

## Вопросы, изученные по курсу «Аналитическая геометрия» в I семестре

1. Положение точки на прямой, декартовы координаты.
2. Направленные отрезки. Линейные операции над направленными отрезками. Сложение направленных отрезков, основная теорема, основное тождество. Произведение направленного отрезка на число.
3. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве, понятие о правой и левой тройках. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат.
4. Простейшие задачи аналитической геометрии:
  1. Проекция направленного отрезка на ось.
  2. Расстояние между точками.
  3. Деление отрезка в данном отношении; сложное (двойное) отношение, гармоническое отношение.
5. Основные понятия векторной алгебры (понятие вектора, нулевого вектора, коллинеарность, компланарность, равенство векторов; утверждение о существовании в пространстве вектора, равного данному).
6. Линейные операции над векторами.
  1. Сумма векторов, свойства операции сложения (коммутативность, ассоциативность, нулевой и обратный элементы), Сложение  $n$  векторов.
  2. Разность векторов.
  3. Умножение вектора на число, свойства операции умножения вектора на число (наличие единичного элемента, ассоциативность, два варианта дистрибутивности).
7. Линейная зависимость векторов. Понятия линейной комбинации векторов, линейной зависимости и линейной независимости векторов.
8. Теоремы о линейной зависимости векторов:
  1. Теорема о нулевом векторе.
  2. Теорема о  $k$  линейно зависимых векторах.
  3. Теорема о коллинеарных векторах.
9. Линейные комбинации двух векторов. Теорема о линейной зависимости 2-х коллинеарных векторов, следствие из теоремы. Замечание о двух свободных векторах.
10. Линейные комбинации трёх векторов. Компланарность трёх векторов. Теорема о линейной зависимости 3-х компланарных векторов. Следствия из теоремы (линейная независимость некопланарных векторов, отсутствие пары коллинеарных и хотя бы одного нулевого вектора среди трёх некопланарных векторов, единственность разложения одного вектора из тройки некопланарных по паре других векторов).
11. Линейная зависимость четырёх векторов. Теорема о линейной зависимости 4-х векторов в 3-х мерном пространстве. Следствие из теоремы (представимость вектора в виде линейной комбинации 3-х некопланарных векторов).

12. Понятие о базисе. Определение базиса на плоскости и в пространстве. Теорема о базисе (какие векторы образуют базис). Координаты вектора относительно базиса. Теорема об однозначности определения координат вектора относительно базиса. Признак равенства векторов. Теорема о координатном сложении векторов и умножении вектора на число.
13. Проекция вектора на ось. Определение проекции вектора на ось, угла между векторами и угла между вектором и осью.
14. Аффинные координаты. Задание системы аффинных координат в пространстве, определение аффинных координат точки, однозначность аффинных координат точки.
15. Прямоугольные декартовы координаты вектора. Понятие орта. Ортонормированный ортогональный базис. Определение прямоугольных декартовых координат вектора.
16. Линейные свойства проекций вектора на ось (сумма и умножение на число).
17. Скалярное произведение векторов. Обозначение, определение, вычисление.
18. Свойства скалярного произведения:
1. Геометрические (равенство нулю при взаимной ортогональности векторов, связь знака произведения с углом между векторами).
  2. Алгебраические (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, скалярный квадрат вектора).
19. Теорема о вычислении скалярного произведения векторов в декартовых координатах. Вычисление скалярного квадрата вектора и угла между векторами в декартовых координатах.
20. Правые и левые тройки векторов и системы координат. Понятие об упорядоченной тройке векторов. Способы отнесения векторов к правой (левой) тройке: по соотношению с пальцами руки, по направлению кратчайшего поворота («правило буравчика») по анализу телесного угла. Понятие правой (левой) тройки для компланарных векторов. Взаимная ориентация разных троек векторов. Правая (левая) аффинная (декартова) система координат.
21. Векторное произведение векторов. Определение, обозначения. Свойства векторного произведения:
1. Геометрические (равенство нулю при взаимной коллинеарности векторов, связь модуля произведения с площадью параллелограмма).
  2. Алгебраические (антикоммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, векторный квадрат вектора).
22. Смешанное произведение векторов. Определение, обозначение. Теорема о связи произведения с объемом параллелепипеда. Следствия (равенство  $[\bar{a}\bar{b}]\bar{c} = \bar{a}[\bar{b}\bar{c}]$ , условие компланарности трёх векторов, смешанное произведение при наличии коллинеарных векторов, свойство циклических перестановок сомножителей, связь произведения с объемом тетраэдра).

23. Векторное и смешанное произведения векторов в декартовых координатах. Вычисление векторного произведения через определитель, следствие (пропорциональность координат коллинеарных векторов). Вычисление смешанного произведения через определитель, следствие (условие компланарности трёх векторов).

24. Двойное векторное произведение. Определение, обозначение. Вычисление по формуле «**бац**» минус «**цаб**».

25. Преобразование декартовых прямоугольных координат на плоскости. Выражение координат произвольной точки относительно первой системы координат через координаты этой же точки относительно второй системы координат, прямое и обратное преобразования, линейность этих преобразований. Преобразование декартовых прямоугольных координат как суперпозиция параллельного переноса и поворота системы координат. Матричная форма для поворота системы координат.

26. Уравнение линии на плоскости. Понятие об уравнении линии. Определение. Линия как геометрическое место точек. Параметрическое представление линии. Уравнение линии в различных системах координат.

27. Классификация плоских линий (относительно декартовых прямоугольных систем координат). Алгебраическая линия (выражается через алгебраический полином), алгебраическая линия порядка  $n$ , трансцендентная линия. Распадающаяся алгебраическая линия.

28. Инвариантность представления алгебраической линии относительно преобразования декартовой прямоугольной системы координат.

29. Прямая на плоскости. Общее уравнение прямой (уравнение первой степени). Нормальный и направляющий векторы прямой. Уравнение прямой, проходящей через точку перпендикулярно некоторому вектору. Смысл коэффициентов в общем уравнении прямой.

30. Неполные уравнения прямой (хотя бы один из коэффициентов равен нулю), 5 видов неполных уравнений.

31. Уравнение прямой в отрезках, смысл коэффициентов уравнения.

32. Каноническое (симметричное) уравнение прямой (уравнение прямой, проходящей через заданную точку и имеющей заданный направляющий вектор), смысл коэффициентов уравнения. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

33. Параметрические уравнения прямой, смысл параметра.

34. Прямая с угловым коэффициентом. Понятие угла наклона прямой к оси абсцисс, угловой коэффициент прямой, связь углового коэффициента с направляющим вектором. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку и имеющей заданный угловой коэффициент. Смысл коэффициентов в уравнении прямой с угловым коэффициентом.

35. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. **(Очевидное следствие из всего предыдущего).**

## Вопросы, изученные по курсу «Аналитическая геометрия» во II семестре

### I. Уравнение поверхности и уравнения линии в пространстве

1. Понятие об уравнении поверхности. Порядок поверхности. Алгебраическая и трансцендентная поверхности.
2. Уравнения линии в пространстве. Задание линии на плоскости и в пространстве.
3. Параметрические уравнения линии и поверхности в пространстве.
4. Различные виды уравнения плоскости. Общее уравнение плоскости. Нормальный вектор плоскости. Неполные уравнения плоскости. Уравнение плоскости в отрезках. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки, не лежащие на одной прямой. Нормированное уравнение плоскости. Отклонение точки от плоскости. Пучки и связки плоскостей.
5. Прямая линия в пространстве. Канонические уравнения прямой в пространстве. Уравнения прямой, проходящей через две различные точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ . Параметрические уравнения прямой в пространстве. Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Условие принадлежности двух прямых одной плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Условия принадлежности прямой плоскости. Связка прямых.
6. Некоторые задачи на прямую и плоскость в пространстве:
  - а. Найти условие пересечения трёх плоскостей в одной и только в одной точке.
  - б. Найти биссектральные плоскости двугранного угла, образованного двумя данными плоскостями.
  - в. Найти условия, при которых данная плоскость пересекает данный отрезок  $AB$ .
  - г. Определить местоположение данных точек  $A$  и  $B$  относительно двугранных углов, образованных данными плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .
  - д. Найти уравнения прямой, проходящей через данную точку  $M(x_1, y_1, z_1)$  и перпендикулярной данной плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$ .
  - е. Найти уравнение плоскости, проходящей через данную точку  $M(x_0, y_0, z_0)$  и параллельной данной плоскости  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ .
  - ж. Найти уравнение плоскости, проходящей через данную точку  $M(x_0, y_0, z_0)$  перпендикулярной заданной прямой  $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ .

- з. Найти уравнение плоскости, проходящей через данную прямую  $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$  и через заданную не лежащую на этой прямой точку  $M(x_0, y_0, z_0)$ .
- и. Найти уравнение плоскости, проходящей через данную прямую  $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$  и параллельной другой данной прямой  $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ .
- к. Найти уравнение плоскости, проходящей через заданную прямую  $L_1$  и перпендикулярной заданной плоскости  $\pi$ .
- л. Найти уравнения перпендикуляра  $L_2$ , опущенного из заданной точки  $M_0$  на данную прямую  $L_1$ .
- м. Найти расстояние от точки  $M_0$  до прямой  $L_1$ .
- н. Найти общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым  $L_1$  и  $L_2$ .
- о. Найти кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми  $L_1$  и  $L_2$ .

### Линии второго порядка

7. Конические сечения (коники). Перечень конических сечений. Как они образуются при сечении конуса плоскостью?
8. Канонические уравнения эллипса и гиперболы. Определения. Фокусы, фокальные радиусы, , оси (полуоси) – большая, малая, действительная, мнимая, центр, вершины, основной прямоугольник, сопряжённые гиперболы, директрисы, асимптоты.
9. Каноническое уравнение параболы. Определение. Фокус, эксцентриситет, вершина, директриса, фокальный параметр.
10. Некоторые свойства линий второго порядка:
- Полярное уравнение.
  - Диаметры и их свойства.
11. Оптические свойства эллипса, параболы и гиперболы.

### Поверхности второго порядка

12. Центральные поверхности. Эллипсоид, однополостный гиперболоид, двухполостный гиперболоид, конус второго порядка. Их канонические уравнения. Полуоси. Плоскости симметрии. Горловой эллипс. Частные случаи.
13. Нецентральные поверхности. Эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр, параболический цилиндр, эллиптический параболоид гиперболический параболоид, пара пересекающихся плоскостей, пара параллельных плоскостей, пара совпадающих плоскостей. Их канонические уравнения.

14. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка. Однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид. Применение в технике.

### **Касательные и инварианты**

15. Касательные к линиям второго порядка. Угловые коэффициенты касательных к эллипсу, гиперболе и параболе. Касательная в точке  $K(x_k, y_k)$  к эллипсу, гиперболе и параболе. Уравнение касательной и нормали в общем виде. Касательная к эллипсу, гиперболе и параболе, проведенная из точки.

16. Касательные плоскости к поверхностям второго порядка. Определение. Условие, при котором поверхность не имеет касательной плоскости в т.М. Уравнение касательной плоскости и нормали к ней в общем виде. Типы точек касания: эллиптическая, гиперболическая, параболическая.

17. Инварианты кривых второго порядка. Общее уравнение кривых второго порядка. Матрицы: квадратичной части ( $Q$ ), линейной части ( $L$ ), расширенная ( $A$ ). Ортогональные инварианты, семиинвариант. Классификация кривых второго порядка (*нужно знать, какая кривая как вырождается*).

18. Инварианты поверхностей второго порядка (квадрик). Общее уравнение поверхностей второго порядка. Матрицы: квадратичной части ( $Q$ ), линейной части ( $L$ ), расширенная ( $A$ ). Ортогональные инварианты, семиинварианты. Классификация поверхностей второго порядка (*уметь объяснить по таблице*).