

Проективная геометрия

Лекция №1

Введение

Геометрия

```
graph TD; A[Геометрия] --> B[Метод]; A --> C[Описание, некоторого пространства]; B --> D["Геометрии:  
➤ синтетическая;  
➤ аналитическая;  
➤ дифференциальная."]; C --> E["Геометрии:  
➤ евклидова;  
➤ аффинная;  
➤ проективная;  
➤ Лобачевского;  
➤ Риманова."];
```

Метод

Геометрии:

- синтетическая;
- аналитическая;
- дифференциальная.

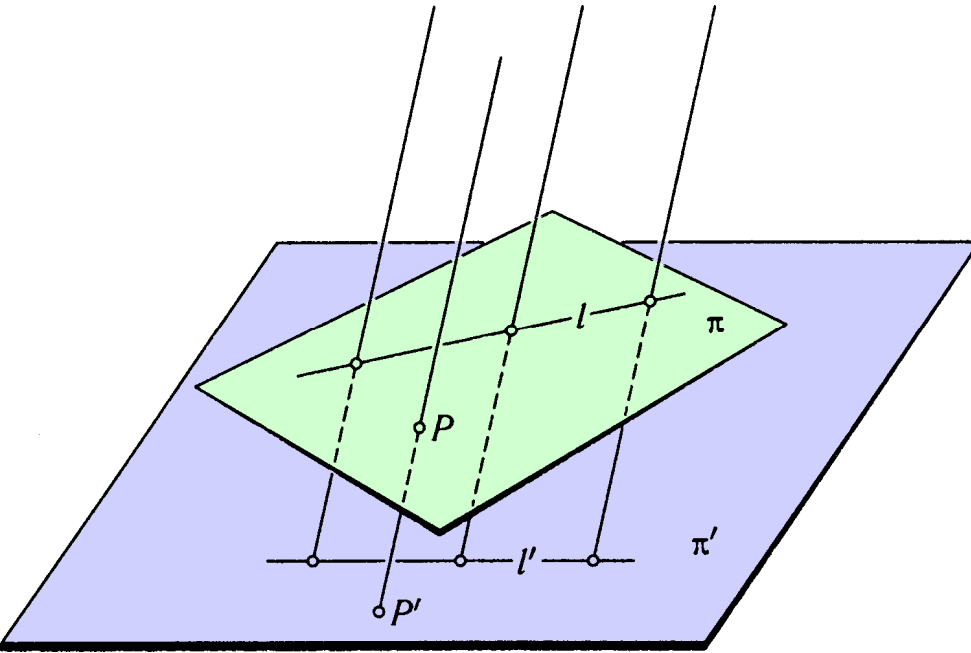
Описание, некоторого пространства

Геометрии:

- евклидова;
- аффинная;
- проективная;
- Лобачевского;
- Риманова.

Проекции

Параллельная проекция

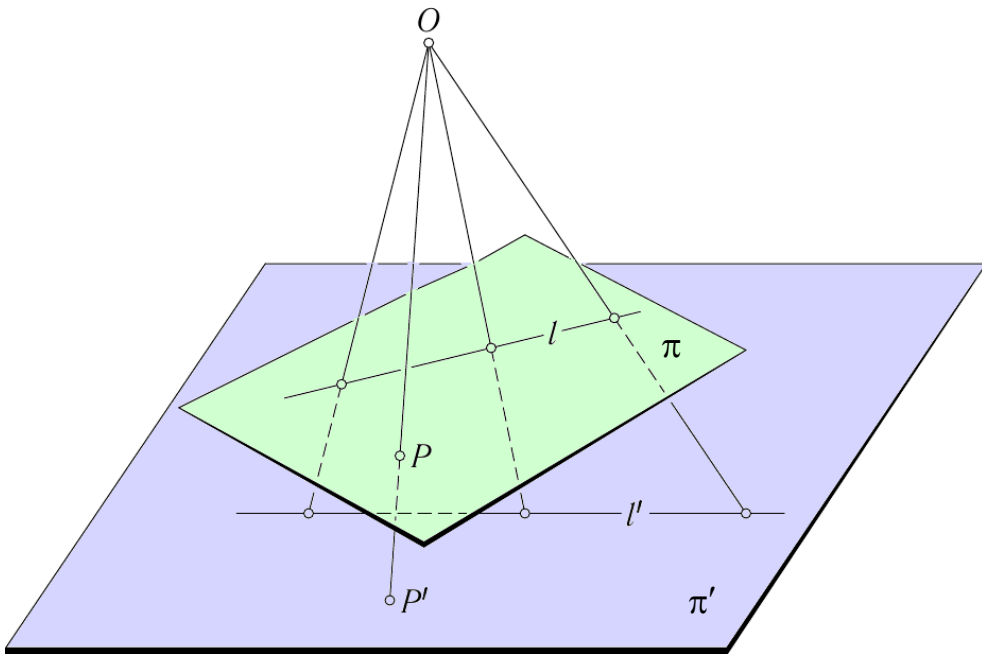


Прямые,
соединяющие
соответственные
точки этих фигур,
параллельны

Если $\pi \parallel \pi'$, то
фигуры
конгруэнтны.

Тогда имеем **инварианты**:
прямолинейности, касания, параллельности,
разделённости пополам и равенства площадей

Центральная проекция



Прямые,
соединяющие
соответственные
точки этих фигур,
все проходят
через
неподвижную
точку O – центр
проектирования

Если $\pi \parallel \pi'$, то фигуры гомотетичны.

Тогда имеем **инварианты**:

прямолинейность, касание, ...

Вопросы

Можно ли объединить эти два вида проекций?

Каковы тогда будут инварианты?

Некоторые понятия

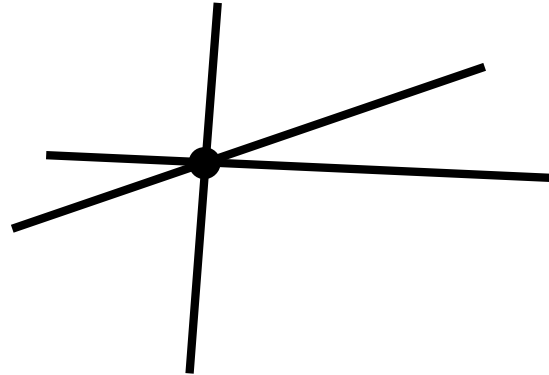
инцидентность;



коллинеарность;



конкурентность.



concurrere (лат.) –
бежать вместе

Аксиомы проективной геометрии

1. Две различные точки инцидентны единственной прямой.
2. Две различные прямые инцидентны единственной общей точке.
3. Существуют четыре точки, никакие три из которых не инцидентны одной прямой.
- 4.. Диагональные точки четырёхвершинника неколлинеарны (аксиома Фано).

Четырёхвершинник ABCD:

1) Четыре точки A, B, C, D

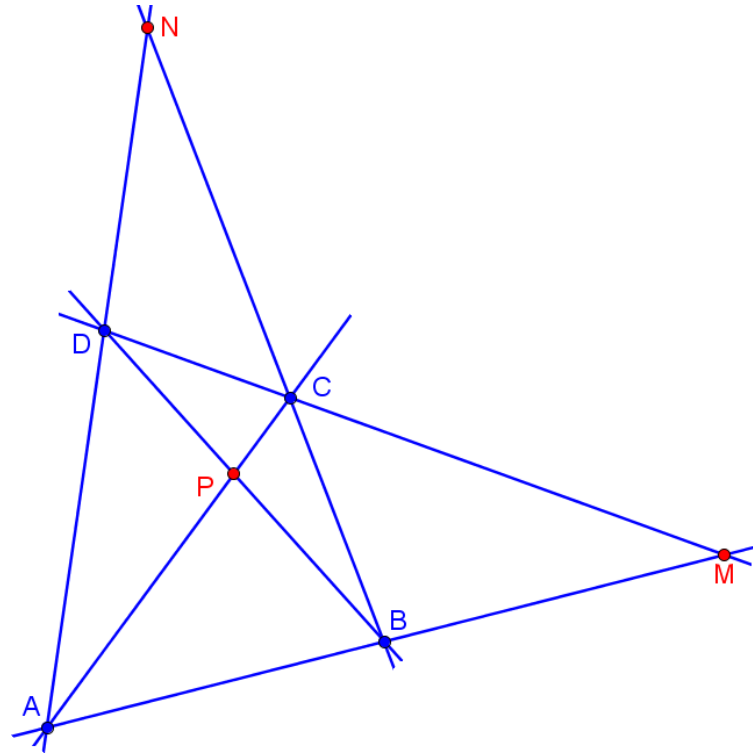
(никакие три из них не коллинеарны);

2) Шесть прямых (сторон) AB, BC, CD, DA, AC, BD.

Прямые AB и CD, BC и AD, AC и BD –
противоположные
стороны.

Точки M, N, P –
диагональные точки.

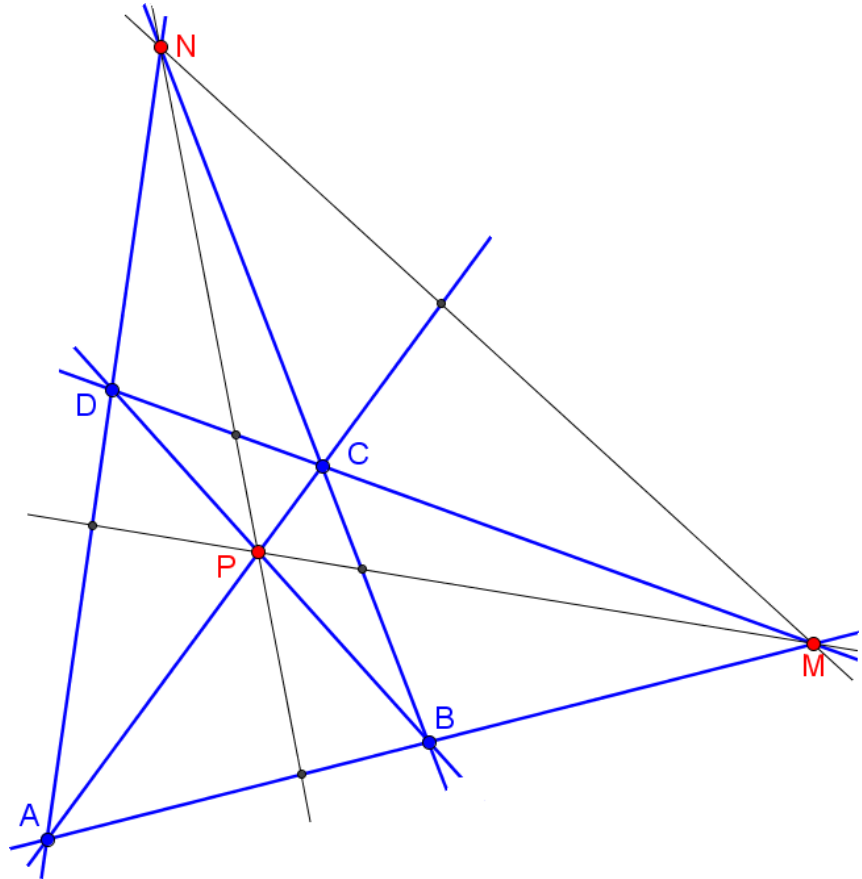
Прямые MN, MP, NP –
диагонали.



Аксиома Фано исключает существование конечных проективных плоскостей.

Проводим новые прямые (аксиома 1), пересекающиеся в новых точках (аксиома 2).

За счёт этого число точек и прямых проективной плоскости неограниченно увеличивается.



Вопросы

1. В аксиоматике ничего не смущает?

Ничто не выглядит необычно?

2. Чем отличается проективная плоскость от евклидовой (с учётом ответа на Вопрос №1)?

Проективная плоскость vs евклидова плоскость

История возникновения конкретной науки
не совпадает
с её логической структурой

Мы знаем, что точка зрения
помещается в глазу зрителя сюжета

Леонардо да Винчи



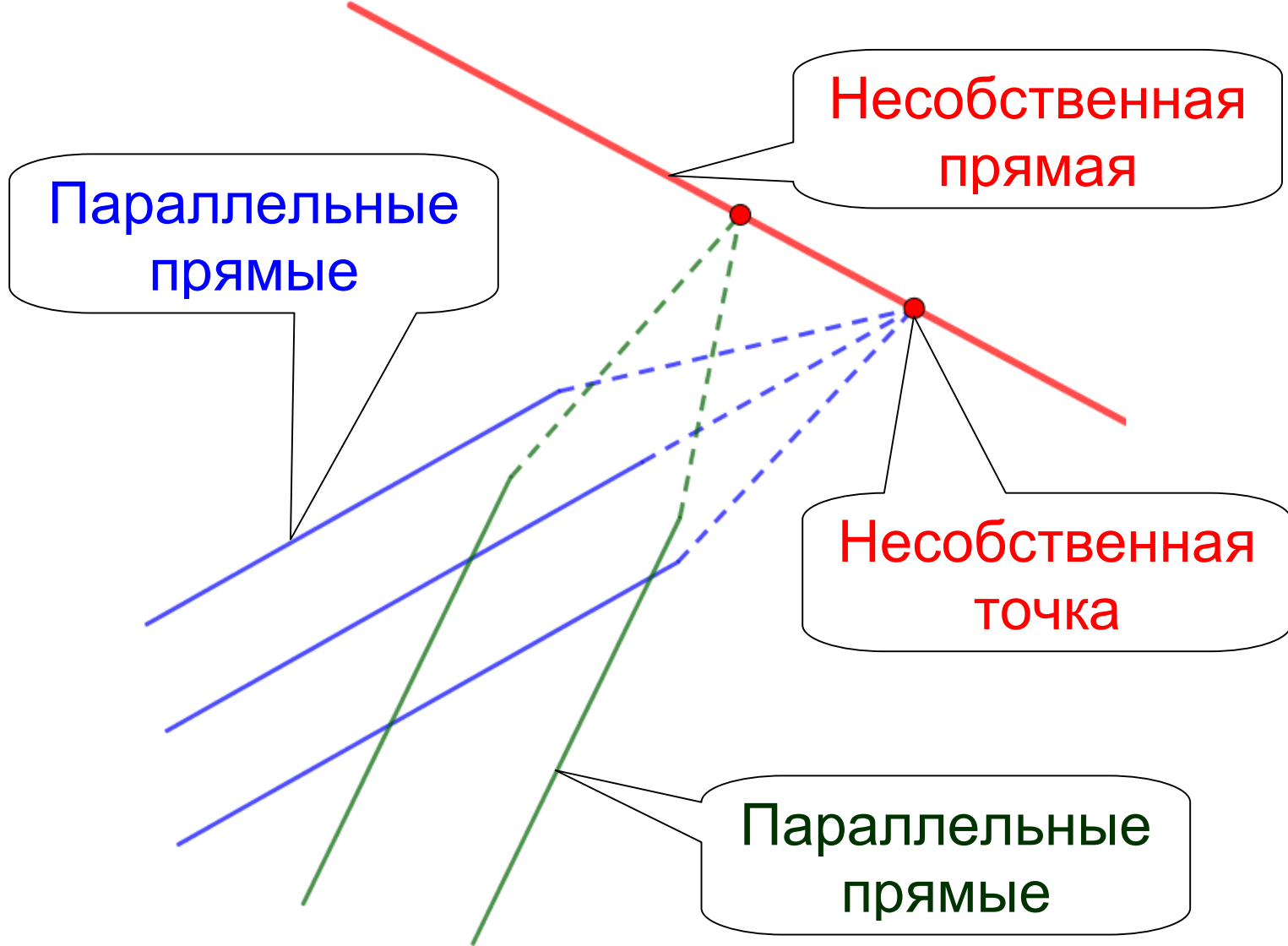
Дезарг предлагает:

1. Считать эти точки пересечения изображениями (проекциями) бесконечно удаленных точек, в которых пересекаются параллельные прямые.
2. Считать бесконечно удаленные точки прямых равноправными со всеми остальными точками.

Дезарг дополняет евклидову плоскость новыми элементами:

а) несобственными (бесконечно удаленными) точками;

б) несобственной прямой, на которой лежат все несобственные точки.



Дополнение плоскости бесконечно удалёнными элементами

Пусть параллельные прямые a и a_1
пересекаются в бесконечно удалённой точке.

Эта точка не есть обыкновенной, а
представляет собой новый объект —
***бесконечно удалённую (несобственную)
точку*** прямой a .

Все прямые, параллельные прямой a , имеют
одну общую бесконечно удалённую точку A .

Бесконечно удалённые точки непараллельных прямых считаются различными.

Несобственных точек – бесконечное количество.

Совокупность всех несобственных точек плоскости π образует **бесконечно удалённую (несобственную) прямую**.

Плоскость π , дополненная несобственными точками и несобственной прямой – **проективная плоскость**.

На ней пересекаются две **любые** прямые.

Прямая с несобственной точкой – **проективная прямая**.

Вопрос:

Если параллельные прямые уходят в бесконечность в одну и в другую сторону, а точка пересечения у них одна, то как выглядит проективная плоскость?