{const}$, $u = \mathrm{const}$ и φ — угол между этими линиями. Тогда для гауссовой кривизны справедлива формула

$$K = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial}{\partial u}(k_2\sqrt{G}) - \frac{\partial}{\partial u}(k_1\sqrt{E})\right\}.$$

ГЛАВА VII. ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ ЗАМКНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Понятие замкнутой поверхности было введено выше в § 1 гл. V. В настоящей главе исследуется топологическое строение таких поверхностей. Именно с помощью величин, не изменяющихся при гомеоморфных отображениях поверхности (топологических инвариантов), дается классификация разных топологических типов поверхностей.

Основную роль в этом исследовании играет *эйлерова характеристика поверхности* — топологический инвариант, описывающий соотношение между элементами разбиения поверхности с помощью сети кривых.

§ 1. Простейшие замкнутые поверхности

Рис. 173

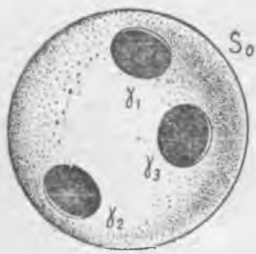


Рис. 174

Рис. 175

1. Сферы с *p* ручками. Пусть S_0 — некоторая сфера и γ — малая окружность на S_0. Обозначим через G_γ меньшую из открытых областей, на которые γ разбивает сферу S_0 (рис. 173). Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ — малые окружности на S_0 и множества $G_{\gamma_i} + \gamma_i$ попарно не имеют общих внутренних точек. Поверхность $S_0 - G_{\gamma_1} - G_{\gamma_2} \ldots - G_{\gamma_p}$ будем называть *сферой с p отверстиями* (рис. 174).

Рис. 176

Ручкой будем называть поверхность с краем, гомеоморфную боковой поверхности прямого кругового цилиндра. Край ручки состоит из двух простых замкнутых кривых γ_1 и γ_2, каждая из которых гомеоморфна окружности. Наглядное представление о ручке дает рис. 175.

Рассмотрим теперь сферу S_0 с $2p$ отверстиями, где p — любое натуральное число. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p}$ — края отверстий сферы S_0. Возьмем ручку Φ_1, край которой состоит из двух замкнутых простых кривых l_1 и l_2. Установим какие-нибудь гомеоморфизмы между парами кривых γ_1 и l_1, γ_2 и l_2. Поверхность, которая получается из S_0 с отверстиями и Φ_1 отождествлением соответствующих точек кривых γ_1 и l_1, γ_2 и l_2 так, что при этом сфера S_0 и ручка Φ_1 не имеют других общих точек, называют *сферой* S_0 *с приклеенной ручкой* Φ_1 (рис. 176).

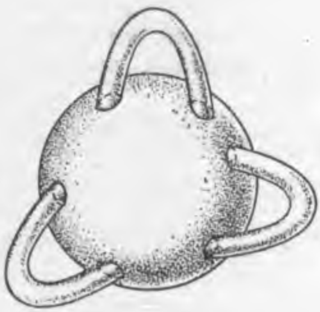


Рис. 177

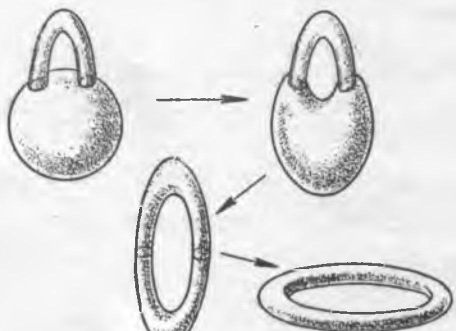


Рис. 178

Если к парам окружностей γ_3 и γ_4, γ_5 и γ_6, ..., γ_{2p-1} и γ_{2p} подклеить соответственно ручки $\Phi_2, \ldots, \Phi_p$, то мы получим поверхность, которую принято называть *сферой с* p *ручками* (рис. 177).

Если сферу с одной ручкой растянуть без разрывов и склеиваний, полагая, что поверхность является эластичной пленкой, то она превратится в тор (см. рис. 138, гл. V). На рис. 178 указаны схематически некоторые моменты этой деформации. Поскольку растяжение поверхности без разрывов и склеиваний можно рассматривать как наглядное описание топологического преобразования поверхности, *то сфера с одной ручкой гомеоморфна тору.*

Аналогичными рассуждениями легко можно установить, что *сфера с* p *ручками гомеоморфна «кренделю» с* p *дырами* (см. рис. 179).

Рис. 179

2. Лист Мёбиуса. Весьма замечательной поверхностью является *лист Мёбиуса.* Он получается из прямоугольника $ABCD$ склеиванием сторон AB и CD так, что точка A склеивается с точкой C, а точка B с точкой D (рис. 180). Другими словами, одна сторона CD прямоугольной ленты $ABCD$ поворачивается на угол π и после этого склеивается со стороной AB. Общий вид листа Мёбиуса изображен на рис. 181.

Лист Мёбиуса обладает целым рядом интересных свойств:

Рис. 180

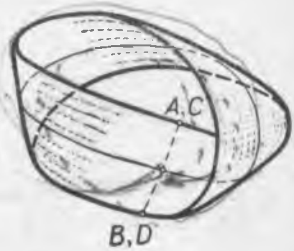


Рис. 181

а) *краем листа Мёбиуса является кривая, гомеоморфная окружности*;

б) *если лист Мёбиуса разрезать по средней линии, то он не распадается на две части.*

Эти свойства листа Мёбиуса проще всего проверить непосредственно, что мы и предоставляем сделать читателю в качестве упражнения. О других свойствах листа Мёбиуса мы будем говорить ниже.

3. Простейшие замкнутые поверхности. Пусть нам дана сфера S_0, в которой мы вырезали k отверстий, ограниченных малыми окружностями γ_1', γ_2', ..., γ_k'. Так как лист Мёбиуса имеет своей границей гомеоморфный образ окружности, то каждое из отверстий в сфере S_0 можно заклеить с помощью листа Мёбиуса. Таким образом, получаем замкнутые поверхности, построенные из сферы с любым количеством отверстий с помощью заклеивания последних листами Мёбиуса.

Принципиальная разница между сферой с отверстиями, заклеенными листами Мёбиуса, и сферой с отверстиями, заклеенными ручками, будет выяснена ниже.

В дальнейшем ***простейшими замкнутыми поверхностями*** *будем называть поверхности, получаемые в результате заклеивания сферы с отверстиями или ручками, или листами Мёбиуса.*

В заключение отметим, что *сфера с одним отверстием, заклеенным листом Мёбиуса, гомеоморфна проективной плоскости.*

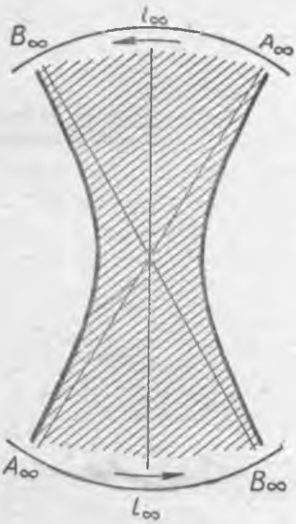


Рис. 182

Приведем план доказательства этого утверждения. На проективной плоскости, которая получена из евклидовой с помощью пополнения бесконечно удаленными точками, рассмотрим гиперболу. Тогда полоса между ветвями гиперболы, содержащая мнимую ось гиперболы, на проективной плоскости представляет собой лист Мёбиуса (рис. 182). На этом рисунке бесконечно удаленная прямая l_∞ и лежащие на ней точки A_∞, B_∞ на евклидовой плоскости условно нарисованы в двух экземплярах; при переходе на проективную плоскость эти экземпляры отождествляются. Отсюда и вытекает наше утверждение. Далее мы можем с помощью проективного преобразования плоскости перевести гиперболу в окружность, а указанную полосу между ветвями гиперболы во внешнюю область окружности. После этого утверждение о том, что проективная плоскость есть результат заклеивания в сфере отверстия листом Мёбиуса, очевиден, поскольку сфера с отверстием гомеоморфна замкнутому евклидову кругу.

§ 2. Ориентируемые и неориентируемые замкнутые поверхности

Систему кривых $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ на замкнутой поверхности S_0 будем называть *сетью*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1) все γ_i гомеоморфны отрезку;

2) любые две кривые γ_i, γ_k могут иметь не более одной общей точки;

3) из обоих концов любой кривой γ_l исходит по крайней мере еще одна кривая из набора

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{l-1}, \gamma_{l+1}, \ldots, \gamma_k;$$

4) поверхность S разбивается кривыми $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ на области $G_1, G_2, \ldots, G_f$ такие, что области $G_1, \ldots, G_f$ гомеоморфны

открытому кругу, попарно не имеют общих точек и граница каждой из G_m состоит из набора кривых, взятых из системы

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k;$$

5) $S = G_1 + G_2 + \ldots + G_f + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_k$;

6) каждая из кривых γ_i является частью двух и только двух областей G_m и G_l.

Каждая из кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ называется *ребром* сети; точки, в которых сходятся концы ребер, называются *вершинами*, а ограниченные ребрами части поверхности называют *областями*.

Примером сети на сфере является совокупность кривых, получающаяся в результате центрального проектирования сети ребер замкнутого выпуклого многогранника из центра сферы. В этом примере мы предполагаем, что центр сферы лежит внутри многогранника.

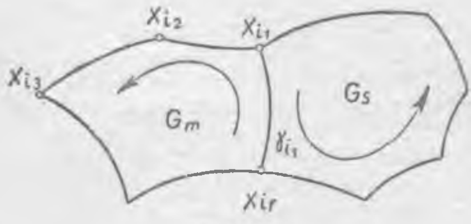


Рис. 183

Пусть на замкнутой поверхности S дана сеть $\sum$, состоящая из ребер $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$. Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_f$ — области, на которые сеть $\sum$ разбивает поверхность S. Тогда каждую из областей G_m можно рассматривать как криволинейный многоугольник, гомеоморфный кругу. Вершинами многоугольника G_m будут вершины сети. На многоугольнике G_m можно задать два противоположных обхода вершин (рис. 183): X_{i_1}, $X_{i_2}, \ldots$, X_{i_r}, X_{i_1} или X_{i_1}, X_{i_r}, $X_{i_{r-1}}, \ldots, X_{i_2}$, X_{i_1}. *Многоугольник G_m с заданным на нем обходом вершин назовем* ***ориентированным****, а сам порядок обхода вершин* ***ориентацией***. Два многоугольника G_m и G_s, имеющих общую сторону γ_i, назовем *соседними*. *Будем говорить, что два соседних многоугольника G_m и G_s (или две области G_m и G_s)* ***ориентированы когерентно****, если их общая сторона* (рис. 183) *проходится в ориентированных многоугольниках G_m и G_s в противоположных направлениях.*

Замкнутая поверхность S называется ***ориентируемой****, если существует разбиение S сетью $\sum$ на области $G_1, G_2, \ldots, G_f$ такое, что в областях $G_1, G_2, \ldots, G_f$ можно выбрать ориентации, которые будут когерентными для любой пары соседних областей.*

Замкнутая поверхность S называется ***неориентируемой****, если ни для какой сети $\sum$ на ней ориентации областей $G_1, G_2, \ldots, G_f$ не могут быть выбраны так, чтобы для любой пары соседних областей ориентации были бы когерентными.*

Отметим как вполне очевидный факт, что ориентируемость или неориентируемость поверхности сохраняется при всех ее гомеоморфных преобразованиях. *Следовательно, свойство поверхности быть ориентируемой или нет топологически инвариантно.*

Примерами ориентируемых поверхностей являются сферы с любым количеством ручек. Поверхность, получаемая заклеиванием в сфере нечетного количества отверстий листами Мёбиуса, неориентируема. В частности, проективная плоскость является неориентируемой поверхностью.

Понятие ориентируемых и неориентируемых поверхностей вводится дословно также для поверхностей с краем. Лист Мёбиуса является неориентируемой поверхностью, в чем легко убедиться непосредственно.

С ориентируемостью поверхности связан следующий факт: *направление единичной нормали к поверхности однозначно определяет сторону поверхности в окрестности каждой ее точки.* Рассмотрим всевозможные замкнутые кривые γ на поверхности, исходящие из некоторой точки X_0, и будем изучать вдоль них поведение нормали $\boldsymbol{n}$. Тогда имеются две возможности: либо для всех кривых γ после обхода по ним нормаль $\boldsymbol{n}$ возвращается в первоначальное положение, либо для некоторых кривых γ после обхода нормаль примет противоположное направление.

В первом случае поверхность имеет две стороны и называется ***двусторонней****, во втором случае у поверхности есть только одна сторона, и такая поверхность называется* ***односторонней****.* Лист Мёбиуса является односторонней поверхностью, в чем мы предоставляем читателю убедиться самостоятельно.

Всякая ориентируемая поверхность, и только она, двусторонняя, и всякая неориентируемая поверхность, и только она, односторонняя.

§ 3. Основные теоремы топологии замкнутых поверхностей

В этом параграфе мы формулируем основные теоремы о топологическом строении замкнутых поверхностей. Доказательства этих теорем будут проведены для ориентируемых регулярных замкнутых поверхностей.

Прежде всего введем понятие об эйлеровом числе сети на замкнутой поверхности. Пусть S — замкнутая поверхность и $\sum$ — сеть на этой поверхности. Обозначим через e количество вершин $\sum$, через k количество ребер $\sum$ и через f количество областей, на которые $\sum$ разбивает S. *Число*

$$N_\Sigma = e - k + f$$

называется ***эйлеровым числом сети*** $\sum$.

Справедливы следующие основные теоремы.

Теорема 1. *Пусть S — замкнутая поверхность. Тогда для всех сетей этой поверхности числа Эйлера одинаковы.*

(Число χ (S), равное эйлеровым числам всех сетей поверхности S, называется ***эйлеровой характеристикой поверхности*** *S).*

Теорема 2. *Эйлеровы характеристики гомеоморфных поверхностей равны.*

Из теоремы 2 вытекает, что эйлерова характеристика есть топологический инвариант. Оказывается, что с помощью этого инварианта решается задача о топологической классификации замкнутых поверхностей.

Именно справедлива

Теорема 3. *Пусть S_1 и S_2 — две замкнутые поверхности, имеющие равные эйлеровы характеристики:*

$$\chi(S_1) = \chi(S_2).$$

Тогда если S_1 и S_2 одновременно ориентируемы или неориентируемы, то поверхности S_1 и S_2 гомеоморфны.

Следующие две теоремы относятся к ориентируемым регулярным замкнутым поверхностям.

Теорема 4. *Пусть S — регулярная замкнутая ориентируемая поверхность, тогда для эйлеровой характеристики справедлива формула*

$$\chi(S) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S K\,d\sigma,$$

где K — гауссова кривизна поверхности S, а $d\sigma$ — элемент площади поверхности S.

Теорема 5. *Для регулярной замкнутой поверхности, гомеоморфной сфере с p ручками, справедлива формула*

$$\chi(S) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S K\,d\sigma = 2\,(1-p).$$

Ниже мы приводим доказательство теорем 4 и 5. Из теоремы 4 непосредственно вытекает теорема 1 для регулярных замкнутых поверхностей. Теорема 2 есть прямое следствие теоремы 1 и определения эйлеровой характеристики.

Таким образом, теоремы 1 и 2 будут доказаны для регулярных замкнутых поверхностей. Так как в доказательстве теоремы 4 мы будем пользоваться сетями, составленными из регулярных кривых, то теорема 1 будет доказана лишь для множества регулярных сетей на регулярной замкнутой ориентируемой поверхности.

Для случая общих замкнутых поверхностей доказательства теорем 1, 2, 3 см. в книгах: Зейферт и Трельфалль «Топология» (М. — Л., ОГИЗ, 1933), П. С. Александров «Комбинаторная топология» (М. — Л., Гостехиздат, 1947), В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович «Основные понятия топологии» («Математическое просвещение», № 2—4, 6, 1957—1960).

В топологии доказывается, что эйлерова характеристика ориентируемых замкнутых поверхностей — всегда четное число, не превосходящее двух. Поэтому из теорем 3 и 5 следует, что любая замкнутая ориентируемая поверхность гомеоморфна сфере с p ручками, где p — некоторое неотрицательное целое число. Число p называется *родом* замкнутой ориентируемой поверхности.

Доказательство теоремы 4. Пусть $\sum$ — сеть на регулярной замкнутой ориентируемой поверхности S, состоящая из регулярных кривых. Обозначим через $X_1, X_2, \ldots, X_e$; $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$; $G_1, G_2, \ldots, G_f$ соответственно вершины, ребра и области сети $\sum$. Пусть $X_{i_1}, X_{i_2} \ldots, X_{i_{m_r}}$ – вершины сети $\sum$, которые одновременно являются и вершинами многоугольника G_m, а $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \ldots, \gamma_{i_{m_r}}$ — ребра сети $\sum$, которые являются сторонами G_m. Во всех многоугольниках G_m введем ориентации так, чтобы любая пара соседних многоугольников была ориентирована когерентно (см. рис. 184). Так как ориентируемая поверхность двусторонняя, то, не нарушая общности, можно считать, что ориентации во всех областях G_m выбраны так, что они составляют с нормалью во внутренней точке области G_m правый винт.

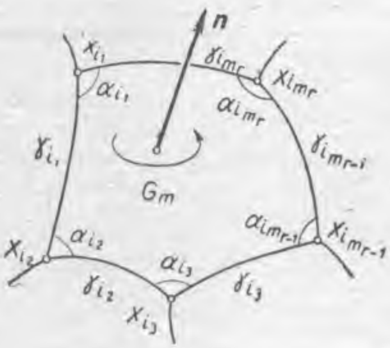


Рис. 184

Формула Гаусса—Бонне при сделанных обозначениях имеет вид:

$$\sum_{s=1}^{m_r} (\pi - \alpha_{i_s}) + \sum_{s=1}^{m_r} \int_{\gamma_{i_s}} \varkappa_{\text{г}}\, ds = 2\pi - \iint_{G_m} K\, d\sigma, \qquad (*)$$

где α_{i_s} — угол многоугольника при вершине X_{i_s}, а $\varkappa_{\text{г}}$ — геодезическая кривизна кривой γ_{i_s}. Интегралы, стоящие в левой части формулы (*), криволинейные и направление изменения параметра s (s — длина переменной дуги на γ_{i_s} с фиксированным началом) определяется ориентацией многоугольника G_m.

Просуммируем соотношения (*) по всем $r = 1, 2, \ldots, f$. Каждый криволинейный интеграл $\int\limits_{\gamma_{i_s}} \varkappa_{\text{г}}\, ds$ участвует в сумме в точности два раза. Так как ориентации во всех соседних областях когерентные, то γ_{i_s} проходится при этом в противоположных направлениях.

Поэтому в левой части суммы соотношений (*) криволинейные интегралы взаимно уничтожаются. Таким образом, приходим к формуле

$$\sum_{r=1}^{f}\sum_{s=1}^{m_r}(\pi-\alpha_{l_s})=2\pi f-\iint_S K\,d\sigma. \qquad \left({}^{*}_{*}\right)$$

В формуле $\left({}^{*}_{*}\right)$ суммирование углов $\pi-\alpha_{l_s}$ проводится следующим образом: вначале суммируются углы вдоль многоугольника G_m, а затем суммирование производится по всему набору многоугольников. Так как количество вершин и сторон в любом многоугольнике G_m одинаково, то число π участвует слагаемым в сумме $\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{s=1}^{m_r}\pi$ столько раз, каково количество сторон во всех многоугольниках $G_1, \ldots, G_f$. Далее, каждая сторона любого многоугольника есть ребро сети $\sum$ и потому является общей стороной некоторых двух, но не более, многоугольников G_m. Отсюда общее число сторон всех многоугольников G_m равно удвоенному числу ребер сети $\sum$, т. е. числу $2k$. Следовательно,

$$\sum_{r=1}^{f}\sum_{s=1}^{m_r}\pi=2k\pi.$$

Сумма

$$\sum_{r=1}^{f}\sum_{s=1}^{m_r}\alpha_{l_s}$$

представляет собой сумму всех внутренних углов многоугольников $G_1, G_2, \ldots, G_f$. Очевидно, что эта сумма может быть подсчитана также и так: суммируем сначала внутренние углы всех многоугольников, сходящихся в одной вершине сети, и после этого полученные в результате углы суммируем по всем вершинами сети $\sum$. Так как при каждой вершине сумма рассматриваемых углов равна 2π, а число вершин равно e, то

$$\sum_{r=1}^{f}\sum_{s=1}^{m_r}\alpha_{l_s}=2\pi e.$$

После проведенных выкладок соотношение $\left({}^{*}_{*}\right)$ принимает вид:

$$2\pi k-2\pi e=2\pi f-\iint K\,d\sigma.$$

Отсюда

$$N_\Sigma=e-k+f=\frac{1}{2\pi}\iint_S K\,d\sigma. \qquad \left({}^{\;*}_{**}\right)$$

Так как сеть $\sum$ была взята на поверхности S произвольно, то из соотношения $({}_*{}^*{}_*)$ следует равенство между собой эйлеровых чисел любых регулярных сетей поверхности S. (Тем самым доказана теорема 1.) Поэтому для эйлеровой характеристики поверхности S получаем формулу

$$\chi(S) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S K\, d\sigma.$$

Теорема 4 доказана.

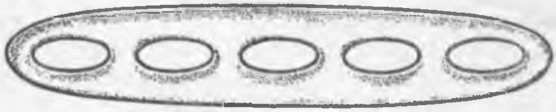


Рис. 185

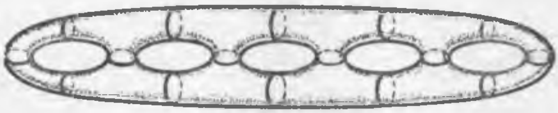


Рис 186

Доказательство теоремы 5. Всякая сфера с p ручками, как мы уже отмечали в § 1 гл. VII, гомеоморфна кренделю с p дырами (рис. 185). Произведем теперь разбиение регулярного кренделя S с p дырами сетью $\sum$ из регулярных кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ (см. рис. 186). В результате S разобьется на $4\,(p-1)$ частей G_m, имеющих вид, изображенный на рис. 187, и 8 частей Q_h, изображенных на рис. 188.

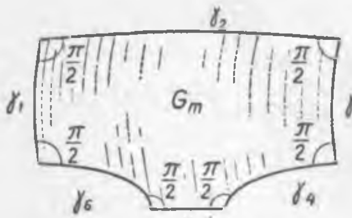


Рис. 187

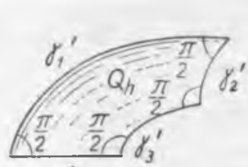


Рис. 188

Не нарушая общности, крендель S и сеть $\sum$ можно считать такими, что все G_m $(m = 1, 2, \ldots, 4\,(p-1))$ и Q_h $(h = 1, 2, \ldots, 8)$

изометричны между собой. Применим к областям G_m и Q_h формулу Гаусса—Бонне:

$$6\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{i=1}^{6} \int_{\gamma_i} \tilde{\varkappa}_{\text{г}}\, ds = 2\pi - \iint_{G_m} K\, d\sigma,$$

$$4\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} \tilde{\varkappa}_{\text{г}}\, ds = 2\pi - \iint_{Q_h} K\, d\sigma.$$

Суммируя эти формулы по всем $m = 1, 2, \ldots, 4(p-1)$ и $h = 1, 2, \ldots, 8$ и используя ориентируемость кренделя S, получим:

$$4(p-1)\cdot 3\pi + 8\cdot 2\pi = 4(p-1)\, 2\pi + 16\pi - \iint_S K\, d\sigma.$$

Отсюда

$$\iint_S K\, d\sigma = 4\pi(1-p).$$

Так как

$$\chi(S) = \frac{1}{2\pi} \iint_S K\, d\sigma,$$

то

$$\chi(S) = \frac{1}{2\pi} \iint_S K\, d\sigma = 2(1-p).$$

Теорема 5 доказана.

Илья Яковлевич Бакельман

ВЫСШАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Редактор *В. В. Гольдберг*
Художник *Н. Н. Румянцев*
Художественный редактор *В. С. Эрденко*
Технический редактор *В. В. Новоселова*
Корректоры *М. В. Голубева*
и *Т. А. Кузнецова*

Сдано в набор 15/IX 1966 г. Подписано в печать 31/X 1967 г. $60\times90^1/_{16}$. Типографская № 2. Печ. л. 23,0. Уч.-изд. л. 19,99. Тираж 100 тыс. экз. (Пл. 1967 г. № 15). А 14509. Зак. 610.

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Цена без переплета 56 коп., переплет 18 коп.